시계열 자료에 나타나는 장기 기억 속성에 대한 추정 및 검정
:NYSE composite index에 대한 실증분석

남재우 · 이회경

한국과학기술원 테크노경영대학원
서울시 동대문구 청량리동 207-43

Abstract

In this paper we examine long-term memory of the financial time-series by employing the R/S analysis, the Hurst exponent estimation, and the modified R/S analysis. The null hypothesis of white-noise is tested using the NYSE daily indexes from January 1966 to July 1998, and the results show that long-range dependence exists before the apparent structural break of the Black Monday in 1987.

1. 서론

효율적 시장 가설로 대표되는 근대 재무 이론은 랜덤워크 가설을 기반으로 하여 다양한 형태의 재무 자산들에 대한 가격 결정 이론으로 그 범위를 넓혀 왔다. 주식 가격의 변화에 대한 예측 또한 이러한 마팅게일 특성에 기인하여, 최적의 정책은 무변화이며 과거 자료를 이용한 시계열 예측은 그 이론적 근거 자체가 부정되어 왔다. 한편, 기술적 분석으로 대표되어지는 실무 분야에서의 다양한 투자 기법들은 가시적인 초과 수익률의 달성이 가능함을 보여왔으므로, 랜덤워크 가설을 기각함으로써 이론과 현실 사이의 이러한 괴리를 극복하고자 하는 시도가 계속되어져 왔다.

특히 80년대 이후 자연과학 분야의 혼돈이론으로 시작된 비선형성에 관한 연구는 기존의 선형 패러다임 하에서는 검정할 수 없었던 시계열 내의 자기 의존성(auto-dependency)의 존재를 확인함으로써 랜덤워크 가설의 기각을 함의하는 실증 분석 결과를 계속 제기해 오고 있다[1].

이러한 비선형 자기 의존성을 발생시킬 수 있는 구체적인 구조로서 확정적 혼돈 모형, 조건부 이분산 자기회귀 모형 등이 제시되고 있으며, 본 연구는 동일한 차원에서 또 하나의 가능한 대안으로서 장기 기억 속성(long-term memory property)의 영향력을 제시하고자 한다.

논문의 구성은 다음과 같다. 2, 3 장에서는 장기 기억 속성에 대한 개념 정의와, 실현된 실재 시계열로부터 장기 기억 속성의 존재를 검정할 수 있는 통계적 방법론인 R/S 분석(Rescaled range analysis)과 Hurst 지수 추정법에 대한 이론적 배경을 고찰한다. 4, 5 장에서는 실제 주가 수익률 자료를 이용하여 실증 분석하고 이러한 실증 분석 결과가 주식 시장에서 의미하는 바를 논의한다.

2. 이론적 고찰

자연계에 존재하는 랜덤해 보이는 현상들에 장기 기억의 특성이 존재한다는 사실은 비교적 오래 전부터 알려져 왔다. Hurst(1951)는 나일강의 수위를 기록한 847년 동안의 시계열 자료에 대한 연구에서 R/S 분석을 통하여 수위의 변화에 장기 기억의 속성이 존재함을 보였으며, 이 방법론은 후에 Mandelbrot (1971) 등에 의해 재무 자산의 수익률 등에도 응용되었다. 일반적으로 장기 기억 속성이란 자기 공분산 함수가 시차에 대해 매우 천천히 감소하는 현상을 의미하므로 장기 기억 속성 과정은 다음과 같이 정의될 수 있다(Lo(1991)).

$$\gamma_k \sim \begin{cases} k^{\nu}L(k) & \text{for } \nu \in (-1,\ 0) \\ -k^{\nu}L(k) & \text{for } \nu \in (-2, -1) \end{cases} \quad \text{as } k \to \infty \qquad (2.1)$$

γ_k : k 시차의 자기 공분산 함수
$L(k)$: 임의의 완속 변화(slowly varying at infinity) 함수

이러한 장기 기억의 속성을 설명할 수 있는 모형으로 Granger 와 Joyeux(1980)는 Fractionally-Integrated ARMA(ARFIMA) 모형을 제시하였다.

ARFIMA 모형은 선형 단위근 모형의 적분 차수에서 정수 제약을 완화하는 자연스런 수학적 확장으로 장기 기억 속성을 발생시킨다.

$$(1-L)^d X_t = \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t : \text{백색잡음(white noise)} \qquad (2.2)$$

위 모형에서 적분 차수 d가 비정수(noninteger)일 때 시계열 $\{X_t\}$는 매우 천천히 감소하는 자기 공분산 함수라는 장기 기억의 속성을 갖게 된다.

Mandelbrot 와 Van Ness(1968) 에 의해 제시된 Fractional Brownian Motion(FBM)은 확산 모형의 일반적 형태로 장기 기억 속성을 해석하였다. 공간상에서 FBM을 따르는 랜덤 입자의 시점 t에서의 위치를 $X(t)$라고 하면, 시간에 따른 도달 영역(covered range)은 아래 식과 같이 표현된다.

$$X(t) - X(t_o) \approx C \times |\, t - t_o \,|^{H} \quad \text{for } t \ge t_o \qquad (2.3)$$

표준 브라운 운동(Standard Brownian Motion; SBM)은 랜덤 입자의 도달 영역이 시간의 제곱근에 비례한다는 Einstein의 확산이론에 근거하므로 SBM은 (2.3)식에서 H=0.5 인 FBM 의 특수한 한 경우로 해석될 수 있다. (2.3)식에서 도달 영역의 분산을 보면,

1. 주로 사용되어지는 분석 기법은 BDS 검정법, 상관차원 추정법, Lyapunov 지수 추정법 등이며, 이러한 실증 분석의 결과들은 Abhyankar *et al.*(1997) 참조.

$$Var(X(t)-X(t_o)) \approx |\,t-t_o\,|^{2\times H} \qquad (2.4)$$

과 같이 표현된다. 이 때 H를 Hurst 지수라고 하며 이 지수의 크기에 따라 확산 과정의 특성[2]이 나뉘어 지게 되므로 Hurst 지수를 장기 기억의 정도를 나타내는 지표로 이용할 수 있는 근거가 되며, R/S 분석기법 또한 식(2.3)에서 도달 영역의 거리를 측정함으로써 장기 기억 속성의 존재를 검정하게 된다.

3. R/S 분석과 Hurst 지수 추정

실현된 실제 시계열 자료에서 장기 기억 속성의 존재를 파악하기 위한 분석 기법으로 자기 공분산 함수를 이용하는 Durbin-Watson(DW) 검정이 전통적으로 사용되어지나, DW 검정법은 근본적으로 선형의 자기 상관 관계만을 고려하는 한계를 갖는다. 이에 비하여 R/S 분석은 제약되지 않은 일반적 형태의 랜덤 과정을 귀무가설로 하는 검정 통계량을 제시하고 있으므로 최근의 비선형 자기 의존성에 대한 논의와 보다 부합된다고 할 수 있다.

R/S 분석은 장기 기억 속성의 존재를 통계적으로 검정하기 위한 V_n 검정 통계량과, 기억의 지속 정도를 측정하기 위한 Hurst 지수 추정법으로 나눌 수 있으며 최근 Lo(1991)에 의하여 수정된 검정 통계량이 제시되었다.

3-1. 고전적 R/S 분석

Hurst(1951)는 장기 기억 속성의 본질을 편이된 램덤(biased random)으로 파악하여, FBM 이라는 확장된 개념의 브라운 운동을 적용하였다. 식(2.3)에서 제시된 랜덤 입자의 도달 가능 영역을 실현된 시계열로부터 직접 측정하기 위하여 아래의 검정 통계량을 정식화하였다.

시계열 $\{X_t\}$, $t=1,\cdots,N$ 에서 n 시간 간격 동안 랜덤 입자의 도달 영역, R_n은 다음과 같이 측정된다.

$$R_n \equiv \max_{1\le u\le n}\left\{\sum_{j=1}^{u}(X_j-\overline{X}_n)\right\}-\min_{1\le u\le n}\left\{\sum_{j=1}^{u}(X_j-\overline{X}_n)\right\}$$
$$;\ \overline{X}_n=\frac{1}{n}\sum_j X_j \qquad (3.1)$$

n 기간 동안의 표본 표준편차를 S_n이라고 하면 R/S 분석의 검정통계량 $\widetilde{V}_n$은 다음과 같이 정의되며, 귀무가설 하에서 점근적으로 표준 브라운 운동의 평균과 분산을 따르게 된다.

H_0 : 오차항이 백색잡음 과정[3]

$$\widetilde{V}_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\widetilde{Q}_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\{R_n/S_n\}\ \underset{\sim}{A}\ SBM \qquad (3.2)$$

가설 검정을 위한 기각역은 SBM 가정하에서의 점근적 평균과 분산에 의해 결정되며, Feller(1951)에 제시되어 있다.

3-2. 수정된 R/S 분석

고전적 R/S 분석에서 귀무가설의 기각이 직접적으로 장기 기억 속성의 존재를 의미하는 것은 아니다. 예를 들면 자기 회귀 형태의 단기 기억 과정에 의해서도 귀무가설이 기각될 수 있으므로, 장기 기억 속성의 존재를 단순 대립가설로 설정하기 위해서는 이러한 단기 기억의 영향력을 제거하여야 한다.

Lo(1991)는 표본 표준편차의 추정에서 단기 기억의 영향력을 반영하여 아래와 같이 수정된 형태의 표본 표준편차에 대한 추정량을 제시하였다.

$$\widehat{\sigma}_n^2(q) \equiv \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j-\overline{X}_n)^2 + \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{q}\omega_j(q)\left\{\sum_{i=j+1}^{n}(X_i-\overline{X}_n)(X_{i-j}-\overline{X}_n)\right\}$$
$$= s_n^2+2\sum_{j=1}^{q}\omega_j(q)\,\widehat{\gamma}_j,\quad \omega_j(q)\equiv 1-\frac{1}{q+1} \qquad (3.3)$$

검정통계량 $V_n(q)$는 다음과 같다.

$$V_n(q)=\frac{1}{\sqrt{n}}Q_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\{R_n/\widehat{\sigma}_n(q)\}\ \underset{\sim}{A}\ SBM \qquad (3.4)$$

3-3. Hurst 지수 추정

(2.3)식의 Hurst 지수(H)는 시계열에서 기억의 지속 정도(duration of memory)를 의미하며, 혼돈이론에서의 Lyapunov 지수와 유사한 의미를 지닌다 (Peters(1994)). 추정을 위하여, (2.3) 식은

$$(R/S)_n = c\times n^H \qquad (3.5)$$

과 같이 쓰여질 수 있으며, 최소자승법(OLS)을 이용하여 아래와 같이 추정한다.

$$\log(R/S)_n=\log(c)+H\times\log(n) \qquad (3.6)$$

그러나 지수 추정에 있어서도 역시 단기 기억의 영향력은 존재하게 되므로, 본 논문에서는 다음과 같이 수정된 Hurst 지수 추정 방법을 사용하였다.[4]

$$\log(R/\sigma_n(q))=\log(c)+H\times\log(n) \qquad (3.7)$$

Hurst 지수 추정의 결과, 장기 기억 속성이 존재하는 구간에 대해서 장기 기억의 지속 정도를 의미하는 비주기적 싸이클(non-periodic cycle)의 평균 주기 값을 그래프를 이용한 방법으로 다시 추정해 본다.

4. 실증 분석

R/S 분석을 이용한 장기 기억 속성에 관한 대표적 실증 연구로는 Peters(1989)가 있으며 S&P500 지수와 30년 만기 국공채 가격 변화에서 장기 기억 속성을 검정하였다. Lo(1991)의 수정된 R/S 분석에 대한 연구 이후, Chow *et al*(1995)는 12개 개별 주가의 포트폴리오에 대해 실증 분석하여 일월 효과(January effect)와 같은 비정상 재무 현상을 분석하였다. 실증 분석 결과는 대상 자료에 따라 상이한 결과를 보인다.

실증 연구에서는 분석 자료의 선택이 중요하며, 특히 비선형, 비모수적 방법으로 장기 기억 속성을 추정하기 위해서는 관측, 또는 측정 오차에 의한 잡음이 적으며, 비교적 오랜 기간 동안 동일한 기준으로 측정된 시계열 자료이어야 한다. 본 실증 연구에서는 이러한 요구 조건에 부합되며, 미국 주식 시장의 전반적인 움직임을 나타낼 수 있는 시계열 자료로 NYSE의 보통주 가격 지수인 복합 지수(composite index)의 일별

2. H=0.5 : C(t)가 0이 되며, 상관관계가 0인 SBM.
   0<H<0.5 : C(t)가 음수, 평균회귀과정이라 불리운다.
   H>0.5 : C(t)가 양수, 장기기억과정이라 불리운다.
3. 보다 엄밀한 정의는 4개의 조건으로 이루어진 복합 귀무가설이며 Lo(1991) p.1282 참조.
4. Peters(1994)에서는 Brock의 잔차항 검정법을 응용하여 사전적으로 AR 모형을 적용한 후 그 잔차항에 대해 지수 추정을 하였다.

자료를 이용하였다.

복합 지수는 1965년 12월 31일을 기준 50으로 하여 NYSE에서 거래되는 모든 보통주의 총 시장 가치에서 자본 구조 변동의 영향력을 제거하여 순수한 가치의 변화를 보고자 하는 지수이다. 본 논문에서는 1966년 1월 3일에서부터 1998년 7월 14일 까지 총 8191개의 주가에 대한 일별 수준 자료를 로그 차분하여 총 8190개의 로그 수익률으로 전환하여 분석하였으며, 자료에 대한 기초 통계량은 다음과 같다

<표 4-1> 시계열에 대한 기초 통계량

크기	평균	표준편차	왜도 (skewness)	첨도 (kurtosis)	P-value
8190	0.0003	0.008554	-2.0266	52.088	0.0013

주식 수익률의 특성상 두꺼운 꼬리 분포를 보이며, 단위근 검정을 포함한 선형 시계열 분석 결과 $I(0)$의 백색 잡음 과정에 가까운 안정적 시계열로 추정되었으며, 추세요인도 존재하지 않는다.

시차 50까지의 자기 공분산 구조는 시차 1에 대해서만 약간의 상관관계를 보이며 그 이상의 시차에 대해서는 상관관계가 거의 나타나지 않는다.

4-1. R/S 분석

<표 4-2>에 각각의 구간에 대한 고전적 R/S 방법에 의한 검정 통계량 추정치, $\tilde{V}_n$과 수정된 방법에 의한 추정치, $V_n(q)$ 를 같이 제시하고 그 차이값을 백분율(%-bias)로 표시하였다.

시계열 전 구간에 대한 R/S 분석 결과 5% 유의수준 하에서, 장기 기억 속성이 존재하지 않는다는 귀무가설을 기각할 수 없었다. 이러한 결과는 시장 내의 급격한 구조 변화에 기인한다고 볼 수 있으므로 구조 변화 시점을 중심으로 전체 자료를 [구간 I]과 [구간 II]의 두 구간으로 나누어 분석하였다.[5]

부분 구간에 대한 분석에서는 완만한 성장세를 나타내던 초기 구간, [구간 I]에서는 5% 유의수준에서 통계적으로 유의하게 장기 기억 속성이 존재하는 것으로 나타났으며, 급격한 성장세를 나타내던 [구간 II]에서는 이러한 장기 기억의 영향력이 더 이상 나타나지 않는 것으로 분석되었다.

이렇게 구간에 따라 선별적으로 검정된 장기 기억 속성이 단순히 선형의 단기 기억에 의한 오염이 아닌지를 파악하기 위하여 식 (3.3)을 이용하여 표준편차 항에서 단기 기억의 영향력을 제거한 후 수정된 검정 통계량, $V_n(q)$를 추정하였다. 수정된 통계량에서 단기 기억이 유지되는 최대 시차를 의미하는 모수 q 값을 사전적으로 정할수 있는 기준은 제시되지 않았으므로, 시차(q)에 대한 민감도를 알아보기 위하여 q 값을 1~200 으로 증가시켜 가며 분석해 보았다. 분석결과 수정된 표준편차 추정치는 시차에 대해 거의 민감도를 나타내지 않는 것으로 파악되었으므로 본 논문에는 한 예로 q=30인 경우만 제시하였다.

<표 4-2> R/S 분석[6]

	전 구간	구간 I	구간 II
Size	8190	5460	2730
$\tilde{V}_n$	1.523153	*1.766879	1.164443
$V_n(30)$	1.523144	*1.766864	1.166578
%-bias	0.0006	0.0008	-0.183

(* 표시는 5% 유의수준[7]에서 기각)

표에서 보는 바와 같이 수정된 검정 통계량 값이 고전적 통계량에 비해 거의 차이가 없는 것으로 추정되며, 이는 단기 기억의 영향력은 존재하지 않음을 의미한다. 정리하면 시장이 전반적으로 안정세를 보이던 초반부에는 장기 기억의 속성이 존재하며, 급격한 상승세를 보이고 있는 최근의 시장 상황에는 장기 기억의 속성이 존재하지 않는다고 볼 수 있다.

Lobato 와 Savin(1997)는 시계열의 불안정성(nonstationarity)과 집계(aggregation)에 의해 가성적(spurious) 장기 기억 속성이 나타날 수 있음을 경고하고 있으므로 자료 선택과 가공 과정에 주의를 요한다. 본 논문의 분석 자료는 안정적 시계열로 판별되었으며, 일별 자료라는 측면에서 집계의 영향력도 비교적 적을 것으로 생각된다.

4-2. Hurst 지수 추정

앞에서 검정된 장기 기억의 지속 정도를 측정하기 위하여 Hurst 지수를 추정하고, 비주기적 싸이클의 평균 주기 값을 그래프를 이용하여 추정하였다. 지수 추정은 식(3.6) 모형과 식(3.7) 모형을 이용하였으며, 결과는 R/S 분석 결과와 일치한다. 각 방법에 대한 OLS 추정치는 <표 4-3>과 같다.

<표 4-3> Hurst 지수 추정치

	전 구간	구간 I	구간 II
Classic	0.54726	0.57096	0.51753
Modified	0.53370	0.55783	0.47784
%-bias	2.5408	2.3538	8.3061

단기 기억의 영향력이 R/S 분석의 결과에 비해 약간 크게 나타나며 이는 지수 추정이 그 기법상 자료의 크기에 영향을 많이 받기 때문으로 보여진다. 그러나 분석 결과는 R/S 분석과 동일하다.

<그림 4-1>은 장기 기억의 속성이 유의적으로 나타나는 [구간 I]에서 *Log(R/S)* 와 *Log(n)* 의 관계를 그래프화 한 것이며, 이 그래프에서 기준선(H=0.5)과의 기울기를 비교해 보면 $Log(n)\approx 3.05$ 에서부터 기울기가 0.5로 꺽어짐을 알 수 있다. 이렇게 그래프를 이용한 정성적 방법으로 비주기적 싸이클의 평균 주기값에 대한 근사적 추정치를 구할 수 있다(Peters (1994)). 본 논문의 추정 결과에 의하면, NYSE 일별 복합 지수는 약 1140일(약 4년 6개월)의 평균적 주기를 갖는 것으로 해석될 수 있다.

---

5. 1987년 Black Monday를 중심으로 완만한 성장세의 [구간 I]과 가파른 성장세의 [구간 II]로 나누었으며, 이렇게 전체 구간을 부분 구간으로 나누어 분석하는 것은 Lo(1991)의 방법론을 차용한 것이다.

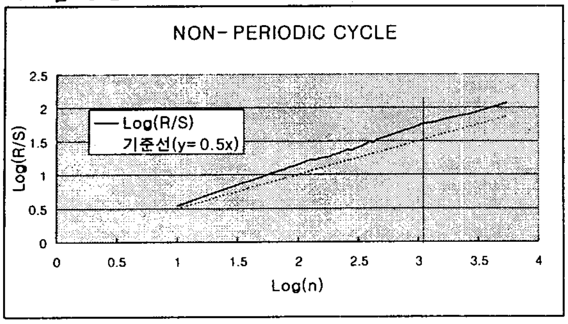
   [구간 I] 1966. 1/3 ~ 1987. 9/24 : N=5460
   [구간 II] 1987. 9/24 ~ 1998. 7/14 : N=2730

   선형 상관관계 분석에서도 [구간 I]에서는 시차 1에 대해 유의한 양의 상관관계가 나타났으며, [구간 II]에서는 상관관계가 없는 것으로 검정되었다.

6. %-bias = [$\tilde{V}_n / V_n(30)-1$]*100

7. 자세한 임계치는 Feller(1951) 참조.
   $P(V<v)=0.95$; $v=1.747$

<그림 4-1>



4-3. 변동성(Volatility)에 대한 분석

재무 시계열 분석에서는 전통적으로 변동성(volatility)에서의 계열 의존성(serial dependency)을 강조해 왔으며 이는 특히 주식 수익률의 변동에서 특징적으로 나타나는 조건부 분산의 군집 현상으로 대표되기도 한다. 이러한 현상이 R/S 분석에서 어떻게 해석될 수 있는지 알아보기 위하여 시점 별 수익률의 제곱항의 변화에 동일한 분석을 적용하였다.

<표 4-4> 변동성에 대한 R/S 분석

	전 구간	구간 I	구간 II
Size	8100	5400	2700
$\tilde{V}_n$	0.07491	0.07611	0.11544
$V_n(30)$	0.02421	0.02567	0.03456
Hurst_classic	0.12361	0.11157	0.14545
Hurst_modified	0.11120	0.09367	0.12745
%-bias	11.16	19.11	14.12

<표 4-4>를 보면 검정 통계량 값이 매우 작으며, Hurst 지수의 추정치가 {0, 0.5} 구간임을 보아 변동성의 변화는 전형적인 평균 회귀 과정을 나타냄을 알 수 있으며, 이는 기존의 연구 결과[8]와 부합하는 결과이다. 또한 가격 수준에 대한 분석에 비해 고전적 방법과 수정된 방법의 차이가 매우 크게 나타나므로 이는 변동성 시계열에 나타나는 평균 회귀의 특성이 단기 기억에 의한 것임을 시사한다.

V. 결론

지금까지 비선형성 연구의 일환으로 시계열 내에 존재하는 장기 기억의 속성에 대해 고찰해 보고 실현된 실제 시계열로부터 이러한 속성의 유무를 검정할 수 있는 여러 가지 방법론들을 소개하였다. 그리고 이러한 추정 및 검정 기법들을 NYSE 일별 복합 지수에 적용하여 실증 분석해 보았다.

미국 주식 시장의 전반적 움직임을 대표할 수 있는 NYSE 복합 지수의 최근 30년 자료를 분석해 보면 1987년 Black Monday를 기준으로 뚜렷한 구조 변화를 보이고 있음을 알 수 있다. 변화 이전 첫 번째 구간은 약 20년 동안 지수 50에서 100사이의 안정적 변화를 보이는 구간이며, 두 번째 구간은 최근 10년 사이에 지수 700 이상의 급성장을 이룬 구간이다.

본 실증 분석의 결과, 이 두 구간 사이에는 안정에서 가파른 성장이라는 추세의 변화 뿐만 아니라 장기 기억이라는 속성의 유무에 대한 뚜렷한 차이를 보인다. 효율적 시장 가설 하에서 주식 가격의 움직임은 랜덤 워크 과정을 따르게 되며, 이는 반대로 주식 수익률의 움직임이 독립 과정에서 멀어질수록 시장이 비효율적임을 의미하는 것으로 해석될 수 있다. 이러한 관점에서 본 실증 분석의 결과가 실제 주식 시장에 대해 갖는 함의는 대폭락과 시장 규모의 급격한 확대 등을 거치면서 주식 시장이 보다 효율적인 체제로 전환되어 왔다는 것이다.

통계적 방법론 측면에서 R/S 분석 기법은 다양한 형태의 대립 가설에 대해 매우 안정적인 검정력을 보이며, 비현실적인 가정들을 전제하지 않는다는 점이 큰 장점이나 그 응용 면에서 비모수적 방법론의 특성상 자료 의존적이라는 한계를 갖는다. 특히 비주기적 싸이클의 평균 주기 추정치는 일반적인 비선형 예측 모형의 구축 과정에 기여할 수 있을것으로 생각되나, 그 추정 방법이 엄밀하지 못하고 이론적 배경이 약하다는 점에서 향후 많은 관련 연구가 필요할 것으로 보인다. 또한 비선형성 연구의 다른 한 분야인 확정적 혼돈 이론에서 제시하는 Lyapunov 지수와 본 연구의 Hurst 지수는 유사한 의미를 지닌 개념이나, 아직 엄밀한 수학적 관계가 규명되지 않은 상태이다.

8. Peters, E. E. (1994)

<참고문헌>

Abhyankar, A., L. S. Copeland, and W. Wong, 1997, "Uncovering nonlinear structure in real-time stock market indexes: The S&P 500, the DAX, the Nikkei 225, and the FTSE- 100," *Journal of Business & Economic Statistics*, 15, 1, 1-14.

Chow, K., K. Denning, S. Ferris, and G. Noronha, 1995, "Long-term and short price memory in the stock market," *Economic Letters*, 49, 287-293.

Feller, W., 1951, "The asymptotic distribution of the range of sums of independent random variables," *Annals of Statistics*, 14, 517-532.

Granger C., and R. Joyeux, 1980, "An introduction to long memory time series models and fractional differencing," *Journal of Time Series Analysis*, 1, 15-29.

Hurst, H., 1951, "Long term storage capacity of reservoirs," *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 116, 770-799.

Lo, A. W., 1991, "Long-term memory in stock market prices," *Econometrica*, 59, 5, 1279-1313.

Lobato, I., and N. E. Savin, 1997, "Real and spurious long memory properties of stock market data," Preprint, Department of Economics, University of Iowa.

Mandelbrot, B., 1971, "When can price be arbitraged efficiently? A limited to the validity of the random walk and martingale models," *Review of Economics and Statistics*, 53, 225-236.

Mandelbrot, B., and J. Van Ness, 1968, "Fractional Brownian motion, fractional noise and applications," *S.I.A.M. Review*, 10, 422-437.

Peters, E. E., 1989, "Fractal structure in the capital market," *Financial Analysts Journal*, 7-8, 32-37.

Peters, E. E., 1994, *Fractal market analysis: Applying chaos theory to investment and economics*, John Wiley & Sons, Inc. 2nd ed.