

무한요소를 이용한 반무한영역의 추계론적 유한요소해석

Stochastic FE analysis of semi-infinite domain using infinite elements

최창근* 노혁천**
Choi, Chang-Koon Noh, Hyuk-Chun

ABSTRACT

In this paper the stochastic analysis of semi-infinite domain is presented using the weighted integral method, which is expanded to include the infinite finite elements. The semi-infinite domain can be thought as to have more uncertainties than the ordinary finite domain in material constants, which shows the needs of and the importance of the stochastic finite element analysis. The Bettess's infinite element is adopted with the theoretical decomposition of the strain matrix to calculate the deviatoric stiffness of the semi-infinite domains. The calculated value of mean and the covariance of the displacement are revealed to be larger than those given by the finite domain assumptions giving the rational results which should be considered in the design of structures on semi-infinite domains.

1 서론

공학적인 문제의 수치해석을 위한 가장 유용한 방법의 하나인 유한요소법(finite element method)은 요소기반의 해석 방법으로서 재료 및 기하학적 특성치들은 확정론적(deterministic) 값들을 가지는 것으로 가정한다. 이러한 가정은 토목은 물론 기타 분야에서 사용되는 재료 및 해석대상구조의 기하학적인 형상에서 나타나는 불확실성(uncertainty 또는 임의성 randomness)을 고려할 경우 매우 근사적인 가정이라는 것을 생각할 수 있다. 일례로 콘크리트 시편에 대한 실험을 수행할 경우 얻어지는 압축강도는 시편마다 편차를 가지게 마련이다. 해석에 사용되는 콘크리트 시편에 대한 확정론적인 값은 이들 시편편의 실험결과에 대한 통계처리과정을 통하여 얻어진다. 그러나 시편과 동일한 조건하에서 완성된 콘크리트 재료를 사용한 구조라고 하더라도 구조체 내의 모든 영역에서 실험을 통해 결정된 확정론적인 값을 가지지는 않을 것이라고 가정하는 것은 직관적이거나 경험적인 관점에서 타당성을 가지고 있다고 할 수 있다.

구조체에 개입될 수 있는 불확실성은 재료탄성계수(Elastic modulus) E 와 포아송비(poisson's ratio) ν 등의 재료적 불확실성과 보(beam) 부재의 단면적 A 나 평판/셸의 두께 t 등의 기하상수의 불확실성 그리고 작용하중의 불확실성을 들 수 있는데 이들은 공간적 및 시간적인 불확실성(temporal uncertainty)을 가질 수 있다[10]. 추계론적해석(stochastic analysis)은 이러한 불확실성을 해석변수로 설정하고 이들의 영향을 고려한 구조물의 반응변화도(response variability)를 얻는 것을 목적으로 하는 확률론적 해석방법이다. 추계론적 유한요소해석(Stochastic FEM:SFEM)은 유한요소해석에 의한 추계론적해석으로 최근의 많은 연구들은 해석인수 중 가장 중요한 인수의 하나인 재료탄성계수의 공간적인 불확실성을 고려한 해석이 주를 이루고 있다[4-6,8-10].

추계론적 유한요소해석법의 하나인 가중적분법(weighted integral method)은 유한요소 중 CST 요소에만 적용 가능하던 것[9]을 일반적으로 사용되는 평면요소와 평판 등에 적용할 수 있도록 확장되었다[9,10]. 본 연구에서는 가중적분법을 반무한영역에 확장 적용하였다.

* 한국과학기술원 토목공학과 석좌교수

** 한국과학기술원 토목공학과 박사과정

2 응답변화도와 분산계수

무한영역에 대한 추계론적 해석의 중요성은 다음과 같다. 첫째로, 영역이 광범위하여 입력에 대한 출력의 값이 유한한 영역의 그것보다는 일반적으로 크다고 할 수 있고 이에 따라 응답변화도(response variability) 또한 큰 값을 얻게 된다는 것이다. 둘째로, 대상 영역이 넓어짐에 따라 개입되는 해석인자의 공간적(spatial) 불확실성(uncertainty)이 증가한다는 것이다. 이러한 불확실성이 크다는 것은 추계론적 해석의 필요성이 증대함을 의미한다.

추계론적 유한요소해석을 통해서 얻고자 하는 것은 해석 대상의 응답변화도이다. 응답변화도는 해석인수의 공간적/시간적인 임의성에 의해서 나타나며 분산(covariance)으로 표현된다. 분산은 그 자체로는 의미를 알 수 없으므로 일반적으로 평균에 대한 상대값인 분산계수(coefficient of variation : COV)로 나타낸다.

$$\alpha_x = \left[\frac{\text{Var}(X)}{E[X]^2} \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{\sigma_x}{X_0} \quad (2.1)$$

위의 식에서 X_0 는 확률변수 X 의 평균값을 나타내며, σ_x 는 확률변수 X 의 표준편차를 나타낸다.

3 가중적분법(Weighted Integral Method)

이 방법은 임의장을 표현하는 임의장함수 $f(x)$ 와 확정론적 함수 $t(x)$ 의 곱에 대한 주어진 영역에서의 적분을 이용한다. 적분을 통하여 얻은 값은 식 (3.1)과 같이 하나의 확률변수 X 가 된다.

$$X = \int_{\Omega'} f(x)(x) d\Omega^e, \quad x \in \Omega^e, \quad \Omega^e \subset \Omega_{str} \quad (3.1)$$

본 연구에서 임의장(random field)로 가정하는 대상은 재료탄성계수인 E 값이다. 구조계의 한 점 x 에서의 재료탄성계수의 값은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$E(x) = E_0 [1 + f(x)], \quad x \in \Omega_{str} \quad (3.2)$$

여기에서 E_0 는 탄성계수의 평균값을 나타내고 $f(x)$ 는 임의장을 나타내는 함수로 공간상의 x 좌표에 따라 다른 값을 가지는 함수이다. 함수 $f(x)$ 는 재료탄성계수가 음의 값을 가지는 모호성을 배제하기 위해서 -1보다 큰 값을 가져야 하고 평균값은 0이 되는 함수이다($E[f(x)]=0$). 이 함수는 해석자가 수식화 할 수 없는 함수로, 단지 임의 두 점에서의 이 함수의 곱에 대한 평균치로 정의되는 auto-correlation 함수를 가정할 수 있을 뿐이다. 본 연구에서는 식 (3.3)의 auto-correlation 함수를 사용하였다.

$$R_f(\xi_1, \xi_2) = \sigma_f^2 \exp\left\{-\frac{|\xi_1| + |\xi_2|}{d}\right\} \quad (3.3)$$

여기에서 ξ_1, ξ_2 는 상대거리 벡터 ξ 의 x, y 방향의 성분을 나타내며, d 는 상관관계거리(correlation distance)로서 임의장의 주파수 특성을 내포하는 인수이다.

4 무한영역과 무한요소

유한요소법을 사용한 무한영역 또는 반무한영역에 대한 해석은 작용하중의 영향이 미치지 않을 것으로 예상되는 경계를 택하여 그 부분까지를 유한요소로 모델링하여 해석하는 방법이 주로 사용되었고, 이 외에 경계적분법, 지수함수 형태의 좌표계로의 변환을 이용한 방법 그리고 경계요소를 사용하는 방법 등이 적용되어왔다[1]. 본 연구에서는 무한영역의 해석을 위하여 무한요소를 사용하고자 한다. 사용하고자 하는 요소는 일반

적인 유한요소를 무한영역으로 확장한 것으로 Bettess 에 의하여 제안되었다.

4.1 무한요소

사용한 무한요소는 다음과 같이 감소함수(decay functions)를 포함하는 형상함수를 가지고 있다.

$$N_i(\xi, \eta) = d_i(\xi, \eta) M_i(\xi, \eta) \quad (4.1)$$

여기에서, M_i 는 유한요소의 형상함수이고 N_i 는 무한요소의 형상함수를 나타낸다. 함수 d_i 는 감소함수(decay function)로서 이 함수는 그 자신의 절점에서 단위값을 가져야 한다. 본 연구의 경우 무한점에서의 변위의 값은 0 이라고 가정할 수 있으므로 형상함수는 무한점에서 0의 값을 나타내야 한다. 무한요소에 사용되는 감소함수의 형태는 여러 가지가 사용될 수 있으나 사용 가능한 감소함수의 형태와는 관계없이 형상함수에 대한 미분은 식 (4.2)와 같이 표현된다.

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi_k} = \frac{\partial M_i}{\partial \xi_k} d_i + M_i \frac{\partial d_i}{\partial \xi_k}, \quad k=1,2 \quad (4.2)$$

무한요소의 정의에 사용된 감소함수 d_i 는 다음과 같은 형태를 사용하였다.

$$d_i(\xi, \eta) = \left(\frac{\xi_i - \xi_o}{\xi - \xi_o} \right)^n \left(\frac{\eta_i - \eta_o}{\eta - \eta_o} \right)^n \quad (4.3)$$

여기에서 아래첨자 o 를 가지는 값은 무한영역의 반대방향에 위치하는 값이며, n 은 형상함수 M_i 에서의 차수보다 큰 차수의 값을 사용한다. 식 (4.1)에서 보듯이 무한요소의 형상함수는 유한요소의 그것과 다르므로 수치적분을 위하여 새로운 적분점과 가중치를 필요로 한다. 본 연구에서는 유한요소의 적분에 사용되는 적분점을 무한요소에 적용할 수 있도록 수정된 새로운 적분점 g_p 와 가중치 w_x 를 다음과 같이 사용한다[1].

$$g_p = \frac{2\xi}{1-\xi}, \quad w_x = w_{xp} \frac{2}{(1-\xi)^2} \quad (4.4)$$

5 추계론적 유한요소해석을 위한 정식화

본 연구는 무한영역의 재료 탄성계수 E 의 공간적 임의성을 고려한 추계론적 유한요소해석에 대한 것으로 재료탄성계수에 대한 공간적 임의성은 식 (3.3)과 같이 가정하였다. 임의장함수 $f(x)$ 는 균질(homogeneous)이며, Gauss 분포를 가지는 함수로 가정한다.

5.1 요소강성행렬의 구성

식 (3.2)를 응력-변형률 행렬 D_e 의 탄성계수 식에 대입하면 요소강성행렬은 식 (5.1)과 같이 평균강성 K_o^e 와 임의장 함수를 포함한 부분인 ΔK^e 의 두 부분으로 분해된다.

$$\begin{aligned} K^e &= \int_{\Omega^e} B^T D_e B d\Omega^e \\ &= \int_{\Omega^e} B^T D_o B d\Omega^e + \int_{\Omega^e} f(x) B^T D_o B d\Omega^e \\ &= K_o^e + \Delta K^e \end{aligned} \quad (5.1)$$

여기에서, ΔK^e 에 포함된 B 행렬을 상수만을 포함한 행렬인 B_i 와 이 상수행렬에 곱해지는 독립인 다항식 p_i 의 곱의 합으로 쓰면 식 (5.2)와 같다. 일반 유한요소의 형상함수와 감소함수의 곱으로 표현되는 무한요소의 형상함수에 대한 미분은 전술한 바와 같이 정의된다(식 4.1,4.2). 그러므로 식 (5.2)는 일반 유한요소는 물론 무한요소에도 이론적으로 적용이 가능하다.

$$B = B_1 p_1 + B_2 p_2 + \dots + B_{N_p} p_{N_p} = \sum_{i=1}^{N_p} B_i p_i \quad (5.2)$$

여기에서 N_p 는 행렬 B에서 독립인 다항식의 수를 의미한다. 식 (5.2)를 ΔK^e 에 대입하여 정리하면 강성행렬의 변동부분은 다음과 같이 확률변수 X 의 함수가 된다.

$$\begin{aligned} \Delta K^e &= \int_{\Omega^e} f(x) B^T D_o B d\Omega^e \\ &= B_1^T D_o B_1 X_{11} + (B_1^T D_o B_2 + B_2^T D_o B_1) X_{12} + \dots + B_{N_p}^T D_o B_{N_p} X_{N_p N_p} \\ &\text{where, } X_{ij} = \int_{\Omega^e} f(x) p_i p_j d\Omega^e \end{aligned} \quad (5.3)$$

5.2 변위의 공분산

구성된 강성행렬은 확률변수 X 의 함수로 표현되었으므로 강성행렬과 하중벡터의 연산에 의하여 얻어지는 변위 또한 확률변수 X 의 함수로 가정할 수 있다. 그러므로 변위벡터 U 는 확률변수 X 에 대한 Taylor 급수로 다음과 같이 전개할 수 있다.

$$U \approx U_o + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^{N_{ni}} (X_i^e - X_i^{eo}) \left(\frac{\partial U}{\partial X_i^e} \right)_E \quad (5.4)$$

여기에서 N_{ni} 는 확률변수 X 의 수, N_e 는 구조계의 요소의 수를, X_i^{eo} 는 확률변수 X 의 평균값을 의미하며, $(\bullet)_E$ 는 X_i^{eo} 에서의 연산을 의미한다. 변위벡터 U 의 확률변수 X 에 대한 편미분을 구하여[4,9,10] 위의 식을 정리하면 식 (5.5)를 얻을 수 있다.

$$U \approx U_o - \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^{N_{ni}} X_i^e K_o^{-1} \left(\frac{\partial K}{\partial X_i^e} \right)_E U_o \quad (5.5)$$

식 (5.5)로부터 변위의 평균과 공분산은 다음과 같다.

$$E[U] = U_o \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} &Cov[U, U] \\ &= E[(U - U_o)(U - U_o)^T] \\ &= \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{e2=1}^{N_e} \sum_{i=1}^{N_{ni}} \sum_{i2=1}^{N_{ni}} \left(K_o^{-1} \frac{\partial K}{\partial X_i^{e1}} U_o U_o^T \left(\frac{\partial K}{\partial X_{i2}^{e2}} \right)^T K_o^{-T} \right) E[X_{i1}^{e1} X_{i2}^{e2}] \end{aligned} \quad (5.7)$$

6 예제해석

6.1 해석 대상의 모델링

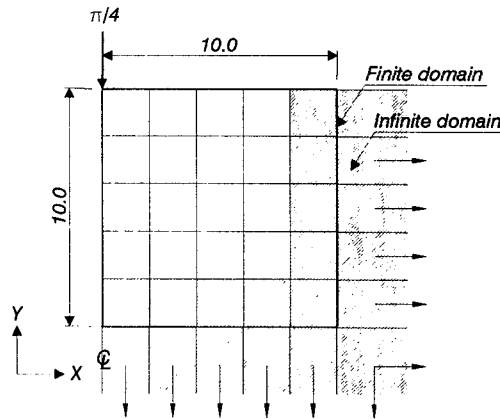


그림 6.1 반무한영역의 모델링

본 연구의 해석대상은 그림 6.1 과 같다[3]. 가로 세로 길이는 10이며 재료탄성계수 E 의 확정론적 수치는 1.0으로 설정하였다. 재료탄성계수 E 의 공간표준편차 σ_p 는 0.1로 가정하였다. 굵은 선으로 표시된 부분은 유한요소만으로 모델링되는 부분을 나타내는데 이 부분은 하중에 의하여 영향을 받는다고 가정되는 영역을 포함해야한다. 빗금친 부분은 무한요소를 사용한 모델링에서 무한요소로 모델링 될 부분으로 사용될 무한요소의 수는 빗금친 부분 내에 있는 유한요소의 개수와 같다.

해석은 위의 유한영역에 대해서 N 개의 유한요소를 사용한 해석(Model 1)과 N_1 개의 유한요소와 N_2 개의 무한요소를 혼용한 해석(Model 2)을 수행한다. 여기에서, $N=N_1+N_2$ 이다. 위의 해석대상체는 $-y$ 방향이 무한 방향이며, 그림의 평면에 수직인 z 방향으로도 역시 무한한 영역을 가지고 있다. 작용시킨 하중은 $p=\pi/2$ 로서 z 방향으로 선(line)의 형태를 가지고 있다. 이러한 구조와 하중상태는 평면-변형률의 상태이므로 평면모델링이 가능하며 y 축에 대하여 대칭이므로 반모델링이 가능하다.

6.2.2 차원 탄성 반무한체에 작용하는 선하중에 의한 이론해

위와 같은 영역에 대한 해석의 이론해는 다음과 같이 주어진다. 식 (6.1)로 표현된 이론해는 J. Boussinesq의 3차원 해로부터 Flamant에 의해서 얻어진 것이다[1].

$$v|_{x=0} = \frac{2p}{\pi E} \log_e \frac{d}{y} \quad (6.1)$$

하중은 그림 6.1과 같이 $x=y=0$ 인 점에 하향으로 작용시켰고 1/2 모델링에 의하여 $p=\pi/4$ 가 사용되었다. 이러한 가정하에서 이론해는 다음과 같다.

$$v|_{x=0} = \log_e \frac{d}{y} \quad (6.2)$$

위의 식은 하중 작용점 하부의 y 방향 변위를 나타내고 있다. 여기에서 d 는 y 방향의 변위가 발생하지 않는다고 가정되는 하중작용점으로부터의 x 방향거리를 나타낸다. 즉, 이론해는 가정되는 상수인 d 의 영향을 받

는 불확정적인 특성을 가지고 있다. 본 해석의 경우 유한요소해석과 이론치와의 결과가 잘 일치하는 d 의 값은 12.629 였다.

6.3 이론해와의 비교

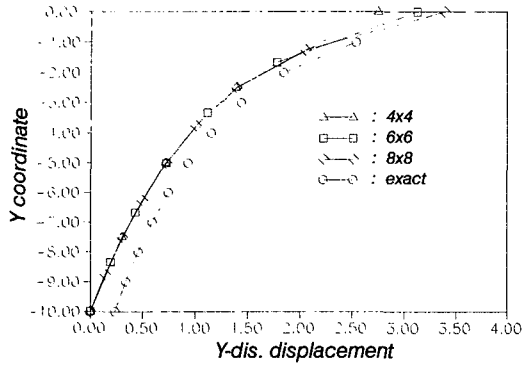


그림 6.2 Model 1 과 이론해의 비교

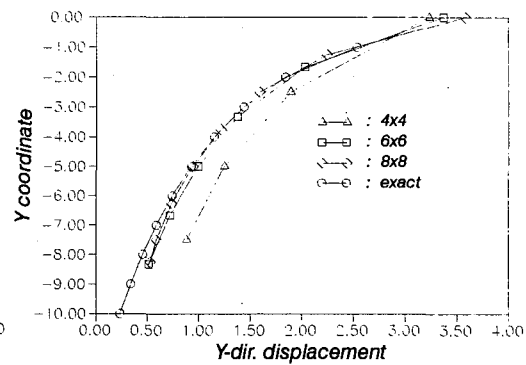


그림 6.3 Model 2 와 이론해의 비교

그림 6.2는 Model 1의 요소망을 세분화 함에 따른 해석 결과를 나타낸 것으로 그림에서 보듯이 요소망의 세분화에 따라 해석결과는 향상된다고 할 수 있지만 이론해에 가까와 지는 형식의 향상이 아니라 단지 하중작용점에서의 향상만 크게 부각되고 있다. 그리고 모든 해는 이론해에 비해서 매우 강성이 크게 평가되고 있는 특징을 나타냈다. 그러므로 단지 유한요소만으로 무한영역을 모델링 했을 경우 요소망의 세분화에 따른 해의 향상이 미우 미미하다는 것을 알 수 있다. 그림 6.3은 Model 2에 대한 해석으로 무한요소를 사용하여 모델링을 함에 의해서 해석값이 이론해에 수렴해 가는 과정을 보이고 있다. Model 1과는 달리 요소망을 세분화 함에 따라 해석 결과는 경향이나 값의 양면에서 모두 이론해에 유사해지는 좋은 결과를 보이고 있다.

6.4 해석비교

6.4.1 분산과 표준편차

본 예제의 경우 하중이 작용하는 지점은 특이점(singular point)으로 이에 대한 이론해는 이론적으로 무한대의 값을 가지게 된다. 그러므로 본 연구에서는 유한요소만 사용한 경우(Model 1)와 무한요소를 동시에 사용한 두 경우(Model 2)에 대해서 하중의 바로 아래 절점의 변위값에 대한 비교를 하고자 한다.

표 6.2 Model 1 과 Model 2 의 해석 결과 비교

y 좌표(-)	Model 1 64 유한요소			Model 2 49 유한요소+ 15 무한요소			이론해
	변위	COV	표준편차	변위	COV	표준편차	변위
1.25	-2.0521	3.6445×10^{-2}	0.0748	-2.2476	4.001×10^{-2}	0.0899	-2.3129

표 6.3 변위 비교

항목	비율		
	Model 1/Exact	Model 2/Exact	Model 2/Model 1
변위	0.8872	0.9718	1.0953
COV			1.0978
표준편차			1.2019

표 6.2와 6.3은 하중 바로 아래 절점에서의 해석 결과의 비교이다. 표 6.3에서 보듯이 mdoel 1의 경우는 이론해에 매우 근접한 결과를 보이고 반면 model 2의 경우에는 결과의 정확도가 매우 낮은 것을 볼 수 있다. 변위의 표준편차는 Model 2가 Model 1에 비하여 20%정도 증가하는 결과를 나타내었다(표 3). 이는 변위의 증가량인 9.5%에 비하여 두 배 이상 크게 나타난 결과로서 추계론적 해석의 결과에 미치는 확정론적 해석 결과의 영향이 매우 큼을 보여주고 있다. 이러한 사실은 해석대상 영역에 대한 정확한 모델링의 중요성과 함께 무한영역에 대한 추계론적 해석의 중요성을 보여주고 있다. 토목/건축구조물의 거동에 영향이 큰 영향을 미치는 하중인자의 하나는 구조물이 위치하는 지반의 거동이라고 할 수 있으므로 지반 거동의 정확한 예측은 구조물의 설계에 매우 중요한 요소라고 할 수 있다.

사용한 가중적분법은 임의장의 불확실성을 auto-correlation 함수를 사용하여 고려한다. 이 함수에 대한 적분에는 요소간의 상대거리를 고려하게 되는데 이 경우 요소 e1과 요소 e2의 상대거리는 e1이나 e2가 무한 요소일 경우 무한대로 확장되므로 무한영역을 고려한 응답의 변화도를 얻을 수 있다. 이러한 특징은 임의장을 생성하여 하나의 요소에 하나의 변수값을 대입하는 몬테카를로 시뮬레이션이나 유한요소만으로 모델링 할 경우 등에는 구현할 수 없는 것으로 본 해석의 장점중의 하나라고 할 수 있다.

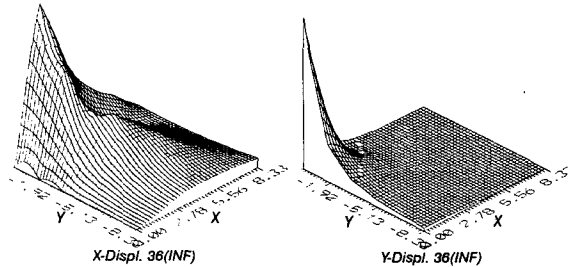


그림 6.4 변위의 공분산분포

그림 6.4는 Model 2에서 변위의 공분산분포를 나타낸 것이다. 무한요소를 포함한 모델링은 유한요소로만 이루어진 모델링과는 달리 좌측 하단에 어떤 값을 가져 무한영역에 대한 고려가 이루어지고 있음을 알 수 있다. 예상 되듯이 공분산의 최대값은 하중의 작용점에서 가장 크게 나타나고 있으며 경계부분으로 갈수록 그 값은 작아지고 있다. x 방향변위에 대한 분포도는 y 방향변위와는 다르게 약간 불규칙한 형상을 하고 있는데 이것은 x 방향에 대한 변위가 -y 좌표에 따라 음과 양의 값을 나타내기 때문이다.

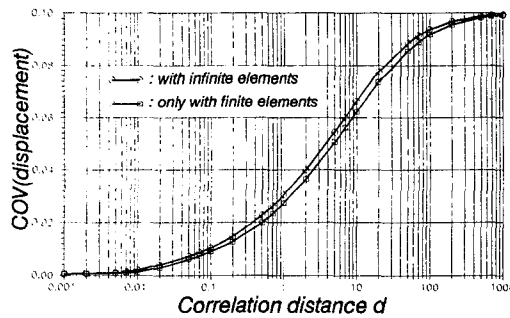


그림 6.5 상관관계거리 d에 따른 분산계수

그림 6.5는 상관관계거리 d의 변화에 따른 분산계수(C.O.V.)의 변화를 나타낸 것이다. d의 값이 크다는 것은 두 지점간의 상관관계가 크다는 것을 의미한다. 위 결과의 특징은 d의 값이 무한대로 향함에 따라 분산계수는 가정한 임의장의 표준편차인 $\sigma_f=0.1$ 로 수렴하고 있다는 것이다. d의 값이 무한대일 경우 auto-correlation

함수는 상대거리 벡터인 ξ 의 값과는 관계없이 일정한 값을 가진다.

$$\langle f(x)_1, f(x)_2, \dots \rangle = \langle c_1, c_2, \dots \rangle \quad (6.3)$$

추계론적 해석은 이들 장함수들에 대한 개별해석이고 ensemble mean의 개념을 적용하므로 이들에 대한 표준편차는 임의장의 표준편차와 같게 된다. 그러므로 $d = \infty$ 경우의 분산계수 수렴치가 가정한 추계론적 장의 표준편차인 0.1과 같게 나타나는 것이다. 그림 6.4에서 관찰할 수 있는 또 하나의 특징은 Model 2의 경우가 Model 1의 경우에 비해서 더 큰 공분산값을 나타내고 있다는 것이다. 공분산이 평균에 대한 표준편차의 비로 정의되므로 Model 2를 사용할 경우 Model 1에 비해서 더 큰 값의 표준편차를 얻을 수 있다는 것을 나타낸다. 그러므로 Model 2를 이용할 경우 보다 안전측의 해석/설계가 될 것이다.

7 결 론

본 연구에서는 무한영역에 대한 추계론적 유한요소해석을 수행하였다. 무한영역은 해석에 고려하는 해석 대상영역이 크기 때문에 개입될 수 있는 해석인자의 불확실성이 매우 크다고 할 수 있다. 특히 토목공학에서 주로 다루게 되는 무한 영역인 지반의 경우는 재료의 특성상 매우 큰 정도의 불확실성을 가지고 있다. 구조물의 설계와 해석에서 실제로 추계론적 해석의 응용이 중요한 분야는 본 대상체와 같이 해석 대상영역내의 좌표에 따른 불확실성이 큰 대상체라고 할 수 있다.

본 연구에서 사용한 예제의 모델링은 유한요소만을 사용한 Model 1과 무한요소를 조합하여 사용한 Model 2의 두 종류였다. Model 2의 결과는 이론해에 잘 일치하였고, Model 1은 상대적으로 강성이 크게 평가되어 무한영역에 대한 해석에서 무한요소의 사용이 매우 바람직한 결과를 나타냄을 알 수 있었다.

본 연구의 주된 목적인 추계론적 해석에서 Model 2는 Model 1에 비하여 20% 정도 큰 표준편차를 나타내어 실제의 구조물의 해석 및 설계에 고려해야 할 불확실성이 단순히 유한요소만을 사용했을 경우보다 매우 크다는 것을 알 수 있었다. 이러한 결과는 불확실성이 매우 크다고 할 수 있는 지반과 같은 경우에 대한 거동에 대한 보다 믿음만한 해를 얻는데 도움을 주리라고 기대된다.

참고문헌

1. P. Bettess, "More on Infinite Elements", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 15, pp.1613-1626, 1980.
2. S. Pissanetzky, "An Infinite Element and a Formula for Numerical Quadrature over an Infinite Interval", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 19, 913-927, 1983.
3. A. Curnier, "A Static Infinite Element", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 19, 1479-1488, 1983.
4. C.K. Choi and H.C. Noh, "Stochastic Finite Element Analysis of Plate Structures by Weighted Integral Method", *Structural Engineering and Mechanics, An International Journal*, Vol. 4, No. 6, pp.703-715, 1996.
5. M. Kleiber and T. D. Hein, "The Stochastic Finite Element Method"
6. M. A. Lawrence, "Basis Random Variables in Finite Element Analysis", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 24, pp.1849-1863, 1987.
7. D. E. Newland, "An Introduction to Random Vibration and Spectral Analysis", pp.25-30, 41-46, 1975.
8. E. Vanmarcke and M. Grigoriu, "Stochastic Finite Element Analysis of Simple Beams", *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 109(5), pp.1203-1214, 1983.
9. G. Deodatis, W. Wall and M. Shinozuka, "Analysis of Two-Dimensional Stochastic Systems by the Weighted Integral Method", In P. D. Spanos and C. A. Brebbia, editors, "Computational Stochastic Mechanics", 395-406, 1991.
10. 최창근, 노혁천, "사변형 요소를 이용한 추계론적 유한요소해석", *대한토목학회 논문집*, 제 13권, 제 5호, 29-37, 1993.