

Spline 유한대판법을 사용한 셸 구조물의 해석

Analysis of Shell Structures using the Spline Finite Strip Method

최창근* 홍현석**
Choi, Chang-Koon Hong, Hyun-Seok

ABSTRACT

The isoparametric spline finite strip method for degenerated shells is presented. In the formulation, both the geometry and the displacement field are represented by uniform cubic B-spline curves. Spline shell strip is degenerated stress-resultant shell with 6 dof at each node, and the penalty function method is used to incorporate the six dof.

1. 서론

유한대판법은 구조물이 한 방향으로 재료성질과 기하학적 성질이 일정한 경우, 그 방향에 대하여 요소를 세분화하지 않고 하나의 요소(strip)로 대체하여 해석하는 방법으로 주로 절판구조 및 박스 거더 교량 해석에 널리 사용되었다. 초기의 고전적인 방법에서는 변위함수를 가정함에 있어 그 방향으로는 경계조건을 미리 만족시키는 함수의 급수(주로 보 진동함수)를 사용하고 다른 방향으로서는 유한요소소에서 사용하는 다항식을 사용하였다. 1980년대 중반에 소개된 Spline 유한대판법은 스트립의 종방향 변위장을 보 진동함수 대신에 연속적인 spline 함수의 보간을 이용하여 가정함으로써 유한요소법과 같이 경계조건을 쉽게 처리할 수 있도록 하였으며 임의의 형상을 갖는 구조물의 해석도 가능하게 되었다. Spline 유한대판법은 변위장 뿐만 아니라 구조물의 기하학적 형상도 spline 함수에 의해 정의함으로써 등매개 변수 방법에 의해 Mindlin 평판과 감절점 셸의 해석에도 적용할 수 있다. 본 논문에서는 등매개 spline 유한대판법에 의한 평판 및 셸의 정식화 과정과 절점당 6 자유도를 갖는 새로운 스트립 요소를 소개하고 셸의 해석예제를 통해 그 사용성을 검증한다.

2. Spline 보간

등매개변수 spline 유한대판법은 균등한(uniform) cubic B-spline 곡선을 사용한다. B-spline 곡선은 m 개의 곡선 조각(segment)으로 구성되며 이러한 곡선은 m+3 개의 벡터와 spline 함수의 조합으로 정의 될 수 있다. 이 방법에서 균등한 cubic B-spline 곡선들은 구조물 절선(strip line)의 기하학적인 형상과 변위를 표현하는데 사용된다. 단위 길이를 갖는 B3-spline 곡선의 방정식은 다음과 같다.

$$P(y) = \sum_{i=1}^{m+1} \phi_i(y) Q_i \quad (2.1)$$

여기서, 각각의 B3-spline ϕ_i 는 4 개의 연속적인 구간에서만 0 이 아닌 값을 갖는다. 이 4 개의 구간들은 3 차의 spline 곡선으로 이루어지며 다음과 같이 정의된다(그림 2.1).

* 한국과학기술원 토목공학과 석좌교수
** 한국과학기술원 토목공학과 박사과정

$$\phi_i = \frac{1}{6h^3} \begin{cases} 0 & s \leq y_{i-2} \\ (s - y_{i-2})^3 & y_{i-2} \leq s \leq y_{i-1} \\ h^3 + 3h^2(s - y_{i-1}) + 3h(s - y_{i-1})^2 - 3(s - y_{i-1})^3 & y_{i-1} \leq s \leq y_i \\ h^3 + 3h^2(y_{i+1} - s) + 3h(y_{i+1} - s)^2 - 3(y_{i+1} - s)^3 & y_i \leq s \leq y_{i+1} \\ (y_{i+2} - s)^3 & y_{i+1} \leq s \leq y_{i+2} \\ 0 & y_{i+2} \leq s \end{cases} \quad (2.2)$$

또한, Q_i 는 곡선을 정의하는 벡터로서 곡선을 정의하는 다각형의 정점(vertices)의 위치벡터가 된다.

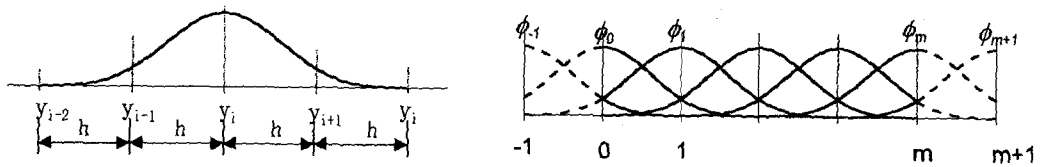


그림 2.1 (a) B3-spline (b) basis of B3-spline

3. C^0 감절점 쉘 strip 의 정식화

3.1 감절점 쉘의 기하학적 형상

C^0 감절점 쉘 요소는 Ahmad 등에 의해 제안되었고 형상은 다음과 같이 정의 될 수 있다.(그림 3.1,a)

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \mathbf{x}_i + \frac{h_i}{2} \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \mathbf{V}_i \quad (3.1)$$

여기서, $\mathbf{x}=(x,y,z)$ 는 요소내의 임의의 점에서의 전체 좌표를 나타내고 ξ 는 면의 방향의 곡선 좌표이다. 또한, \mathbf{V}_i 는 i 번 절점에서 fiber 방향의 단위 벡터를 나타낸다. 여기서 \mathbf{V}_i 는 절점 i 의 상부면과 하부면에서의 절점 좌표로부터 정의될 수 있다. 그러나, 박스 거더 혹은 I형 보와 같이 여러 쉘 부재가 접합되는 경우에는 이러한 가정에 의해 구조물 형상을 정의할 수 없게 된다. 이러한 경우에는 근사적인 방법으로 쉘 중립면의 좌표만으로 쉘의 기하학적인 형상을 정의하게 되며 기본적으로 쉘의 두께는 중립면에 수직인 방향으로 정의하고 두께 방향을 따라서 일정한 Jacobian 을 갖게 된다.(그림 3.1,b)

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \mathbf{x}_i + t \mathbf{V}_i \quad (3.2)$$

여기서 \mathbf{V}_i 는 각 적분점에서 쉘 중립면에 수직인 단위 벡터이다. 또한, t 는 $-h/2 < t < h/2$ 범위의 선형 좌표이고 h 는 적분점에서의 두께가 된다.



(a) edges in direction of \mathbf{V}_i

(b) edges normal to mid-surface

그림 3.1 감절점 쉘 요소

3.2 등매개 spline 쉘 스트립의 기하학적 형상의 정의

평면상의 임의의 형상을 갖는 쉘은 n 개의 strip 으로 분할되고 각 strip 은 m 개의 구간(section)으로 구성된다(그림 3.2). 이때, 쉘의 각 절선은 spline 함수와 곡선을 정의하는 벡터들의 보간에 의해 표현된다. 따라서, 스트립 내부의 임의 점의 위치벡터 \mathbf{P} 는 다음과 같이 근사화 된다.

$$\mathbf{P}(\xi, \eta) = \sum_{i=-1}^{m+1} \sum_{j=1}^p N_{ij}(\xi, \eta) \mathbf{Q}_{ij} \quad (3.3)$$

여기서, \mathbf{Q}_{ij} 는 strip 의 j 번째 절선(nodal line)의 i 번째 곡선을 정의하는 벡터로 \mathbf{Q}_{ij} 의 갯수는 $m+3$ 개이고 절선의 절점좌표는 $m+1$ 개이므로 \mathbf{Q}_{ij} 를 얻기 위해서는 추가적인 2 개의 정보가 필요하다([1]). N_{ij} 은 \mathbf{Q}_{ij} 와 관계된 형상함수로 spline 함수와 Lagrange 함수의 곱으로 표현된다.

$$N_{ij}(\xi, \eta) = L_j^p(\xi) \phi_i(\eta) [\mathbf{I}] \quad (3.4)$$

여기서, L_j 는 j 번째 Lagrange 다항식이다.

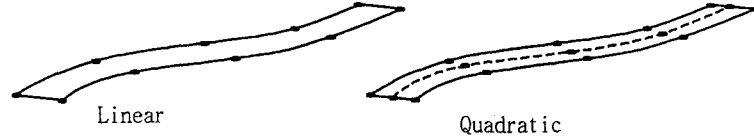


그림 3.2 임의 형상 strip 의 횡방향 Lagrange 함수에 따른 분류

3.3 국부 좌표축

쉘 스트립의 중립면은 두개의 무차원 곡선 좌표 ξ, η 에 의해 표현되고 ζ 축은 쉘 중립면에 수직이 된다. 이 곡선 좌표계는 서로 직교하지 않으며 요소내의 중앙에서 원점을 가진다. 이때, 요소 중앙에서 (r,s) 가 (ξ, η) 에 대해서 대칭을 갖도록 국부 직각 좌표계 (r,s,t) 가 구성되면 (ξ, η) 와 (r,s) 의 평면은 같은 평면상에서 정의되므로 면의 방향의 ζ 와 t 는 일치하게 된다(그림 3.3).

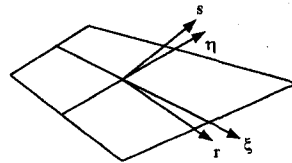


그림 3.3 자연좌표계와 대칭을 가지는 국부 좌표계

이때, 국부 좌표 (r,s,t) 에 평행한 직각 단위 벡터 $\mathbf{V}_r, \mathbf{V}_s, \mathbf{V}_t$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_r &= (\mathbf{V}_\xi \times \mathbf{V}_\eta) / |(\mathbf{V}_\xi \times \mathbf{V}_\eta)| \\ \mathbf{V}_s &= ((\mathbf{V}_t \times \mathbf{V}_\xi) + \mathbf{V}_\eta) / |(\mathbf{V}_t \times \mathbf{V}_\xi) + \mathbf{V}_\eta| \\ \mathbf{V}_t &= \mathbf{V}_s \times \mathbf{V}_r \end{aligned} \quad (3.5)$$

여기서, $\mathbf{V}_\xi, \mathbf{V}_\eta$ 는 각각 ξ, η 축에 접선인 단위 covariant 기본 벡터이고 다음과 같다.

$$\bar{\mathbf{V}}_\xi = \mathbf{x}_{,\xi}, \quad \bar{\mathbf{V}}_\eta = \mathbf{x}_{,\eta} \quad (3.6)$$

$$\mathbf{V}_\xi = \bar{\mathbf{V}}_\xi / |\mathbf{x}_{,\xi}|, \quad \mathbf{V}_\eta = \bar{\mathbf{V}}_\eta / |\mathbf{x}_{,\eta}| \quad (3.7)$$

3.4 변위장

감절점 쉘 요소는 독립적인 직선 변위와 회전 변위의 보간에 의해 변위장이 근사화 된다. 스트립 내의 점 \mathbf{P} 의 변위 δ 는 곡선을 정의하는 벡터 \mathbf{Q}_{ij} 와 관계된 변위 매개변수 \mathbf{a}_{ij} 의 항으로 표현된다.

$$\delta = \sum_{i=-1}^{m+1} \sum_{j=1}^p \mathbf{N}_{ij}(\xi, \eta) \mathbf{a}_{ij} \quad (3.8)$$

여기서, 변위 벡터 δ 와 변위 매개변수는 다음과 같다.

$$\delta = [u_x \quad u_y \quad u_z \quad \theta_x \quad \theta_y \quad \theta_z]^T, \quad \mathbf{a}_{ij} = (u_{ij}, \theta_{ij})_g \quad (3.9)$$

여기서,

$$\mathbf{u}_g = (u_x, u_y, u_z) = \text{전체 이동 변위}, \quad \Theta_g = (\theta_x, \theta_y, \theta_z) = \text{전체 회전 변위}$$

3.5 변형률

국부좌표계에서 쉘의 일반화된 면내 변형률과 휨변형률, 전단 변형률들은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \varepsilon_m &= (\varepsilon_r, \varepsilon_s, \varepsilon_{rs}) = (u_{r,r}, u_{s,s}, u_{r,s} + u_{s,r}) = \mathbf{B}_m \mathbf{a} \\ \varepsilon_b &= (\kappa_r, \kappa_s, \kappa_{rs}) = (\theta_{s,r}, -\theta_{r,s}, \theta_{s,s} - \theta_{r,r}) = \mathbf{B}_b \mathbf{a} \\ \varepsilon_s &= (\varepsilon_{rt}, \varepsilon_{st}) = (u_{t,r} + \theta_s, u_{t,s} - \theta_r) = \mathbf{B}_s \mathbf{a} \end{aligned} \quad (3.10)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_m &= \sum \sum \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{i,r} \mathbf{V}_r^T & 0 \\ \mathbf{N}_{i,s} \mathbf{V}_s^T & 0 \\ \mathbf{N}_{i,s} \mathbf{V}_r^T + \mathbf{N}_{i,r} \mathbf{V}_s^T & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_b &= \sum \sum \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{N}_{i,r} \mathbf{V}_s^T \\ 0 & -\mathbf{N}_{i,s} \mathbf{V}_r^T \\ 0 & \mathbf{N}_{i,s} \mathbf{V}_s^T - \mathbf{N}_{i,r} \mathbf{V}_r^T \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_s &= \sum \sum \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{i,r} \mathbf{V}_t^T & \mathbf{N}_i \mathbf{V}_s^T \\ \mathbf{N}_{i,s} \mathbf{V}_t^T & \mathbf{N}_i \mathbf{V}_r^T \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3.6 응력-변형률 관계

국부 좌표계에 대한 합 응력(내력)을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_m &= (N_r, N_s, N_{rs})^T = \mathbf{D}_m \varepsilon_m \\ \mathbf{R}_b &= (M_r, M_s, M_{rs})^T = \mathbf{D}_b \varepsilon_b \\ \mathbf{R}_s &= (Q_r, Q_s)^T = \mathbf{D}_s \varepsilon_s \end{aligned} \quad (3.11)$$

또한, 면내 변형률, 휨 변형률, 전단 변형률과 관계된 등방성 재료의 탄성 행렬은 다음과 같다.

$$\mathbf{D}_m = \frac{Eh}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_b = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_s = hk_s \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

여기서 E 는 탄성계수이고 ν 는 포아손 비, G 는 전단 계수, ks 는 전단보정계수로 $5/6$ 이다.

3.7 전체 포텐셜 에너지와 재료 강성 행렬

합-응력(resultant-stress) 쉘 요소의 전체 포텐셜 에너지는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\pi = 1/2 \int_A (\boldsymbol{\varepsilon}_m^T \mathbf{D}_m \boldsymbol{\varepsilon}_m + \boldsymbol{\varepsilon}_b^T \mathbf{D}_b \boldsymbol{\varepsilon}_b + \boldsymbol{\varepsilon}_s^T \mathbf{D}_s \boldsymbol{\varepsilon}_s) dA - W \quad (3.13)$$

포텐셜 에너지의 정리에 의하여 강성행렬이 다음과 같이 유도된다.

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_m + \mathbf{K}_b + \mathbf{K}_s = \int_A \mathbf{B}_m^T \mathbf{D}_m \mathbf{B}_m dV + \int_A \mathbf{B}_b^T \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b dV + \int_A \mathbf{B}_s^T \mathbf{D}_s \mathbf{B}_s dV \quad (3.14)$$

3.8 면내 회전 자유도(Drilling dof)

중립면의 면내 회전에 관계된 면내 회전 자유도는 penalty 함수에 의한 다음의 제한조건에 의해, penalty 함수가 무한대로 접근함에 따라 고체 역학에서 정의된 drilling의 정의를 만족할 수 있게 된다.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\theta = \theta_i - 1/2(u_{s,r} - u_{r,s}) = 0 \quad (3.15)$$

이때, 면내회전의 변형률 에너지에 의한 회전 강성행렬은 다음과 같이 표현된다. (Φ 는 penalty 상수)

$$\mathbf{K}_\theta = \Phi Gh \int \mathbf{B}_\theta^T \mathbf{B}_\theta dA \quad (3.16)$$

3.9 강성행렬과 하중의 변환

경계조건이 부여되는 부분의 강성행렬과 하중은 실제 경계조건을 반영하여 수정되어야 한다. i 번째 절점(knot)의 실제 변위 δ_i 는 매개변수 $\mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{i+1}$ 와 spline 값에 의해 다음과 같은 관계가 있다.

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{a}_{i-1} \\ \delta_i \\ \mathbf{a}_{i+1} \end{Bmatrix} = \mathbf{T} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_{i-1} \\ \mathbf{a}_i \\ \mathbf{a}_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_{i-1} \\ \mathbf{a}_i \\ \mathbf{a}_{i+1} \end{Bmatrix} \quad (3.17)$$

이때, 경계조건에 의해 수정된 강성행렬과 하중벡터는 다음과 같다.

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{T}^{-T} \mathbf{K} \mathbf{T}^{-1}, \quad \hat{\mathbf{F}} = \mathbf{T}^{-T} \mathbf{F} \quad (3.18)$$

4. 예제 해석

4.1 경사 경계를 갖는 곡선 슬래브 교량

그림 4.1 과 같이 경사진 단순 경계를 갖는 곡선 슬래브 교량이 각각 A,B,C 점에 단위하중이 가해졌을 때의 교량 중앙 단면에서의 수직 처짐을 비교하였다. 대부분의 결과값들은 잘 일치하고 있다.

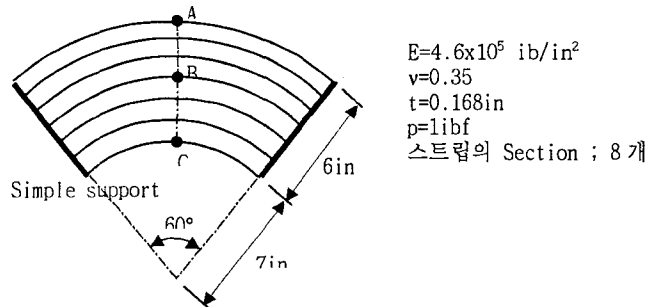


그림 4.1 곡선 슬래브 교량

표 4.1 곡선 슬래브 교량의 해석 결과

하중	반경(in)	실험		유한요소법		유한대판법	
		Coull	Sawko	Fan	Cheung	Olate	Present
A	13	0.876	0.888	0.881	0.8821	0.874	0.879
	11	0.578	0.532	0.578	0.5794	0.581	0.579
	9	0.353	0.355	0.354	0.3543	0.357	0.354
	7	0.194	0.198	0.194	0.1948	0.194	0.193
B	13	0.457	0.459	0.457	0.4578	0.460	0.457
	11	0.342	0.344	0.343	0.3428	0.348	0.342
	9	0.241	0.241	0.241	0.2412	0.247	0.241
	7	0.155	0.154	0.158	0.1554	0.158	0.155
C	13	0.195	0.194	0.194	0.1948	0.195	0.193
	11	0.163	0.163	0.164	0.1634	0.167	0.163
	9	0.157	0.150	0.151	0.1523	0.155	0.152
	7	0.169	0.168	0.169	0.1705	0.170	0.172

4.2 원통형 지붕 셀

곡면의 양단은 격벽(Diaphragm)으로 지지되고, 원통형 길이 방향으로의 가장자리는 자유지지된 원통형 지붕 셀에 자중이 작용하는 경우에 대한 해석을 수행하였다. 지붕의 중앙 단면 끝단(A 점)의 수직변위는 MacNeal 과 Harder 의 해석값인 0.3024 를 참고값(reference value)으로 사용한다.

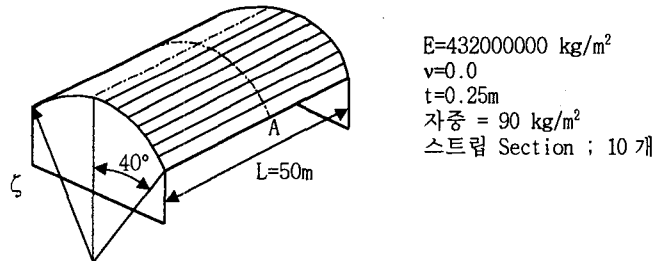


그림 4.2 Scordelis-Lo cylindrical Roof

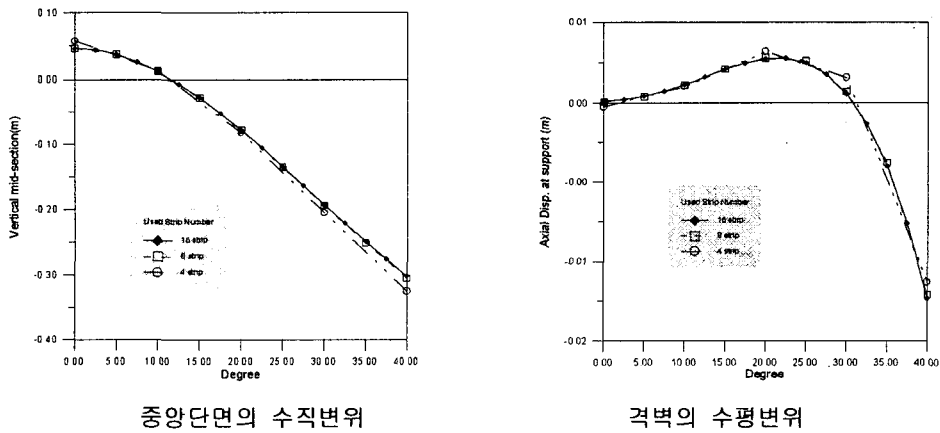


그림 4.3 스트립수에 따른 Cylindrical Roof 의 변위 비교

표 4.2 지붕 셸의 정규화된 수직변위

위치	적분차수(M.B.S)	Strip/Side			
		2	4	8	16
A 점	1x3,2x4,1x3	1.682	1.174	1.034	1.002
	2x4,2x4,1x3	1.362	1.041	0.999	0.993

4.3 집중하중을 받는 원통형 셸

셸의 중앙의 상하부에서 집중하중을 받는, 양단이 자유단인 원통형 셸을 1/4의 모델링을 이용하여 해석을 수행하였다. 해석에 사용된 스트립 요소는 8개의 등간격을 갖는 스트립을 원주 둘레를 따라 분할하여 스트립의 증가에 따른 수렴성을 검토하였다. 이 경우 하중 작용점의 수직 처짐에 대한 reference 값은 0.1139를 사용한다.

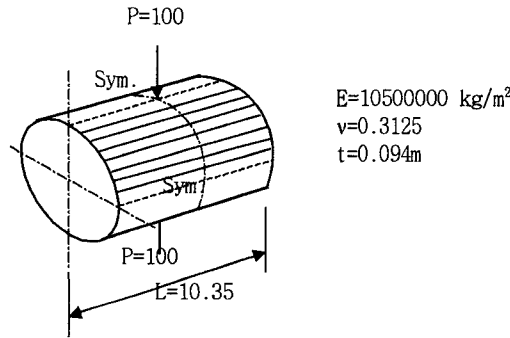


그림 4.4 양단이 자유단인 원통형 셸

표 4.3 원통 셸의 정규화된 수직변위

위치	적분차수(M.B.S)	Strip/Side			
		2	4	8	16
center	1x3,2x4,1x3	0.6353	0.8846	0.9614	0.989
	2x4,2x4,1x3	0.6350	0.8824	0.9605	0.990

4.4 비틀린 캔틸레버 보

직사각형 단면을 갖는 캔틸레버 보를 길이 방향에 대하여 90°만큼 비틀어 놓은 것으로 셸 요소의 와핑 비틀림 문제에 대한 적용성을 검증하기 위한 예제이다. 이 보에 작용하는 하중은 평면내 하중과 평면외 하중으로 나누어 해석한다. 경계조건은 한쪽은 고정된 지지조건을 갖고 다른 쪽은 자유단이다.

표 4.4 비틀린 보의 수직변위

	Integration Order		하중 작용점변위	Reference
	Membrane, bending	Shear		
면 내	1x3,2x4	1x3	0.005449	0.005424
	2x4,2x4	1x3	0.005415	
면 외	1x3,2x4	1x3	0.001897	0.001754
	2x4,2x4	1x3	0.001744	

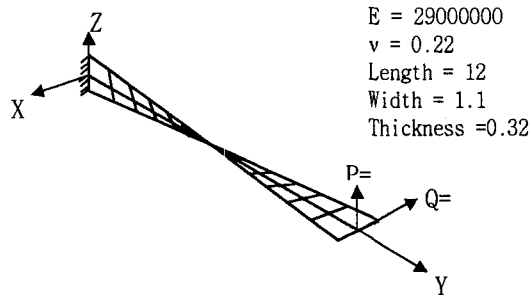


그림 4.5 비틀린 캔틸레버 보

5. 결 론

등매개 Spline 유한대판법은 균등한 3 차의 spline 함수를 변위장과 기하학적 형상의 보간함수로 사용함으로써 특별한 쉘이론을 사용하지 않고도 쉘 구조물의 해석에 적용할 수 있으며 spline 이 보간되는 방향은 고차의 함수가 연속적으로 보간 되어 지므로 유한요소 해석과 같이 많은 요소 수를 필요로 하지 않고 비교적 적은 절점의 사용으로도 만족할만한 해를 얻을 수 있다. 다만 쉘의 기하학적 형상이 spline 함수와 곡선을 정의하는데 필요한 벡터에 의해 보간되어 지므로 곡선을 정의하는 벡터를 정확히 계산하는 것이 중요하며 이 벡터의 산정이 부정확한 경우에는 해의 정확성을 보장할 수 없다.

또한, 본 연구에 사용된 스트립 요소는 전단변형을 고려할 수 있도록 이동변위와 회전변위를 독립적으로 가정하였기 때문에 기본적으로 locking 현상을 포함하고 있으며 본 연구에서는 이를 제거하기 위하여 감차적분을 사용하였다. 그러나 이러한 감차적분의 사용은 때때로 구조물의 전체자유도에 비해 경계조건수가 너무 적을 경우에는 가상적인 제로 에너지 모드의 발생으로 인해 잘못된 해석 결과를 가져올 수도 있으므로 주의가 필요하다.

감사의 글

본 연구는 건설교통부의 96 연구개발사업의 연구비 지원과 참여기업인 LG 건설의 연구비 지원에 의해 이루어졌음을 밝히며 이 지원에 깊이 감사 드립니다.

참 고 문 헌

1. I.D. Faux. and M.J. Pratt, *Computational Geometry for Design and Manufacture*. Ellis Horwood. 1981.
2. F.T.K. Au and Y.K. Cheung, "Isoparametric Spline Finite Strip for Plane Structures" *Computers and Structures*. Vol 48. No. 1 pp23-32,1993
3. Y.K. Cheung and F.T.K. Au, "Isoparametric Spline Finite Strip for Degenerated Shells" *Thin-Walled Structures*. Vol 21 pp65-92,1995
4. H. Kebari and A.C. Cassell, "Non-conforming modes stabilization of a nine-nodes Stress-Resultant Degenerated Shell Element with Drilling Freedom " *Computers and Structures*. Vol 40. No. 3 pp569-580,1991
5. R.H. MacNeal and R.L. Harder, "A proposed standard set of problems to test finite element accuracy", *Finite Element in Analysis and Design*, Vol.1, pp.3-20,1985
6. T. Belytschko, B.L. Wong and H. Stolarski, "Assumed strain stabilization procedure for the 9-node lagrange shell element", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.28, pp.385-414,1989
7. E. Hinton and D.R.J. Owen. *Finite Element Software for Plates and Shells*. Pineridge ,1984