

점토의 구성관계에 대한 내재적인 응력적분

An Implicit Stress Integration for the Constitutive Relationship of Clays

오 세 봉 *

Oh, Seboong

ABSTRACT

Nonlinear finite element analyses of one dimensional consolidation problem were performed using an anisotropic hardening constitutive model. For the analyses, the anisotropic hardening elasto-plastic constitutive model based on the generalized isotropic hardening(GIH) rule was implemented into a nonlinear finite element analysis program, PLASTIC. In order to preserve the accuracy of the finite element solution for nonlinear problems, an implicit stress integration algorithm was employed. A consistent tangent moduli could also ensure the quadratic convergence of Newton's method. As a result, the nonlinear solution was accurately calculated and was converged to be asymptotically quadratic. In a consolidation problem, the relationship between load and settlement and between settlement and time vertical was analyzed comparing with results using the Cam-clay type model and the final consolidation settlement and the duration of primary consolidation could be evaluated rigorously using the GIH constitutive model.

1. 서 론

이승래와 오세봉 (1995)은 일반 등방경화규칙(generalized isotropic hardening rule, 약하여 GIH)에 기반하여 점토의 거동을 표현할 수 있는 비등방경화 구성모델을 제안하였다. 이러한 일반 등방경화 구성 모델을 적용하여 여러 지반공학 문제에 대한 수치해석을 수행할 때에는 K_0 압밀된 지반의 과압밀 상태 및 역재하시의 소성거동을 비교적 잘 반영할 수 있다.

연약지반에서는 외부하중이나 준설 매립등으로 인하여 지중의 간극수에 정수압이외에 과잉간극수압이 유발될 수 있다. 이러한 수압이 시간이 지남에 따라 소산되며 지반에는 침하가 발생하는 데 이를 압밀(consolidation)이라고 한다. 본 연구에서는 연약지반의 압밀문제를 비등방경화 구성관계를 적용하여 유한요소적으로 해석하고 실제 지반의 거동을 정확하게 예측하고자 한다.

* 영남대학교 토목공학과 조교수

따라서 비선형 해석시 정확도 및 효율성을 확보하기 위하여 내재적인 응력적분 알고리즘을 정식화하고 이를 토대로 압밀문제에 대한 비선형 유한요소해석을 수행하였다.

2. 일반등방경화 구성모델

일반 등방경화규칙에 의거한 비등방경화 구성모델(Lee and Oh 1995)에서 사용된 기준면함수와 항복면함수는 그림 1에서 보여지듯이 일반적인 응력장에 대하여 다음 식으로 나타낸다.

$$F = (\bar{p} - sp_c)^2 + \frac{3}{2} \frac{\bar{s} \cdot \bar{s}}{m^2} - d^2 p_c^2 = 0 \quad (1a)$$

$$f = (p - \alpha)^2 + \frac{3}{2} \frac{(s - \beta) \cdot (s - \beta)}{m^2} - r^2 = 0 \quad (1b)$$

여기서 M, s, d 는 재료계수이다. 응력 텐서, 변형률 텐서 및 항복면 중심응력 텐서는 각각 $\sigma = p\mathbf{1} + s$, $\alpha = \alpha\mathbf{1} + \beta$ 이고 $\mathbf{1} = \delta_{ij}$ (Kronecker delta) 로 정의 된다. 또한 \bar{p}, \bar{s} 는 기준면상의 응력상태이며 r, p_c 는 각각 항복면과 기준면의 크기를 나타낸다.

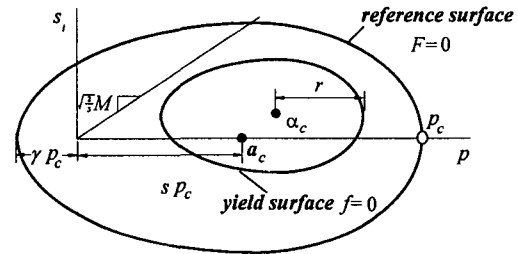


그림 1 일반 등방경화 구성모델

3. 내재적인 응력적분

이전의 시간단계 t_n 에서 수렴한 응력을 σ_n 이라고 규정할 때, 기지의 값 $\varepsilon_{n+1}^k = \varepsilon_n + \Delta\varepsilon_{n+1}^k$ 에 상응하는 현 단계에서의 응력 σ_{n+1}^k 은 다음과 같이 구해질 수 있다.

$$\sigma_{n+1}^k = \sigma_n + \int_n^{n+1} C^e \cdot d\varepsilon^e \quad (2)$$

이 때 기지의 값인 시도응력텐서 σ^{tr} 을 $\sigma^{tr} = \sigma_n + C^e \cdot \Delta\varepsilon_{n+1}^k$ 로 정의하면 위 식은 다음과 같이 변환될 수 있다.

$$\sigma_{n+1}^k = \sigma^{tr} - C^e \cdot \int_n^{n+1} d\varepsilon^p \quad (3)$$

소성변형률에 대한 적분은 수치적분에 의하여 구해지며 적분구간 $[t_n, t_{n+1}]$ 에서 일반 사다리꼴 규칙(generalized trapezoidal rule)을 적용하여 다음과 같이 근사화할 수 있다 [Ortiz & Popov (1985)].

$$\int_n^{n+1} f_{,\sigma} d\phi \approx \Delta\phi \{ (1 - \delta)(f_{,\sigma})_n + \delta(f_{,\sigma})_{n+1} \} \quad (4)$$

여기서 $(f_{,\sigma})_n, (f_{,\sigma})_{n+1}$ 은 각각 n 및 $(n+1)$ 단계에서 응력에 대한 항복면 함수의 도함수이다. 또 δ 는 사다리꼴 계수이며 $\Delta\phi$ 는 일관 계수(consistency parameter)이다.

따라서 식 (4)을 식 (3)에 대입하면 다음 식이 유도될 수 있다.

$$\sigma_{n+1} = \sigma^n - \Delta\phi \mathbf{C}^e \cdot (f, \sigma)_{n+\delta}, \quad (f, \sigma)_{n+\delta} = (1-\delta)(f, \sigma)_n + \delta(f, \sigma)_{n+1} \quad (5)$$

이 때 식 (5)의 항복면의 도함수는 σ_{n+1} 에 의존하므로 이 식에 의한 응력적분은 내재적(implicit)으로 반복 해석을 수행하여야 한다.

한편 적용된 구성관계는 기준면의 크기 p_c 와 항복면의 크기 r 이 변화하며 항복이 일어난다. 이러한 내부변수를 포함하고 있는 경화함수의 적분은 식 (6, 7)과 같이 나타난다.

$$p_c \equiv (p_c)_{n+1} = p_{cn} \exp\{\theta \Delta\phi(f, p)_{n+\delta}\} \quad (6)$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \|e^p\| = \psi(r, p_c) \quad (7)$$

여기서 $p_{cn} \equiv p_c(t_n)$, 소성축차변형률 텐서 $e^p \equiv e_{n+1}^p = (e^p)_n + \Delta\phi(f, s)_{n+\delta}$ 이며, 항복면의 경화함수에 포함되는 $\psi(r, p_c) = \frac{a}{m^2 \|\theta\|^2} \frac{(cr / dp_c)^b}{1 - cr / dp_c}$ 이다. 그리고 θ 는 기준면의 경화함수에 필요한 계수이다.

고 a, b, c 는 내부 항복면의 경화함수에 사용되는 계수이다. 대상 구성관계의 응력적분은 식 (5, 6, 7)을 내재적으로 연립하여 풀어야 한다.

지배식의 풀이과정에서 Newton 법의 점근적인 2차 수렴도를 유지하기 위하여 수치적으로 적분된 응력에 일관된 접선계수(consistent tangent modulus)를 구하여 적용해야 한다 [Simo & Taylor(1985)].

$$\mathbf{C}_{n+1}^k = \frac{\partial \sigma_{n+1}^k}{\partial \epsilon_{n+1}^k} = \mathbf{1} \otimes \frac{\partial p_{n+1}^k}{\partial \epsilon_{n+1}^k} + \frac{\partial s_{n+1}^k}{\partial \epsilon_{n+1}^k} \quad (8)$$

$(\bullet)' \equiv \partial(\bullet)_{n+1}^k / \partial \epsilon_{n+1}^k$ 로 정의할 때, 위 식의 우변은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$p' = (p^n)' - K \Delta\phi'(f, p)_{n+\delta} - K \Delta\phi(f, p)'_{n+\delta} \quad (9a)$$

$$s' = (s^n)' - 2G(f, s)_{n+\delta} \otimes \Delta\phi' - 2G \Delta\phi(f, s)'_{n+\delta} \quad (9b)$$

여기서 $(p^n)' = K\mathbf{1}$, $(s^n)' = 2G(\mathbf{I} - \frac{1}{3}\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})$ 이고, 식 (9)들이 $p', s', p'_c, r', \Delta\phi'$ 의 독립적인 텐서로 이루어진 관계식이라는 것을 알 수 있다. 따라서 3개의 식이 추가로 필요하다.

식 (6)으로부터 다음과 같은 관계를 유도할 수 있다.

$$p'_c = \theta \Delta\phi p_c(f, p)'_{n+\delta} + \theta(f, p)_{n+\delta} p_c \Delta\phi' \quad (10)$$

그리고 식 (7)로부터

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{e^p}{\|e^p\|} \cdot \{\Delta\phi'(f, s)_{n+\delta} + \Delta\phi(f, s)'_{n+\delta}\} = \psi_{,p_c} p'_c + \psi_{,r} r' \quad (11)$$

이고 $\psi_{,p_c}, \psi_{,r}$ 은 p_c 와 r 은 의 함수이다. 한편 항복면에 대한 미분은

$$f_{,p}(p' - \alpha') + f_{,s}(s' - \beta') + f_{,r} r' = 0 \quad (12)$$

이다. 식 (10~12)는 $p', s', p'_c, r', \Delta\phi'$ 의 독립적인 텐서로 구성되어 있다(오세봉과 이승래 1996a). 따라서 식 (9a, b)와 더불어 연립하여 p', s' 를 풀면, 접선계수 \mathbf{C}_{n+1}^k 를 구할 수 있다.

오세봉과 이승래(1996b)는 이러한 일반 사다리꼴규칙에 의한 수치적인 응력적분을 정식화하여 지반굴착 해석을 수행하였고, 구성관계 적분시 내재적으로 응력을 구하므로 국부적인 Newton 법에 의하여 반복적으로 해를 구한다. 이를 토대로 본 연구에서는 Newton 법의 수렴도를 확보하기 위하여 일관된 응력-변형률 접선계수를 채택하여 압밀문제 해석용 비선형 유한요소 프로그램 PLASTIC(신호성 1997)에 구현하였다.

4 예제 해석

수치적인 응력적분법의 정확도해석을 수행하기 위하여, 배수 삼축압축시험의 응력-변형률 관계를 도출하였다. 삼축압축시험은 체적응력이 일정한 조건하에서 수직응력증가분 q 를 증가시킨다. 그림 2에서는 응력증분이 0.1, 1.0, 2.0, 4.0psi 경우에 대하여 내재적인 적분을 수행하여 응력-변형률관계를 비교하였다. 이 때 초기 체적응력에 대한 과압밀비는 24이며 사용한 계수는 다음과 같다; $\lambda=0.093, \kappa=0.035, M=0.95, s=0.443, \gamma=0.1, \alpha=0.908, a=0.00030, b=1.8, c=1.0$. 이러한 계수중에서 a, b, c 는 GIH 구성관계의 경화함수에 사용되는 계수이며 나머지는 항복면의 형태를 다소 변화시킨 Cam-clay 모델의 계수이다.

그림 2에서 보여지듯이 한 질점에서의 응력-변형률 관계에 대하여 큰 증분에 대한 응력적분조차도 매우 정확한 결과를 보여준다. 단지 그림 2 (b)에서 보면 증분이 큰 경우에는 작은 경우에 비하여 적분된 체적변형률이 다소 압축적으로 나타남을 볼 수 있다.

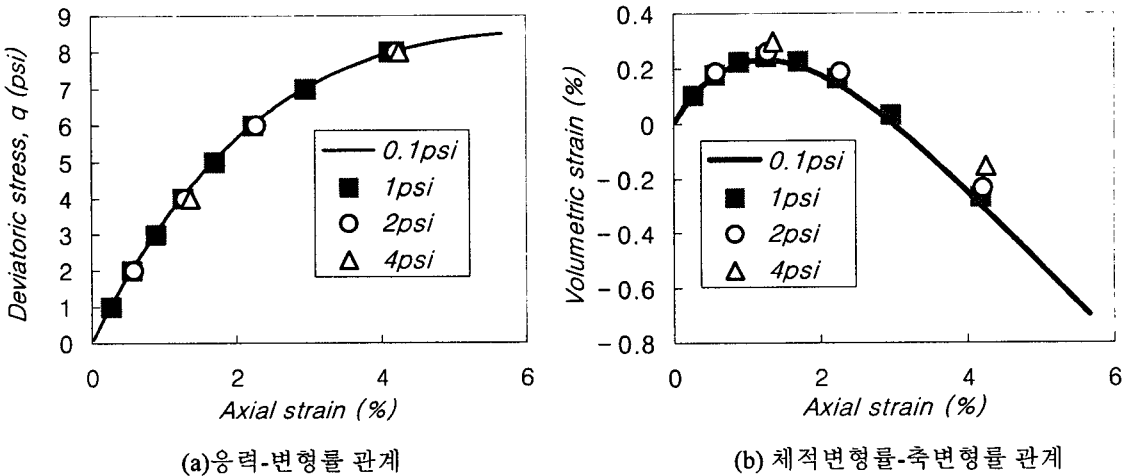


그림 2 과압밀점토의 배수 삼축압축시험

내재적인 적분법의 정확도를 조사하기 위하여 오차의 척도로서 기준 변형률차를 정의하였다. 기준 변형률차는 축응력 증분이 0.01psi일 때의 변형률 ϵ^* 를 기준으로 임의의 증분에 대한 변형률 오차를 $\|\epsilon - \epsilon^*\| / \|\epsilon^*\|$ 로 정의한다. 위의 오차를 $\delta=0.5$ (TRP), 1.0(CLS)일 때 축차응력에 따라 나타내면 그림 3과 같다. 그림에서 보여지듯이 변형률 증분이 클수록 오차가 심하게 일어났다. 그리고 초기변형단계에서 오차가 크고 점차로 감소하는 경향을 나타내고 있다. Ortiz & Popov(1985)에 의하면 일반사다리꼴 규칙에 의한 내재적인 적분은 $\delta=0.5$ 일 때만 2차 정확도를 확보할 수 있다고 한다. 그림 3에서 보여지듯이 $\delta=0.5$ 일 때에 오차가 작게 나타났다. 위의 결과들로부터 적용된 응력적분방법이 매우 정확하며, 공학적인 용도에서 적합한 정확도를 확보하고 있음을 알 수 있었다.

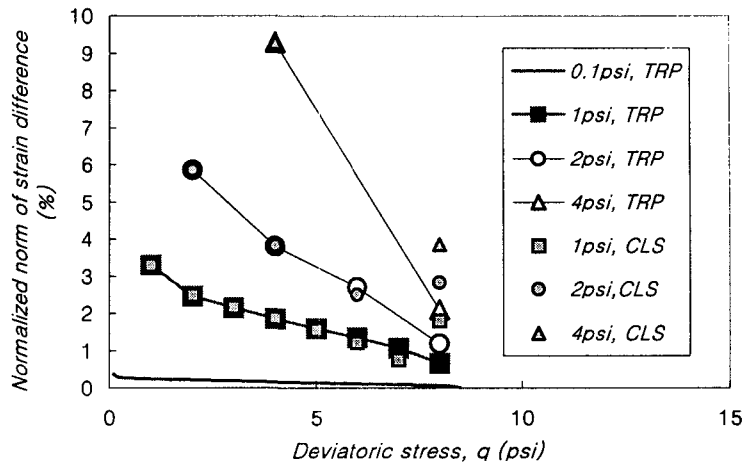


그림 3 축차응력에 따른 기준 변형률차

앞서 논의하였듯이 Newton 법을 통한 지배식의 해풀이 과정에서 점근적인 2차 수렴도를 확보하여 해법의 효율성을 보전하기 위해서 응력적분 기법에 일관된 접선계수를 적용하였다. 본 연구에서 적용한 일관된 접선계수가 Newton 법의 수렴도를 확보하는 지를 검증하기 위하여, 하중증분이 2psi인 경우의 잔류력벡터 정규(residual force norm)를 하중이 증가함에 따라 표 1에 기술하였다. 표 1에서 보여지듯이 반복수가 진행됨에 따라 정규가 급속히 감소하고 총 반복수가 5에서 6회에 불과한 것으로 보아 점근적인 2차수렴도를 확보하고 있는 것으로 판단된다. 다만 하중수준이 높은 경우에는 소성변형률의 적분량이 커서 소요 반복수가 다소 늘어나고 반복과정의 초기에 수렴도가 다소 떨어짐을 알 수 있다. 이러한 정확도 및 수렴도 해석 결과, 정확하고 효율적으로 비선형해석을 수행할 수 있도록 GIH 구성모델이 정식화되었음을 확인할 수 있었다.

표 1 하중증분이 2 psi인 경우의 잔류력 정규(residual force norm)

Iteration step	Residuals			
	1	1.000E+00	1.000E+00	1.000E+00
2	1.661E-01	3.524E-01	4.907E-01	6.001E-01
3	1.053E-02	4.274E-02	8.857E-02	1.685E-01
4	4.028E-05	6.403E-04	3.475E-03	2.541E-02
5	6.000E-10	1.432E-07	5.990E-06	1.078E-03
6				1.996E-06

점토의 비등방 경화 구성관계를 앞서 기술한 알고리즘을 구현한 압밀해석용 유한요소해석 프로그램 PLSTIC으로 폭 1m, 높이 5m인 예제를 해석하였다. 그림 4에서 보여지듯이 8 변위절점, 4 간극수압 절점을 사용하는 Q8P4요소 5개로 1차원 침하조건의 요소망을 구성하였다. 사용된 지반물성치는 $\lambda=0.26$, $\kappa=0.174$, $M=1.0$, $s=0.45$, $\gamma=0.1$, $e_a=0.908$, $\alpha=0.0030$, $b=1.8$, $c=1.0$ 이다.

그림 4에서는 요소망 상부에 가한 분포하중 p 를 선행압밀응력 p_c 로 나눈 기준 수직응력과 수직 변위와 전체높이의 비인 기준 수직변위와의 관계를 나타내고 있다. 선행압밀응력에서 하중을 제거한 이

후에 다시 하중을 가하였을 때 비등방경화 구성관계(GIH)는 Cam-clay 모델과는 달리 영구변형이 발생하고 있음을 알 수 있다.

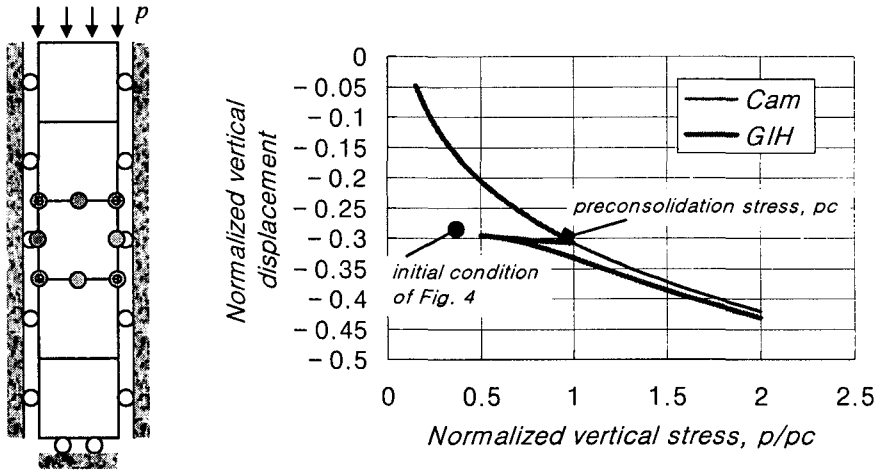


그림 4 요소망 및 축하중에 따른 변위

그림 5에는 구성관계를 Cam-clay 모델과 GIH 모델을 적용하였을 때 나타나는 압밀침하량을 비교하였다. 여기서 시간계수 T_v 는 $c_v t / H^2$ 으로 정의되는 무차원량으로 본 예제에서는 $t/25$ 로 정의된다. 초기응력상태는 그림 4에서 보여지듯이 p_i/p_c 가 0.5인 상태이며, 이후 하중증가비 $\Delta p/p_i$ 가 1.0(case I)인 경우와 2.0인 경우(case II)에 대하여 압밀침하량을 계산하였다.

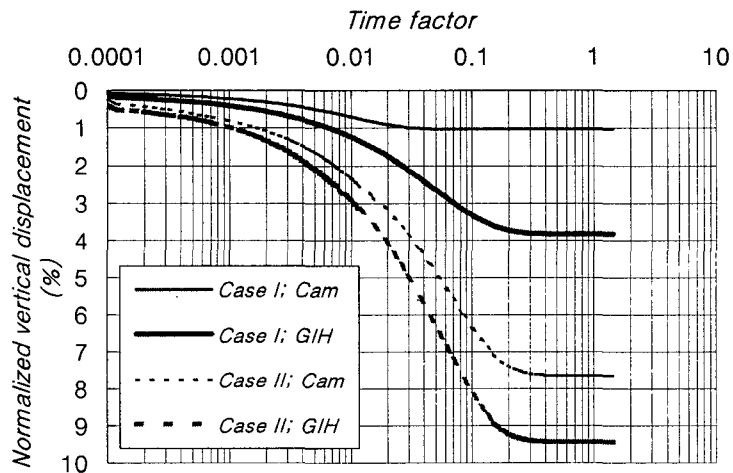


그림 5 시간에 따른 압밀침하량

Case I에서는 Cam-clay 모델의 경우 탄성변형만이 유발되므로 변위가 작게 발생할 뿐만 아니라 과잉간극수압이 급속하게 소산되어 압밀이 GIH 모델에 비하여 일찍 완료된다. 반면에 GIH 모델은 소성 변형률을 포함한 침하량이 유발되고 시간에 따른 변위 양상이 상이하게 나타나고 있다. Case II를 보면

변위양상은 유사하며 다만 GIH 모델을 적용한 경우에 많은 변위가 발생하였다. 이러한 결과로부터 비등방경화구성관계를 적용한 압밀해석을 수행하면 침하량이 크게 발생하고 시간에 따른 변위양상이 상이하게 나타날 수 있다. 이로 인하여 최종압밀량과 압밀기간이 등방경화구성관계의 경우와 상이하게 발생한다.

5. 결 론

본연구에서는 일반 등방경화규칙에 의거한 비등방경화 구성관계를 일반사다리꼴에 의하여 내재적으로 응력을 적분하여 비선형 유한요소 해석을 수행하였다. 한 질점의 삼축압축시험시 거동에 대하여 정확도해석을 수행한 결과에 하중증분이 증가함에 따라 오차가 증가하고 있지만 공학적인 필요에 적합한 정확도를 확보하고 있음을 알 수 있었다. 그리고 1차원 압밀문제에 대한 비선형유한요소해석을 수행한 결과 비등방경화 구성관계인 GIH 모델을 적용한 경우에 과압밀지반의 소성변형을 고려한 침하량을 계산할 수 있었고 이에 따라 시간에 따른 침하양상이 Cam-clay 모델과 상이하게 나타남을 알 수 있었다. 따라서 실제 과압밀 지반에서 일어나는 압밀거동에 대한 최종침하량과 압밀기간을 적합하게 산정할 수 있는 토대를 구축하였다.

참고 문헌

1. 신호성 (1997), 대변형을 고려한 연약지반의 압밀해석, 석사학위논문, 한국과학기술원 토목공학과
2. 이 승 래, 오 세 봉 (1995), "일반 등방경화규칙에 의거한 점토의 비등방 탄소성 구성모델," 한국지반공학회지, 10권, 3호, 17-32
3. 오 세 봉, 이 승 래 (1996a), "점토의 비등방경화 탄소성 구성관계에 대한 내재적인 응력적분 알고리즘: I. 정식화," 한국지반공학회지, 12권, 4호, 145-156
4. 오 세 봉, 이 승 래 (1996b), "점토의 비등방경화 탄소성 구성관계에 대한 내재적인 응력적분 알고리즘: II. 검증," 한국지반공학회지, 12권, 6호, 87-100
5. Lee, S. R. and Oh, S. (1995). "An Anisotropic Hardening Constitutive Model Based on Generalized Isotropic Hardening Rule for Modeling Clay Behavior," *Int. J. Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 19, 683-703
6. Ortiz, M. and Popov, E. P. (1985). "Accuracy and Stability of Integration Algorithms for Elastoplastic Constitutive Equations," *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, 21, 1561-1576
7. Simo, J. C. and Taylor, R. L. (1985). "Consistent Tangent Operators for Rate-Independent Elastoplasticity," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 48, 101-118