

얕은 정현형(正弦型) 아치의 동적불안정에 관한 연구

A Study on the Dynamic Instability of Shallow Sinusoidal Arches

김 승 덕*
Kim, Seung-Deog

박 지 윤**
Park, Ji-Yoon

권 택 진***
Kwun, Taek-Jin

ABSTRACT

Many papers which deal with the dynamic instability for shell-like structures under the step load have been published, but there are few papers which treat the essential phenomenon of the dynamic buckling using the phase plane for investigating occurrence of chaos. Dynamic buckling process in the phase plane is a very important thing for understanding why unstable phenomena are sensitively originated in nonlinear dynamics by various initial conditions.

In this study, the direct and the indirect snap-buckling of shallow arches considering geometrical nonlinearity are investigated numerically and compared with the static critical load.

1. 서 론

아치는 곡률을 가진 곡선구조 형태로서 외부하중에 대하여 효과높게 저항할 수 있는 형태저항형 구조물이며, 구조물의 곡률을 이용하여 주로 압축력으로 힘을 전달할 수 있게 한 구조시스템이다. 아치가 가늘고 길어질수록 그 강도는 좌굴강도에 의해 결정되고, 또한 좌굴강도는 좌굴형상에 의해 지배된다. 따라서 좌굴형상 및 좌굴강도의 해석, 즉 구조불안정 문제의 해결은 아치의 설계강도 결정에 중요한 인자가 된다.¹⁾

이러한 불안정문제들은 모두 기하학적 비선형 문제이므로, 아치의 구조설계에서는 대변형 또는 유한변형이론에 의해 구조거동의 비선형적 특성을 파악해야 할 경우가 많다.²⁾ 특히 외력 자체가 동적 특성이 강할 경우에는 동적 비선형 문제를 다루어야 하고, 이러한 문제들 중 초기조건에 민감하게 반응하는 불안정 문제는 결국 카오스(chaos)의 생성으로 발전하게 된다.

셸형 구조물의 동적불안정은 외력과 구조물 형상에 따라 매우 복잡한 거동을 하는 것이 일반적이다. 그 중에서도 대칭변형모드와 비대칭변형모드와의 연성(coupling) 작용에 의한 간접좌굴(indirect snapping) 문제는 초기조건에 민감하게 반응하며, 비선형성이 강하게 나타나는 것이 특징이다.^{5)~14)}

본 연구에서는 대공간 구조물의 가장 기초적인 내용을 포함하는 아치 구조물을 대상으로 동적 불안정의 기본 매커니즘을 파악하기 위하여 양단 핀으로 고정된 정현형 아치(sinusoidal shaped arch)가 정현형 분포하중(sinusoidal distributed excitation)을 받았을 때의 얕은 아치를 대상으로 한다. 즉, 비선형성에 의한 구조물의 동적응답거동 특성과 초기조건에 민감한 구조계에서의 불안정성의 증폭 과정을 수치 시뮬레이션에 의해 조사한다.⁴⁾

* 정회원, 세명대학교 건축공학과 조교수, 공학박사

** 성균관대학교대학원 건축공학과, 석사과정

*** 정회원, 성균관대학교 건축공학과 교수, 공학박사

2. 비선형 운동방정식

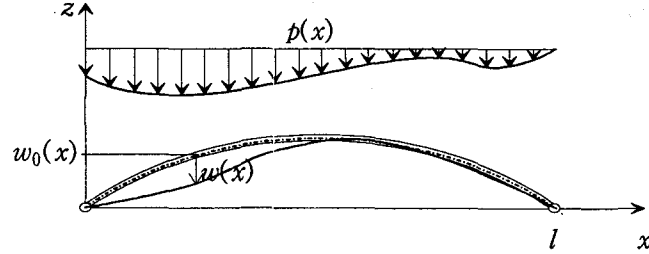


그림 1. 아치의 기하학적 형상

그림1에서와 같이 직교좌표계를 사용하여 아치의 초기형상을 $w_0(x)$, x 방향 및 z 방향의 변위를 $u(x)$, $w(x)$ 로 나타내면, 아치의 비선형 운동방정식은 식(1)과 같이 얻어진다.³⁾

$$EI w_{,xxxx} - \frac{EA}{2l} \int_0^l [(w_{,x})^2 + 2w_{0,x} w_{,x}] dx \cdot (w_{0,xx} + w_{,xx}) + c w_{,t} + \rho A w_{,tt} - p = 0 \quad (1)$$

얇은 아치의 일반화된 좌굴해석을 위하여 식(2)와 같은 무차원 파라미터를 도입한다.

$$k = \sqrt{\frac{I}{A}}, \quad \eta = \frac{w}{k}, \quad \xi = \frac{\pi}{l} x, \quad q = \frac{p}{Elk} \left(\frac{l}{\pi}\right)^4 \quad (2)$$

$$\tau = \omega_0 t, \quad \omega_0 = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \left(\frac{EI}{\rho A}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \gamma = \frac{c}{\rho A \omega_0}$$

윗 식의 파라미터를 식(1)에 대입하여 정리하면 식(3)과 같은 무차원화된 비선형 운동방정식이 얻어진다.

$$\eta_{,tt} - \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [(\eta_{,\xi})^2 + 2\eta_{0,\xi} \eta_{,\xi}] d\xi \cdot (\eta_{0,\xi\xi} + \eta_{,\xi\xi}) + \gamma \eta_{,t} + \eta_{,tt} - q = 0 \quad (3)$$

3. Galerkin법에 의한 이산화 운동방정식

무차원화 비선형 방정식인 식(3)의 해를 얻기 위하여 Galerkin법을 적용하여 이산화한다. 본 연구에서는 초기형상과 작용하는 분포하중이 모두 정현형(正弦型)일 때를 대상으로 한다. 초기형상, 변위, 하중을 Fourier급수를 이용하여 정의하면 식(4)와 같다.

$$\eta_0 = H \sin \xi, \quad \eta = \sum_{n=1}^N (-D_n) \sin n\xi, \quad q = -\Lambda \sin \xi \quad (4)$$

여기에서 변위 및 하중의 방향을 역방향으로 하기 위하여 '-'를 추가하였다. 이산화 과정에서 각 함수의 직교성과 Galerkin법을 이용하면 일반화 좌표 $D_n(\tau)$ 를 변수로 하는 비선형 운동방정식이 식(5)와 같이 구해진다

$$F_r(D_1, \dots, D_N, \Lambda) = \sum_{n=1}^N n^4 D_n \delta_{nr} + \frac{1}{4} \left(\sum_{n=1}^N n^2 D_n^2 - 2HD_1 \right) \left(-H\delta_{1r} + \sum_{n=1}^N n^2 D_n \delta_{nr} \right) + \gamma \sum_{n=1}^N \dot{D}_n \delta_{nr} + \sum_{n=1}^N \ddot{D}_n \delta_{nr} - \Lambda \delta_{1r} = 0 \quad (5)$$

여기서, δ_{nr} 는 Kronecker 기호, N 은 자유도 수이다.

4. 동적 비선형 해석

앞은 아치의 동적 불안정현상을 파악하기 위해 식(5)에 $n=1,2$ 를 대입하여 2자유도계의 비선형 운동방정식을 구하면 다음과 같이 된다.

$$F_1(D_1, D_2, \Lambda) = \left(1 + \frac{1}{2} H^2\right) D_1 - \frac{3}{4} H D_1^2 - H D_2^2 + D_1 D_2^2 + \frac{1}{4} D_1^3 + \gamma \dot{D}_1 + \ddot{D}_1 - \Lambda = 0 \quad (6)$$

$$F_2(D_1, D_2, \Lambda) = 16 D_2 - 2 H D_1 D_2 + D_1^2 D_2 + 4 D_2^3 + \gamma \dot{D}_2 + \ddot{D}_2 = 0 \quad (7)$$

형상파라미터 H 의 변화에 따른 고유진동수의 비선형 특성을 조사해본다. 하중변화에 따른 고유치의 변화를 알아보기 위해서는 각 증분구간에서 다음의 고유치 문제를 풀면 된다.

$$\det(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}) = 0 \quad (8)$$

여기서 \mathbf{K} 는 제1섭동식에 의한 접선강성행렬, \mathbf{M} 은 질량행렬이다.

해석결과인 Backbone curve를 완전형상일 때는 그림2에, 형상초기불완전 $D_2^0 = 0.001H$ 일 때는 그림3에 각각 나타낸다. $H=1$ 일 때는 가력초기에는 비선형의 효과로 인하여 softening현상을 나타내고, 하중레벨이 하중-변위 곡선의 변곡점을 넘어서면서 hardening현상을 나타냄을 알 수 있다. $H=3$ 일 때는 대칭모드인 모드 1이 softening현상과 함께 먼저 0에 도달하고, 이후 hardening현상을 나타낸다. 이는 정적해석에서 꺾좌굴 하중과 일치함을 알 수 있다. $H=5$ 일 때는 모드 1과 모드 2가 교차하면서 결국 비대칭모드가 먼저 0에 도달하며, 이는 정적해석에서의 분기좌굴 하중과 일치한다. $H=7$ 일 때는 비대칭모드가 대칭모드와 교차하지 않고 먼저 0에 도달함을 나타낸다. 형상초기불완전의 도입에 의한 변화는 $H=1,3$ 일 때는 보이지 않으나, $H=5,7$ 일 때는 분기점 근방에서 많은 변화를 나타냄을 알 수 있다. 특히, $H=5$ 인 경우에는 비대칭모드가 0에 가까워지면 대칭모드의 궤도가 갑자기 바뀌는 것을 알 수 있다.(그림3의 (c))

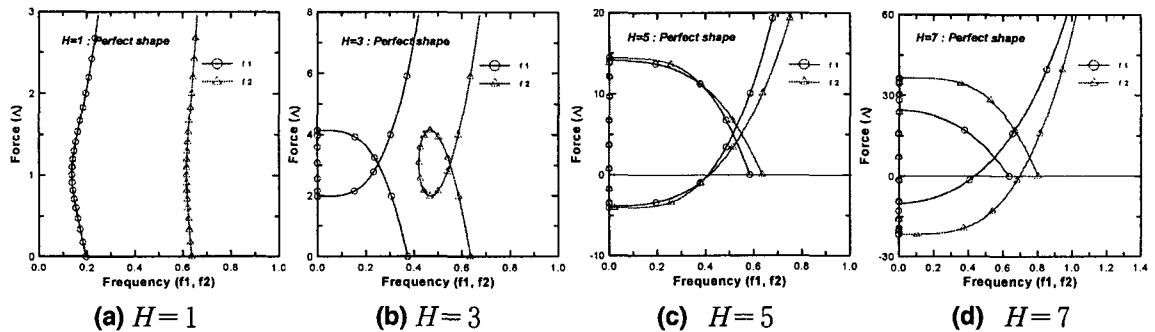


그림 2. 완전형상의 Backbone curve

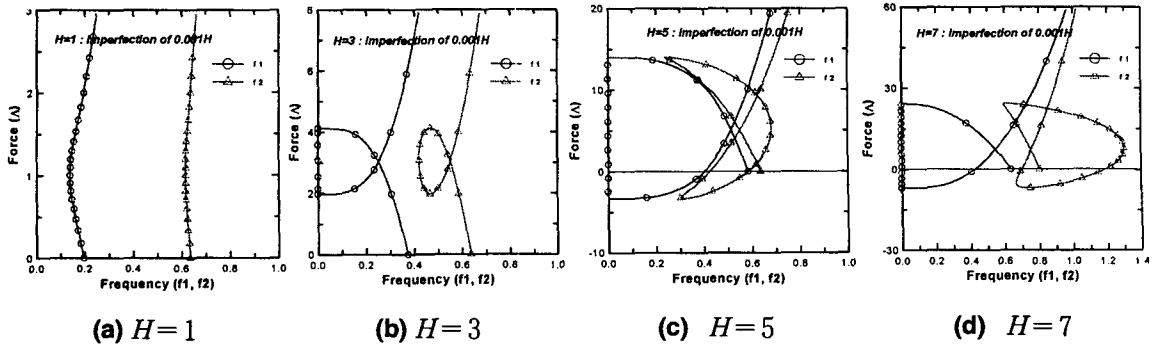


그림 3. 불완전형상의 Backbone curve ($D_2^0 = 0.001H$)

비선형 동적응답해석을 이용하여 동적 불안정현상을 조사한다. 식(6), (7)을 수치적분하기 위해 Newmark- β 법을 이용한다. 해석대상 운동방정식이 비선형이므로 Newmark- β 법 적용에 있어 반복법을 이용하며, 여기서 $\beta = 1/6$ 로 한다.

가력하중의 변화에 따른 비선형 변위응답의 변화를 그림4에 나타낸다. $H=1$ 인 경우에는 $\Lambda = 1.0$ 까지는 고유주기가 점차 길어지고, 이후에는 짧아짐을 알 수 있다. 또 변위의 진폭은 외력과 비례하지 않음을 알 수 있다. 이는 비선형성으로 인한 효과이다. $H=3, 5, 7$ 인 경우는 외력의 증가에 따른 변위의 진폭변화가 어느 하중레벨을 기점으로 급격히 증대함을 알 수 있다. 즉 $H=3$ 에서는 $\Lambda = 3 \sim 4$, $H=5$ 에서는 $\Lambda = 10 \sim 12.5$, $H=7$ 에서는 $\Lambda = 25 \sim 30$ 사이에서 변위응답이 급격히 뛰고 있으며, 이는 snapping현상에 기인한다. 이러한 snapping현상이 일어나는 하중레벨을 찾기 위해 시간이력의 지속시간을 $20T$ (T : 0레벨에서의 고유주기)로, 시간간격은 $\Delta t = T/100$ 로 하고, 하중레벨 Λ 의 증분간격은 정적 뒤편하중을 100등분한 값으로 채택하여 수치적분을 수행한다.

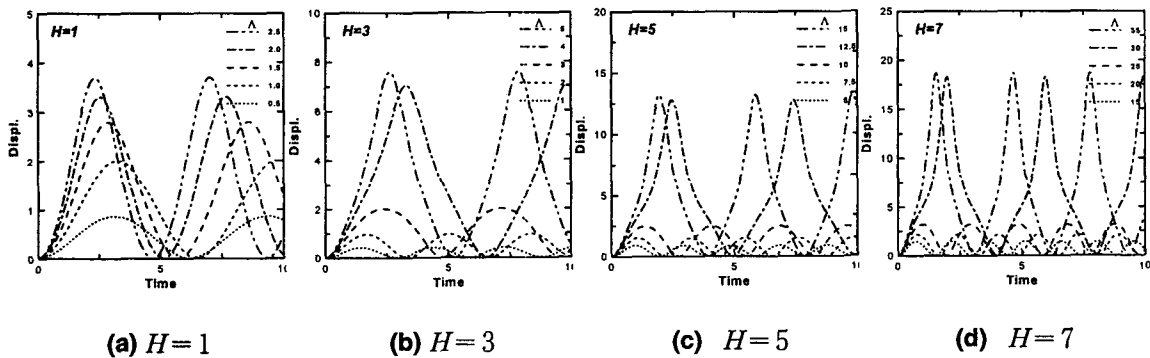


그림 4. 비선형 변위응답

그림5는 완전형상의 아치를 H 의 변화에 따라 외력-최대변위관계를 나타낸 것이고, $H=1$ 에서는 점진적인 곡선을 나타내며, $H=3$ 이상에서 snapping이 발생함을 알 수 있다.

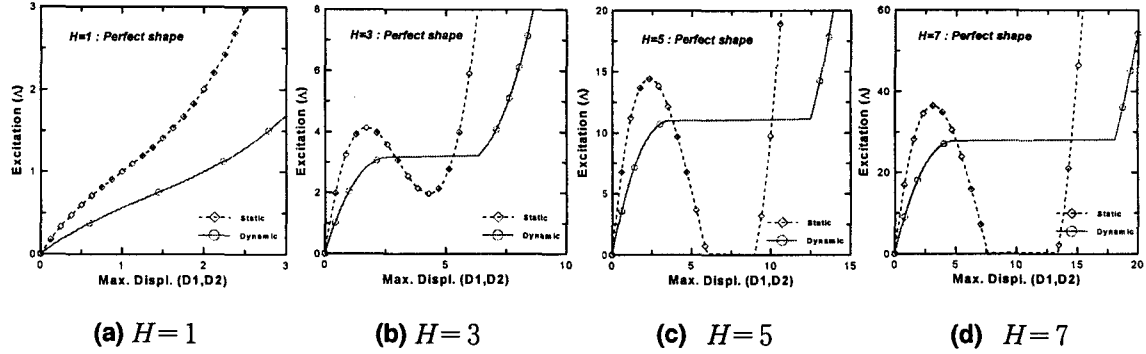


그림 5. 완전형상의 최대변위응답

그림6은 형상초기불완전을 $D_2^0 = 0.001H$ 로 입력한 결과이며, $H=3$ 이하에서는 완전형상의 결과와 거의 일치하고 있으나, 정적해석에서의 분기좌굴 임계점인 $H=4$ 이상부터는 D_2 의 비대칭 변위모드가 급격히 나타나며, 이는 좌굴하중에도 영향을 미친다. 따라서 정적해석에서 뒹좌굴(snap-through)에 해당하는 $H \geq 2$ 에서의 좌굴을 동적해석에서는 직접좌굴(direct snapping)이라 하고, 정적해석에서 분기좌굴(bifurcation)에 해당하는 $H \geq 4$ 에서의 좌굴을 동적해석에서는 간접좌굴(Indirect snapping)이라 한다.³⁾

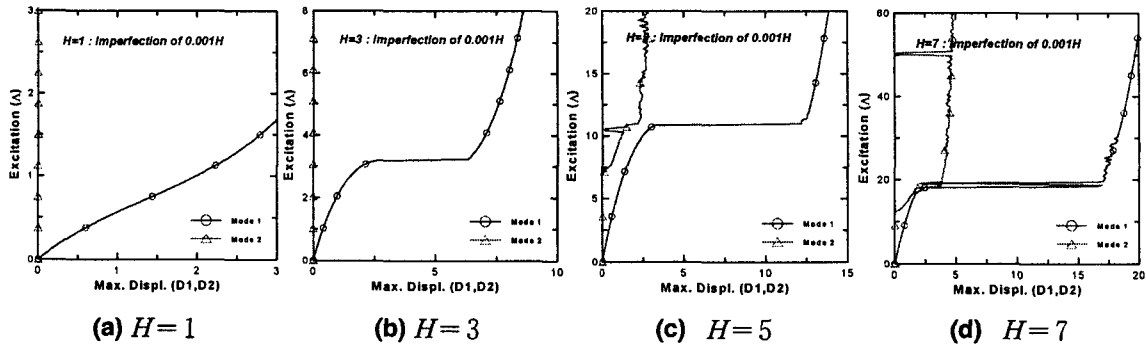


그림 6. 불완전형상의 최대변위응답 ($D_2^0 = 0.001H$)

동적불안정 현상을 분석하기 위해 형상파라미터 $H=3, 5, 7$ 에 대하여 좌굴 전 및 좌굴 후의 하중레벨에서 비선형 시가력응답곡선을 구하여 본다. 완전형상인 경우, $H=3$ 의 결과를 그림7의 (a), (b)에, $H=5$ 의 결과를 (c), (d)에, $H=7$ 의 결과를 (e), (f)에 각각 나타낸다. 형상파라미터 H 의 변화에 따라 진폭의 차는 있으나, 좌굴 전과 좌굴 후의 각각의 결과들이 H 와 관계없이 유사한 패턴을 나타냄을 알 수 있다.

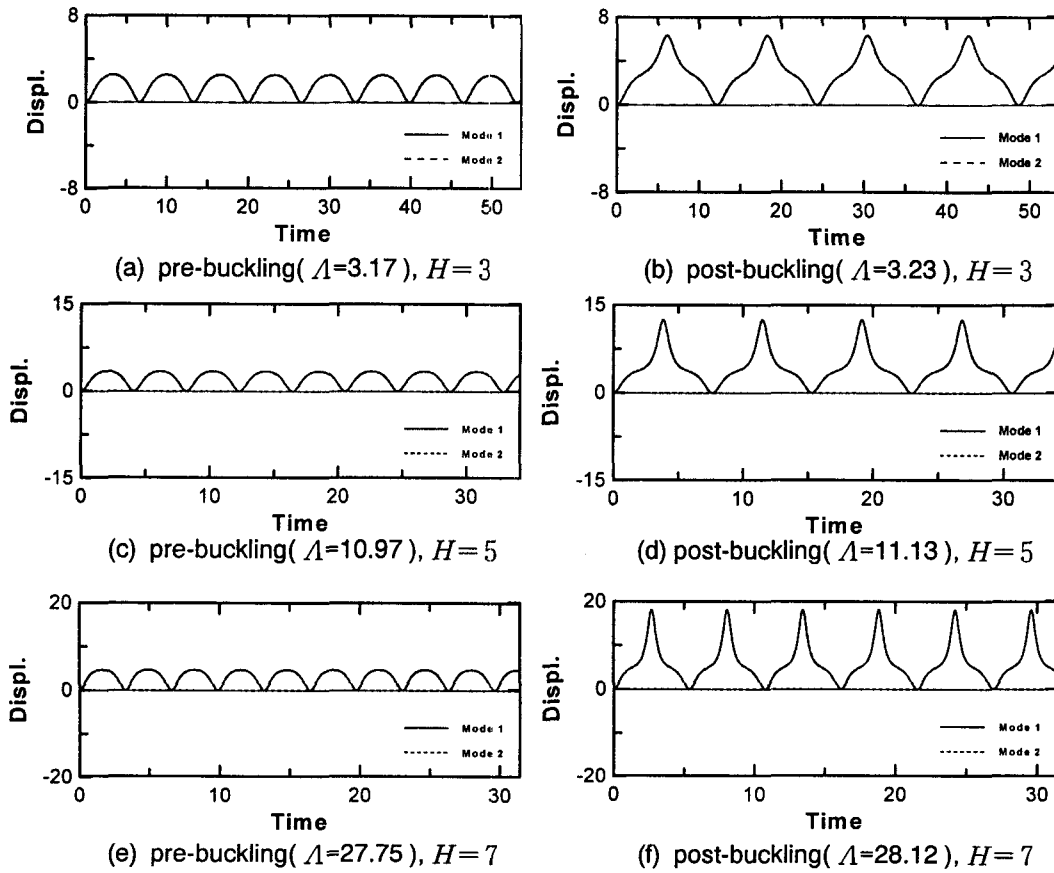
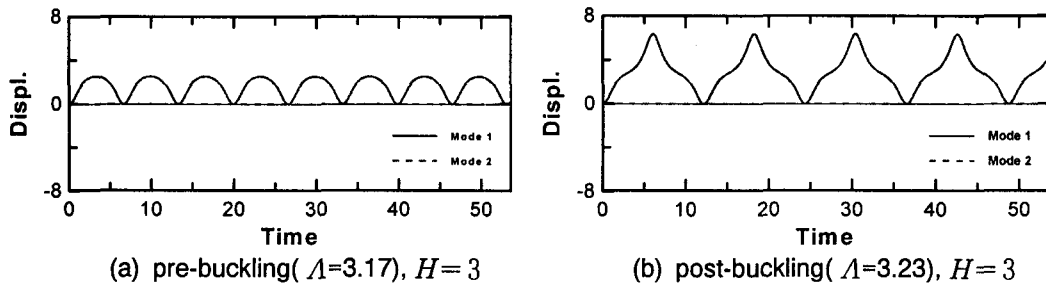


그림 7. 완전형상의 시각력곡선 ($D_2^0 = 0$)

형상초기불완전 $D_2^0 = 0.001H$ 인 경우, $H=3$ 의 결과를 그림8의 (a), (b)에, $H=5$ 의 결과를 (c), (d)에, $H=7$ 의 결과를 (e), (f)에 각각 나타낸다. $H=3$ 의 결과는 완전형상($D_2^0 = 0$)의 결과(그림7)의 (a), (b)와 거의 일치하고 있으나, $H=5, 7$ 의 결과에서는 D_2 의 현저한 증폭으로 인하여 완전형상의 결과와는 다른 패턴을 나타냄을 알 수 있다. 특히 형상파라미터 H 가 증가함에 따라 이러한 현상은 더욱 두드러지며, $H=7$ 의 좌굴 후에는 시간 $\tau=12$ 까지의 초기진동은 좌굴 전과 유사한 진동패턴을 나타내나, τ 가 13~15을 지나면서 비대칭 모드의 간섭으로 인해 대칭모드의 진폭이 급격히 증가한다. 이는 대칭모드와 비대칭모드의 연성(coupling) 작용에 의한 간접좌굴(indirect snapping)의 매커니즘을 보여주는 것이다.



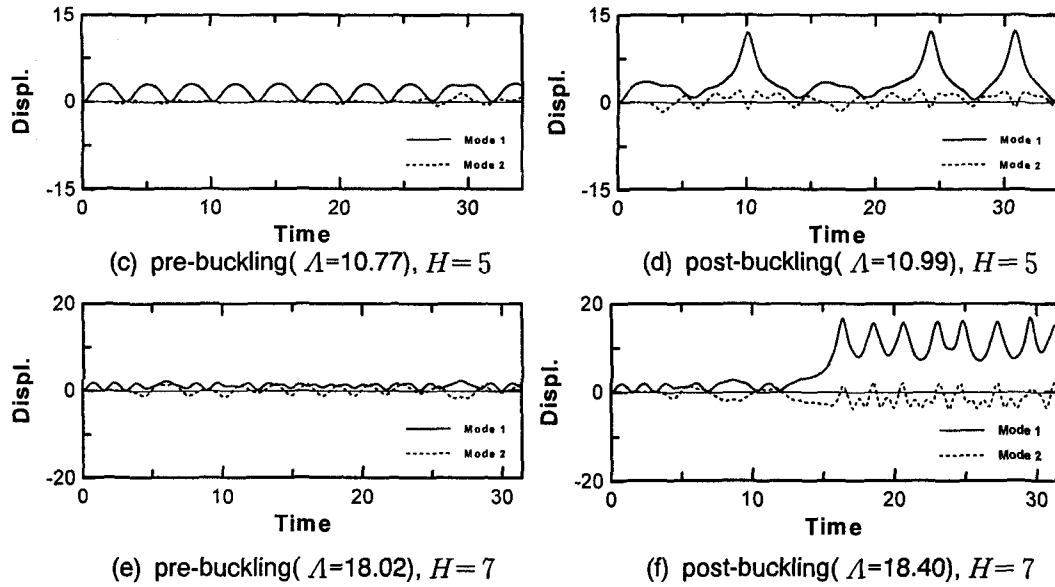
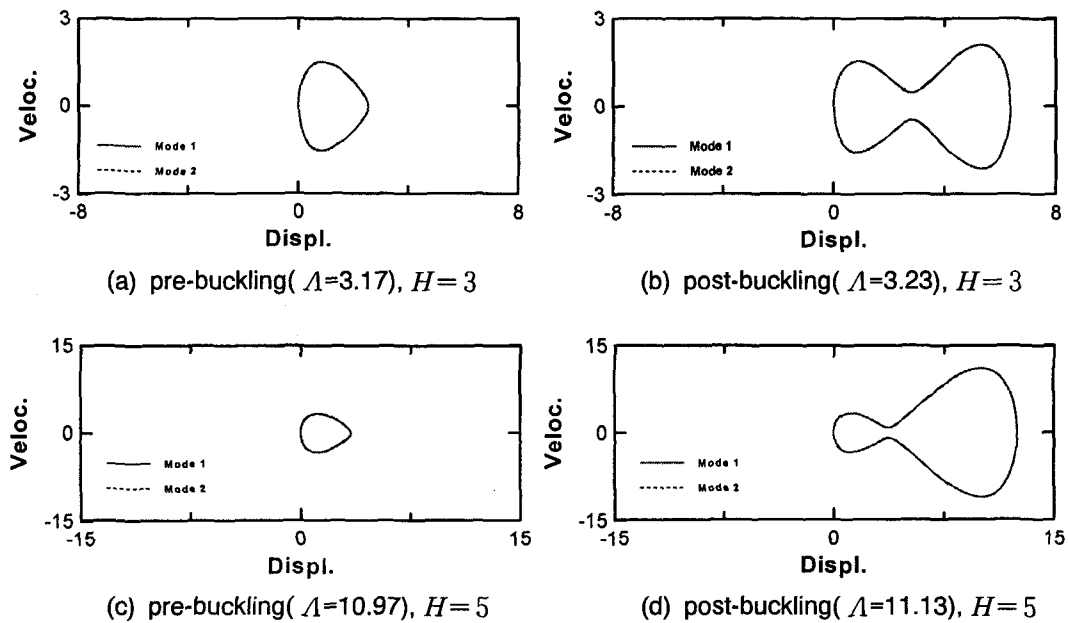
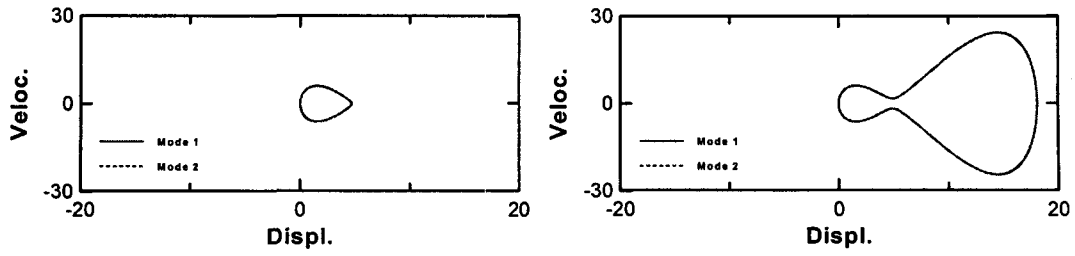


그림 8. 불안전형상의 시각력곡선 ($D_2^0=0.001H$)

비선형 시각력 응답결과를 분석하기 위해 위상면에서의 위상곡선들을 비교해 본다. 완전형상인 경우, $H=3$ 의 결과를 그림9의 (a), (b)에, $H=5$ 의 결과를 (c), (d)에, $H=7$ 의 결과를 (e), (f)에 나타낸다.

형상파라미터 H 의 변화와는 관계없이 끌개(attractor)는 한계순환(limit cycle)을 보여주고 있다. 가력레벨이 좌굴 전에서 좌굴 후의 하중 ρ 벨로 변화함에 따라 끌개의 모양은 변위-속도 위상면에서는 한 개의 물방울이 두 개의 물방울이 연결된 모양으로 변하는 것을 알 수 있다.



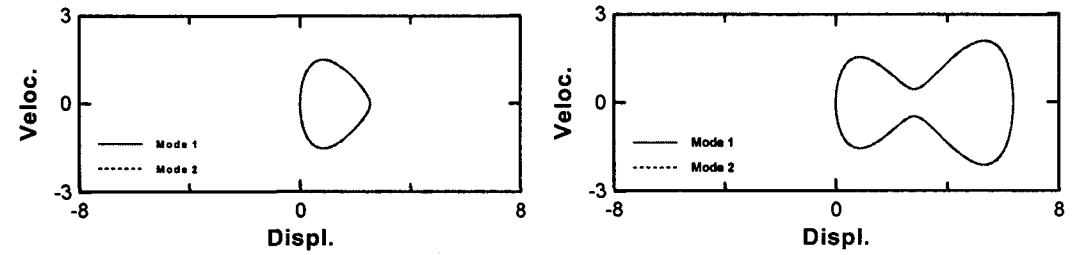


(e) pre-buckling($\Lambda=27.75$), $H=7$

(f) post-buckling($\Lambda=28.12$), $H=7$

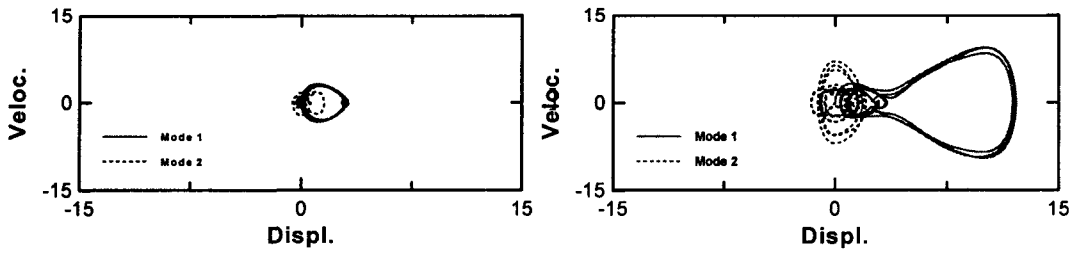
그림 9. 완전형상의 위상곡선 ($D_2^0=0$)

형상초기불완전 $D_2^0=0.001H$ 인 경우, $H=3$ 의 결과를 그림10의 (a), (b)에, $H=5$ 의 결과를 (c), (d)에, $H=7$ 의 결과를 (e), (f)에 각각 나타낸다.



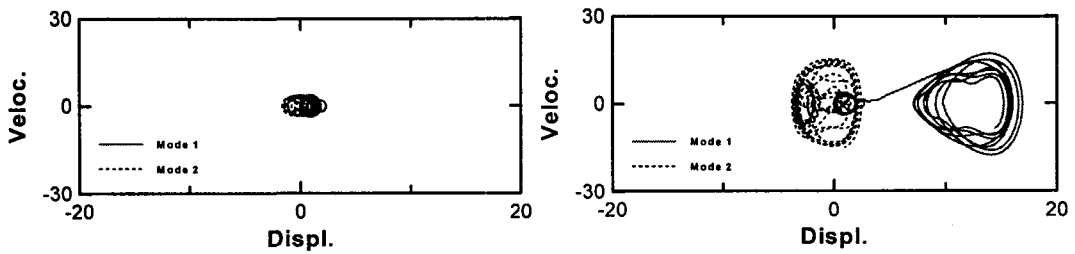
(a) pre-buckling($\Lambda=3.17$), $H=3$

(b) post-buckling($\Lambda=3.23$), $H=3$



(c) pre-buckling($\Lambda=10.77$), $H=5$

(d) post-buckling($\Lambda=10.99$), $H=5$



(e) pre-buckling($\Lambda=18.02$), $H=7$

(f) post-buckling($\Lambda=18.40$), $H=7$

그림 10. 불완전형상의 위상곡선 ($D_2^0=0.001H$)

$H=3$ 의 결과는 완전형상의 결과와 일치하고 있으며, $H=5,7$ 의 결과에서는 전체적인 패턴은 유사하지만 카오스적 현상이 출현함을 알 수 있다. 즉, 완전형상일때는 위상곡선의 궤도는 단일궤도로 연결되어 끝개개 한계순환을 나타내고 있으나, 불완전형상인 경우에는 형상초기불완전에 의한 비선형성의 증폭으로 인해 위상곡선의 궤도는 중복되지 않는 항상 새로운 궤도를 만들며 카오스를 생성한다. 또 $H=7$ 인 경우, 좌굴 후의 변위-속도 위상면에서는 초기 궤도와 snapping 후의 궤도가 완전히 분리됨을 보여주고 있다.(그림10의 (f))

이상으로 알은 아치의 동적 불안정 현상을 파악하기 위하여, 형상파라미터 H 의 변화에 따른 고유진동수의 변화, 직접 및 간접좌굴 하중레벨의 변화, 좌굴 전과 좌굴 후의 하중레벨에서의 시각력 응답 및 위상곡선의 변화 등이 비선형성에 의해 변화됨을 고찰하였다. 이들 결과를 정리하여 정적 및 동적 좌굴하중을 그림 11에 나타낸다.

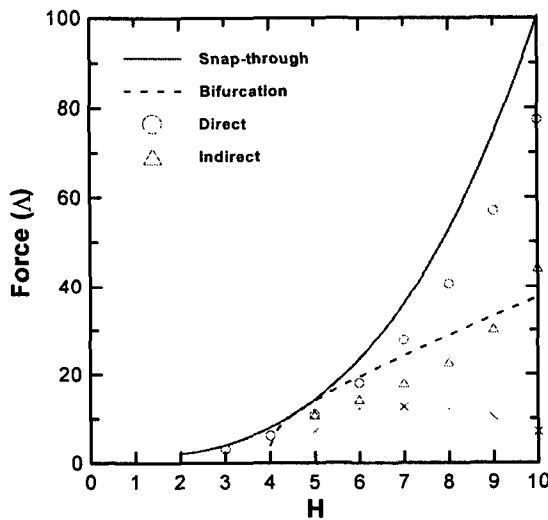


그림 11. 좌굴하중의 분포

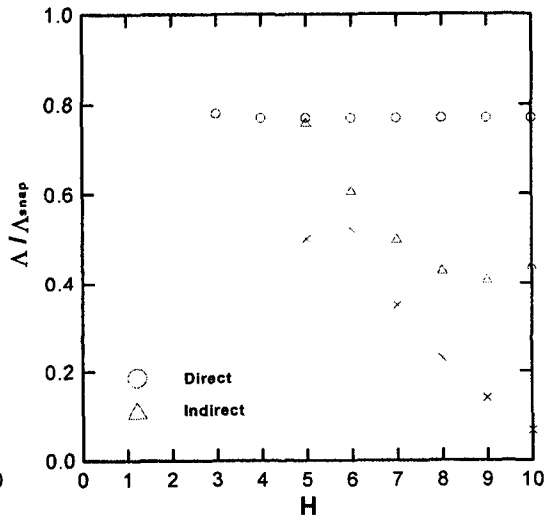


그림 12. 좌굴하중의 비교

정적 해석결과는 실선이 뿔좌굴 하중을, 점선이 분기좌굴 하중을 나타내며, 동적해석결과는 직접좌굴하중을 「○」으로, 간접좌굴하중을 「△」으로 나타내었다. 여기서 「×」는 동적해석에서 형상초기불완전 $D_2^0 = 0.001H$ 를 주었을 때 D_2 모드의 최초 증폭점을 나타낸 것이다. 이들 결과들을 정적 뿔좌굴하중과 비교하여 그 비율을 나타낸 것이 그림12이다.

직접좌굴 하중레벨은 뿔좌굴의 약 80%정도이나, 간접좌굴 하중레벨은 형상파라미터 H 가 커짐에 따라 크게 감소함을 알 수 있다.

5. 결 론

본 연구에서는 아치 구조물의 동적 불안정 현상을 파악하기 위하여 비선형 운동방정식을 유도하고, 이를 Galerkin법에 의해 이산화시킨 후 Newmark-β법을 이용하여 좌굴해석을 하였다. 대상모델은 정현형 분포

하중(sinusoidal distributed excitation)을 받는 양단 핀으로 고정된 정현형 아치(sinusoidal shaped arch)로 하였다. Step하중에 대한 동적 해석결과는 다음과 같다.

- 1) 직접좌굴(direct snapping)은 뒹좌굴의 약 80%정도이다.
- 2) 간접좌굴(indirect snapping)은 형상파라미터 H 가 증가함에 따라 급격히 감소한다.
- 3) 간접좌굴 현상은 형상초기불완전(initial imperfection)의 도입과 함께 비선형성의 증폭으로 인해 카오스(chaos)가 생성된다.

이상으로 얇은 아치 구조물의 동적 불안정 현상을 정리하였다. 초기불완전으로 인한 동적 불안정 현상은 비선형계에 크게 의존하고, 이는 카오스의 생성으로 발전하게 되며, 추후 지속적인 연구가 요구된다.

감사의 글

본 연구는 초대형 구조시스템 연구센터(STRESS)의 지원에 의해 수행되었으며 이에 깊은 감사를 드립니다.

참고문헌

1. 권택진, 한상을, 최현식, 김승덕, 정명채, 서삼열, *셸구조론*, 한국전산구조공학회 편, 1998.
2. 한상을, 김승덕, 서일교, 서삼열, 최옥훈, *대공간 구조물의 해석 및 설계*, 교재 15-2, 한국전산구조공학회, 1997.
3. 김승덕, 권택진, 박지윤, "얇은 정현형 아치의 분기좌굴에 관한 연구," *한국전산구조공학회 논문집*, 제 11권 20호, 1998, pp.457-464.
4. 金勝德, 扁平構造物の動的安定に関する研究, 東京大學博士學位論文, 1990.
5. Hoff, N. J. and Bruce, V. G., "Dynamic analysis of the buckling of laterally loaded flat arches," *Q. Math. Phys.*, Vol.32, No.4, 1954, pp.276-288.
6. Hsu, C. S., "The effects of various parameters on the dynamic stability of a shallow arch," *J. Appl. Mech.*, Vol.34, No.2, 1967, pp.349-358
7. Lock, M. H., "Snapping of a shallow sinusoidal arch under a step pressure load," *AIAA J.*, Vol.4, No.7, July, 1966, pp.1249-1256.
8. Fulton, R. E. and Barton, F. W., "Dynamic buckling of shallow arches," *J. Eng. Mech. Div.*, ASCE, Vol.97, No.EM3, June, 1971, pp.865-877
9. Lo, D. L. C. and Masur, E. F., "Dynamic buckling of shallow arches," *J. Eng. Mech. Div.*, ASCE, Vol.102, No.EM5, October, 1976, pp.901-917.
10. Huang, N. C. and Nachbar, W., "Dynamic snap-through of imperfect viscoelastic shallow arches," *J. Appl. Mech.*, ASME, June, 1968, pp.289-296.
11. Huang, K. Y. and Plaut, R. H., "Snap-through of a shallow arch under pulsating load," *Stability in the Mechanics of Continua*(edited by F. H. Schroeder), pp.215-223, Springer-Verlag, Berlin, 1982.
12. Yao, Jian and Song, Boquan, "The Dynamic Elastic Buckling of a Circular Arch with Finite Displacements and Initial Imperfections," *Int. J. Impact Engng.*, Pergamon, Vol.11, No.4, July, 1991, pp.503-513.
13. Kim, S. D., Kang, M. M., Kwun, T. J. and Hangai, Y., "Dynamic Instability of Shell-Like Shallow Trusses Considering Damping," *Computers & Structures*, Vol. 64, No. 1-4, 1997, pp.481-489.
14. Bolotin, V. V., *Dynamic Stability of Elastic Systems*, Gostekhizdat, Moscow, 1956.