

## 회전자유도를 갖는 평면셸요소에 의한 박판구조물의 선형좌굴해석

### Linear Buckling Analysis of Thin-walled Structures by Flat Shell Elements with Drilling D.O.F.

최 창 근\*  
Choi, Chang-Koon

송 명 관\*\*  
Song, Myung-Kwan

#### ABSTRACT

Application of the flat shell element with drilling D.O.F. to linear buckling analysis of thin-walled structures is presented in this paper. The shell element has been developed basically by combining a membrane element with drilling D.O.F. and Mindlin plate bending element. Thus, the shell element possesses six degrees-of-freedom per node which, in addition to improvement of the element behavior, permits an easy connection to other six degrees-of-freedom per node elements (CLS, Choi and Lee, 1995). Accordingly, structures like folded plate and stiffened shell structure, for which it is hard to find the analytical solutions, can be analyzed using these developed flat shell elements. In this paper, linear buckling analysis of thin-walled structures like folded plate structures using the shell elements (CLS) with drilling D.O.F. to be formulated and then fulfilled. Subsequently, buckling modes and the critical loads can be output. Finally, finite element solutions for linear buckling analysis of folded plate structures are compared with available analytic solutions and other researcher's results.

#### 1. 서 론

판(plate)의 결합으로 이루어진 절판구조물 등과 같은 박판구조물의 역학적인 거동에 대한 수치해석에 있어서 주로 유한요소해석에 의존하고 있으며, 주로 셸요소 또는 입체요소에 의한 유한요소모형을 사용하게 된다. 그러나, 일반적으로 5 개의 자유도(D.O.F.)를 갖는 셸요소를 사용하여 해석할 경우에는 판이 접하는 부분에서 연직방향 회전(drilling D.O.F.)의 강성과 그 영향을 정확하게 판단하지 못함으로 인하여 해석 결과가 정확하지 않거나, 정확한 해석을 위해서는 요소 세분화 및 특수한 방법을 요구하게 되고, 입체 요소를 사용하여 해석할 경우에는 구조물을 많은 요소수로 세분화해야 하는 과정을 거쳐야 하므로 효율성을 잃게 된다. 따라서, 이러한 단점들을 극복하고 정확한 유한요소해석 결과를 얻기 위해서는 판의 연직방향 회전에 대한 적절한 강성 평가와 그 영향들이 고려된 새로운 셸요소를 사용하여야 한다. 뿐만 아니라, 유한요소해석에 의한 실제적인 구조 해석시에 나타나는 셸요소와 다른 회전 자유도를 갖는 요소들 간의 연결 문제를 해결하기 위해서는 연직방향 자유도가 있는 셸요소의 개발과 사용을 필요로 하게 된다. 이러한 연구는 최근 유한요소해석 분야에서 활발히 연구되고 있으며, 많은 방법들이 제시되고 있다. 기존의 5 개의 자유도를 갖는 셸요소의 한계성을 극복하기 위해서 회전자유도를 갖는 평면응력요소(CLM)와 Mindlin 평판힘요소를 결합하여 개발된 CLS 요소(Choi and Lee, 1995)는 이

\* 한국과학기술원 토목공학과 석좌교수

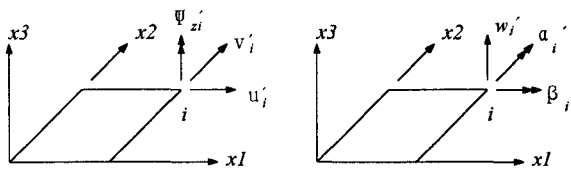
\*\* 한국과학기술원 토목공학과 박사과정

미 많은 시험예제해석을 통하여 선형탄성영역에서는 정확한 해석결과를 주는 것으로 검증되었다<sup>(1)</sup>.

특히, 절판 구조물의 선형좌굴해석시에는 6 개의 자유도를 갖는 쉘요소를 사용함으로써 위에서 언급한 다른 형태의 요소들이 갖고 있는 문제점들을 극복하면서 정확한 선형좌굴해석이 가능하다. 따라서, 본 연구에서는 CLS 요소를 이용하여 절판구조물 등과 같은 박판 구조물의 선형좌굴해석 수식화 과정을 제시하고, 제시된 수식화 과정에 의해서 실제 박판구조물을 해석하고 좌굴형상(buckling modes)과 임계하중(critical loads)을 예측한다.

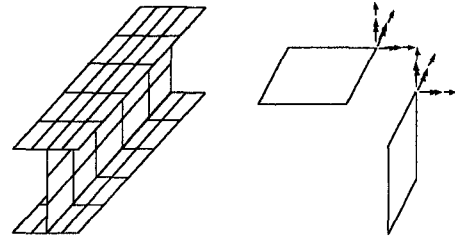
## 2. 선형좌굴해석 수식화 과정(formulation)

CLS 요소에 있어서 면내거동과 면외거동이 서로 독립적이라고 가정하며, 평면쉘요소의 강성행렬은 평면응력요소와 평판휨요소의 강성행렬을 단순조합하여 구성할 수 있다. 요소좌표계(국부좌표계) 상에서의 평면응력요소와 평판휨요소의 절점자유도는 그림 1(a), (b)와 같다. 따라서, CLS 요소를 이용하면 그림 2와 같이 절판구조물의 절점 자유도간의 연결 문제를 해결할 수 있다.



(a) 평면응력요소 (b) 평판휨요소

그림 1: 변이요소의 형상 및 요소좌표계 상의 평면응력요소 및 평판휨요소의 절점자유도



(a) I행보 (b) 절점자유도간의 연결

그림 2: 절판구조물(folded plate structures)에서의 절점자유도 간의 연결

### 2.1 회전 자유도를 갖는 평면응력요소

회전자유도를 가지는 평면응력요소의 기본적인 거동을 규정하는 형상함수는 Allman의 변위장 형태(식(1))를 가지며(그림 3), Hughes와 Brezzi가 제안한 변분원리에 의한 정식화(식(2))로부터 변분 방정식(variational equation)을 구하여 혼합형태의 정식화에 의한 요소강성행렬을 구성한다.

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}' \\ \mathbf{v}' \end{Bmatrix} = \mathbf{u}'_{\mathbf{m}} = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \mathbf{u}_i + \sum_{i=1}^4 \frac{1}{8} (l_{ki} N_i \mathbf{n}_{ki} - l_{ij} N_j \mathbf{n}_{ij}) \Psi_{zi} + \sum_{i=5}^n \frac{1}{8} l_{op} N_i \mathbf{n}_{op} \Psi_i + N_0 \Delta \mathbf{u}_0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{\gamma}(\nu, \omega, \text{skew } \tau) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\text{symm } \nabla \nu) \cdot \mathbf{C} \cdot (\text{symm } \nabla \nu) d\Omega + \int_{\Omega} \text{skew } \tau^T \cdot (\text{skew } \nabla \nu - \omega) d\Omega \\ &\quad - \frac{1}{2} \gamma^{-1} \int_{\Omega} |\text{skew } \tau|^2 d\Omega - \int_{\Omega} \nu \cdot \mathbf{f} d\Omega \end{aligned} \quad (2)$$

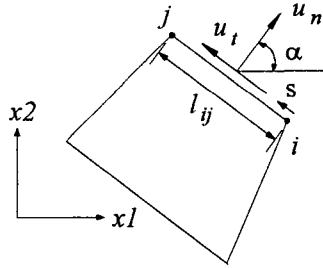


그림 3: 회전자유도를 갖는 평면응력요소

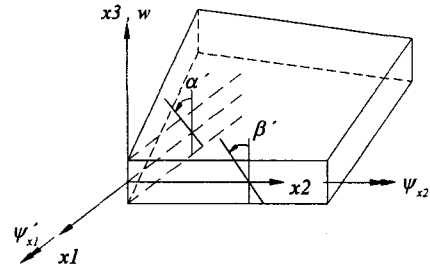


그림 4: Mindlin 평판휨요소

## 2.2 평판휨요소

Reissner-Mindlin 평판이론을 바탕으로하는 평판휨요소는 연직처짐 변위장과 회전변위장을 별도로 가정하며 변위장을  $C^0$  연속성만 만족하면 되고 전단변형을 고려할 수 있다. 일반적인 감절점 Mindlin 평판휨 등매개변수요소의 형상은 그림 4 와 같고 변절점 평판휨요소의 변위장은 식(3)과 같이 정의된다.

$$\mathbf{u}_p = \{w', \psi'_{x1}, \psi'_{x2}\}^T = \{w', \beta', \alpha'\}^T \approx \mathbf{N} \mathbf{u}_{pi}, \quad i=1, \dots, n \quad (3)$$

정확한 전단변형을 행렬을 산정하기 위하여, 본 변절점 평판휨요소에는 대체전단변형률장이 사용된다. 사용된 대체전단변형률장은 4 절점 요소에 적용할 수 있도록 제시된 Donea 의 전단변형률장을 변절점 요소에까지 확장하여 적용한 것이다.

Green-Lagrangian 변형률 중 평판휨요소에서 정의되는 변형률은 식(4)와 같다.

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_m \\ \boldsymbol{\varepsilon}_p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_p^L \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_p^{NL} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

평판휨요소에서 정의되는 Green-Lagrangian 변형률의 선형 부분과 비선형 부분은 식(5)와 같다.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_p^L = \begin{Bmatrix} \alpha'_{,x'} \\ -\beta'_{,y'} \\ \alpha'_{,y'} - \beta'_{,x'} \\ w'_{,x'} + \alpha' \\ w'_{,y'} - \beta' \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_p^L \mathbf{u}_p \quad ; \quad \boldsymbol{\varepsilon}_p^{NL} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}(w'_{,x'})^2 \\ \frac{1}{2}(w'_{,y'})^2 \\ w'_{,x'} w'_{,y'} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \mathbf{A}_p \mathbf{R}_p \quad (5)$$

여기서,

$$\mathbf{A}_p = \begin{bmatrix} w'_{,x'} & 0 \\ 0 & w'_{,y'} \\ w'_{,y'} & w'_{,x'} \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{R}_p = \begin{Bmatrix} w'_{,x'} \\ w'_{,y'} \end{Bmatrix} = \mathbf{G}_p \mathbf{u}_p = \mathbf{G}_p \begin{Bmatrix} w' \\ \beta' \\ \alpha' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{i,x'} & 0 & 0 \\ N_{i,y'} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w' \\ \beta' \\ \alpha' \end{Bmatrix} \quad (6)$$

따라서, 요소강성행렬의 응력 stiffening 부분은 식(7)과 같이 구할 수 있다<sup>(2)</sup>.

$$d\mathbf{A}_p^T \boldsymbol{\sigma}_m = \begin{bmatrix} dw'_{x'} & 0 \\ 0 & dw'_{y'} \\ dw'_{y'} & dw'_{x'} \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \tau_{xy'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{x'} & \tau_{xy'} \\ \tau_{xy'} & \sigma_{y'} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dw'_{x'} \\ dw'_{y'} \end{Bmatrix} = \mathbf{S}_m \mathbf{G}_p d\mathbf{u}_p \quad (7)$$

### 2.3 평형 방정식(Equilibrium Equations)

고전적인 좌굴해석에 있어서는 응력 stiffening 강성행렬  $[\mathbf{K}_\sigma]$ 를 사용하게 된다. 먼저 임의의 외부하중  $\mathbf{R}_{ref}$ 를 작용시켜서 정적해석을 수행하여 각 평면셀요소에 발생하는 막응력(membrane stress,  $\sigma_m$ )을 구한다. 따라서,  $\mathbf{R}_{ref}$ 에 해당하는 응력 stiffening 강성행렬  $[\mathbf{K}_\sigma]_{ref}$ 를 식(8)에 의해 구성한다.

$$[\mathbf{K}_\sigma]_{ref} d\mathbf{u} = \int_V \mathbf{G}_p^T \mathbf{S}_m \mathbf{G}_p dV d\mathbf{u}_p \quad (8)$$

언어지는 좌굴해석 시의 평형 방정식은 식(9)에서와 같다.

$$\left( [\mathbf{K}] + \lambda_{cr} [\mathbf{K}_\sigma]_{ref} \right) \mathbf{u} = \lambda_{cr} [\mathbf{R}]_{ref} \quad (9)$$

점증 평형방정식으로 나타내면 최종적으로 식(10)과 같은 고유치 문제를 도출하게 된다<sup>(3)</sup>.

$$\left( [\mathbf{K}] + \lambda_{cr} [\mathbf{K}_\sigma]_{ref} \right) d\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (10)$$

고유치 문제의 해석에 있어서 subspace iteration method를 사용하는데, 이 방법은 주요한 몇 개의 저차 모드를 구하는 데에 유용하게 사용할 수 있는 방법이다. 필요로 하는 좌굴형상의 수가  $p$  개라면 초기에 가정되는 벡터의 수  $q$ 는 식(11)에서 결정한다<sup>(4)</sup>.

$$q = \min(2p, p + 8) \quad (11)$$

## 3. 예제 해석

### 3.1 일축 압축하중을 받는 정사각형 평판(square plate)

2차원 평면 내의 해석 예제로서 단순지지된 정사각형 평판에 일축 압축하중을 가하고 선형좌굴해석한다(그림5). 평판의 물성치는  $E=2 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$ ,  $\nu=0.3$ ,  $a=b=1.0\text{m}$ ,  $t=0.01\text{m}$ 이다. 그림7에서의  $\lambda_{cr}^{(i)}$ 는  $i$ 번째 좌굴형상의 임계하중(critical load)을 나타내며, 각 임계 하중에 대한 비교 가능한 analytic solution은  $\lambda_{cr}^{anal(1)} = 723$ ,  $\lambda_{cr}^{anal(2)} = 1,130$ ,  $\lambda_{cr}^{anal(3)} = 2,008$ ,  $\lambda_{cr}^{anal(4)} = 2,892$ 이며(Timoshenko and Gere)<sup>(5)</sup>, 해석 결과 근사한 좌굴형상과 임계하중을 구할 수 있다. 세번째 좌굴형상에 대한 것만을 제외하고는 2% 이내의 정확한 해석 결과를 얻을 수 있다.

### 3.2 축하중을 받는 원통셸(cylindrical shell)

3차원 공간 상의 셸구조에 대한 예제로 축하중을 받는 원통셸을 해석한다. 원통셸의 위와 아래부분 경계는 힌지로 되어 전체 구조를 지탱하고 있다(그림6). 원통셸의 물성치는  $E=2 \times 10^5$ ,  $\nu=0.3$ ,  $a=20.0$ ,  $l=10.0$ ,  $t=1.0$ 으로 무차원 값을 사용한다. 첫번째 좌굴형상에 대한 임계하중의 analytic solution은  $\lambda_{cr}^{anal(1)} = 12,105$ 이며(Timoshenko and Gere)<sup>(6)</sup>, 해석 결과와는 5%이내의 오차를 갖고 있다.

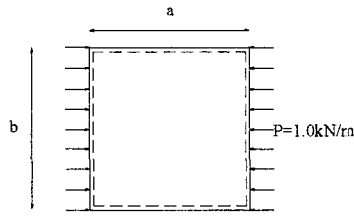


그림5: 일축 압축하중을 받는 정사각형 평판

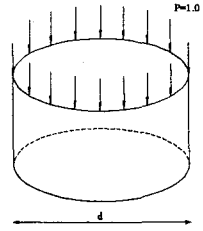
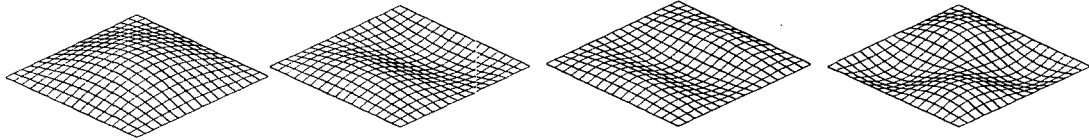


그림6: 압축하중을 받는 원통셸



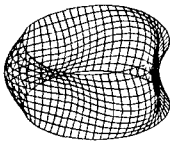
$$\lambda_{cr}^{(1)} = 727$$

$$\lambda_{cr}^{(2)} = 1,149$$

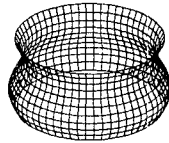
$$\lambda_{cr}^{(3)} = 2,104$$

$$\lambda_{cr}^{(4)} = 2,949$$

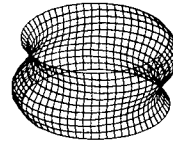
그림7: 일축 압축하중을 받는 정사각형 평판의 좌굴형상(buckling modes)과 임계하중(critical loads)



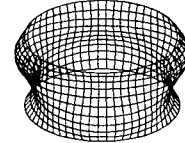
$$\lambda_{cr}^{(1)} = 11,500$$



$$\lambda_{cr}^{(2)} = 11,818$$



$$\lambda_{cr}^{(3)} = 11,880$$



$$\lambda_{cr}^{(4)} = 12,163$$

그림8: 압축하중을 받는 원통셸의 좌굴형상(buckling modes)과 임계하중(critical loads)

앞의 두 예제 해석을 통하여 압축하중을 받는 평면 및 공간 상의 구조물의 선형좌굴해석에 있어서 비교적 정확한 해석 결과를 얻을 수 있었다. 앞의 두 예제는 기존의 5개 자유도를 갖는 쉘요소 또는 평판형요소로서 해석이 가능하지만, 다음의 예제 해석에 있어서는 회전자유도(drilling D.O.F.), 즉, 6자유도를 갖는 쉘요소의 사용을 필요로 한다.

### 3.3 일축 압축하중을 받는 stiffener가 있는 평판

절판구조물(folded plate structures)에 대한 첫번째 예제로서 stiffener가 있는 평판에 일축 압축하중을 가하여 선형좌굴해석을 한다(그림9). 평판의 물성치는  $E=2 \times 10^8 \text{kN/m}^2$ ,  $\nu=0.3$ ,  $a=b=1.0\text{m}$ ,  $h=0.01\text{m}$ ,  $e=0.06\text{m}$ 이다. 선형좌굴해석 결과를 표1에서와 같이 각 좌굴형상과 임계하중에 대해 analytic solution(Timoshenko and Gere) 및 다른 연구 결과와 비교가 가능하다(그림11).

### 3.4 축하중을 받는 Box형 기둥

절판구조물(folded plate structures)에 대한 예제로서 Box형 단면을 갖는 기둥에 일축 압축하중을 가하여 선형좌굴해석을 한다(그림10). Box형 기둥의 물성치는  $E=210.133\text{kN/mm}^2$ ,  $\nu=0.316$ ,  $a=b=l=480.0\text{mm}$ 이다. 선형좌굴해석 결과를 표2에서와 같이 각 좌굴형상과 임계하중에 대해 다른 연구 결과와 비교가 가능하다(그림12).

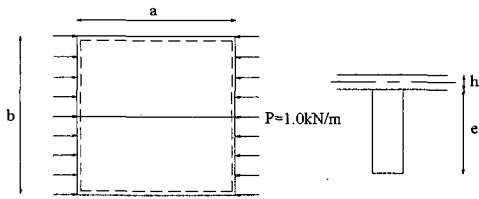


그림9: 일축 압축하중을 받는 stiffener가 있는 정사각형 평판

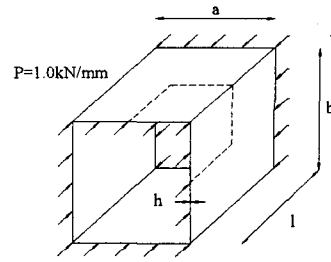


그림10: 압축하중을 받는 Box형 기둥

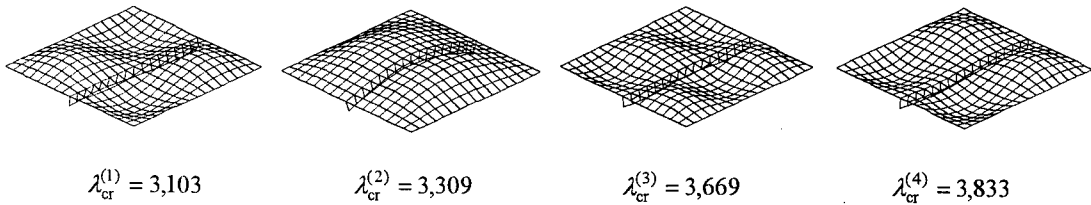


그림11: 일축 압축하중을 받는 stiffener가 있는 정사각형 평판의 좌굴형상(buckling modes)

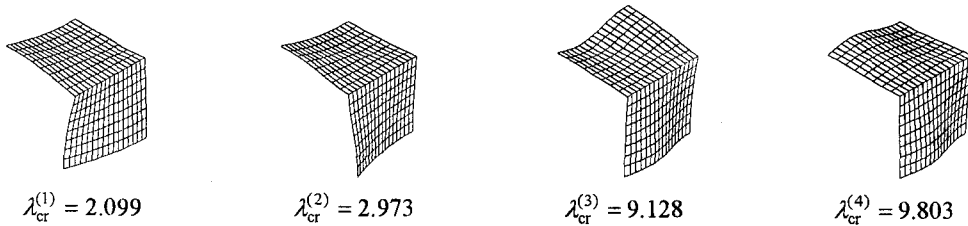


그림12: 압축하중을 받는 Box형 기둥의 좌굴형상(buckling modes)

표 1: 일축 압축하중을 받는 stiffener가 있는 정사각형 평판의 임계 하중(critical loads) (kN/m)

Solution	Mesh	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4
Analytic sol.(Timoshenko and Gere) <sup>(5)</sup>	-	2892 (2,2)	-	-	-
Z. Waszczyszyn et al(PQK1+BSB5) <sup>(6)</sup>	16×16+16	3347 (2,2)	3594 (1,1)	3667 (3,2)	-
Z. Waszczyszyn et al(FQK1) <sup>(6)</sup>	16×16+16	3258 (2,2)	3736 (3,2)	3997 (2,3)	-
Present	16×16+16	3103 (2,2)	3309 (1,1)	3669 (3,2)	3833(2,3)

표 2: 압축하중을 받는 Box형 기둥의 임계하중(critical loads) (kN/mm)

Solution	Mesh	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4
A. Eriksson(8-node) <sup>(7)</sup>	2×4	2.010	3.018	9.595	-
A. Eriksson(9-node) <sup>(7)</sup>	2×4	2.002	2.896	9.429	-
Z. Waszczyszyn et al(FTK1) <sup>(6)</sup>	8×16	2.045	2.976	9.000	-
Present	8×16	2.099	2.973	9.128	9.803

### 3.5 I형 보(기둥)

대표적인 철관구조물인 I형 보(기둥)에 대해 압축하중( $P_1=1.0N$ )과 측면하중( $P_2=1.0N$ )을 작용시켜 선형좌굴해석을 하며(그림13), I형 보(기둥)의 재료 물성치는  $E=2 \times 10^4 N/mm^2$ ,  $\nu=0.3$ 이다. 압축하중( $P_1=1.0N$ )은 I형 보(기둥)의 단면(플랜지+웹)에 등분포한다고 가정하고, 요소절점 하중으로 작용시키고, 측면하중( $P_2=1.0N$ )은 I형 보의 웹에만 등분포한다고 가정하고, 마찬가지로 요소절점 하중으로 작용시킨다. 선형좌굴해석을 통하여 그림14, 15에서와 같이 각 하중상태에 대한 좌굴형상과 임계하중(단위:N)의 예측이 가능하다.

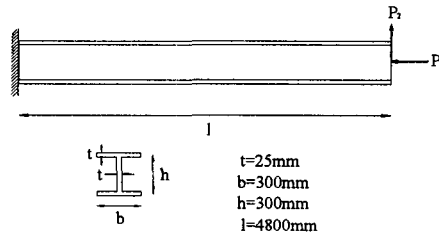


그림13 : I형보(기둥)의 형상과 하중 상태

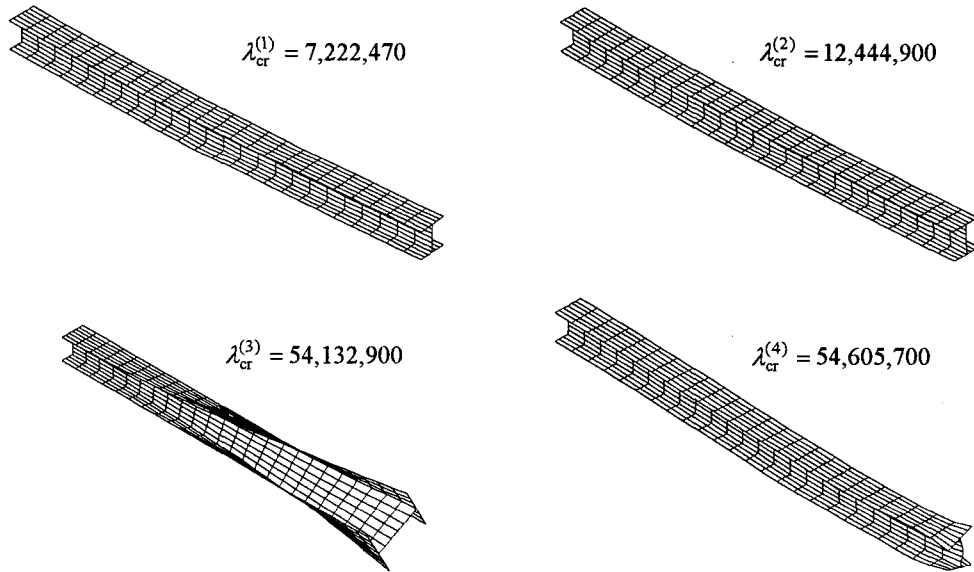


그림14 : 압축하중( $P_1$ )을 받는 I형 기둥의 좌굴형상(buckling modes)과 임계하중(critical loads)

실제 구조물의 좌굴하중(buckling load)은 선형좌굴해석 결과로 얻어진 임계하중(critical load)과 전혀 다른 값을 가질 수 있다. 실제 구조물에 있어서는 하중 또는 구조물 자체의 불완전성(imperfection)이 존재하기 때문이다. 따라서, 본 연구결과를 이용할 경우에는 좌굴형상 및 좌굴거동 특성의 파악, 예측 및 설계 자료 제공에 도움을 주며, 실제의 좌굴하중의 해석을 위해서는 재료 및 기하 비선형 해석을 행하는 것이 바람직할 것이다.

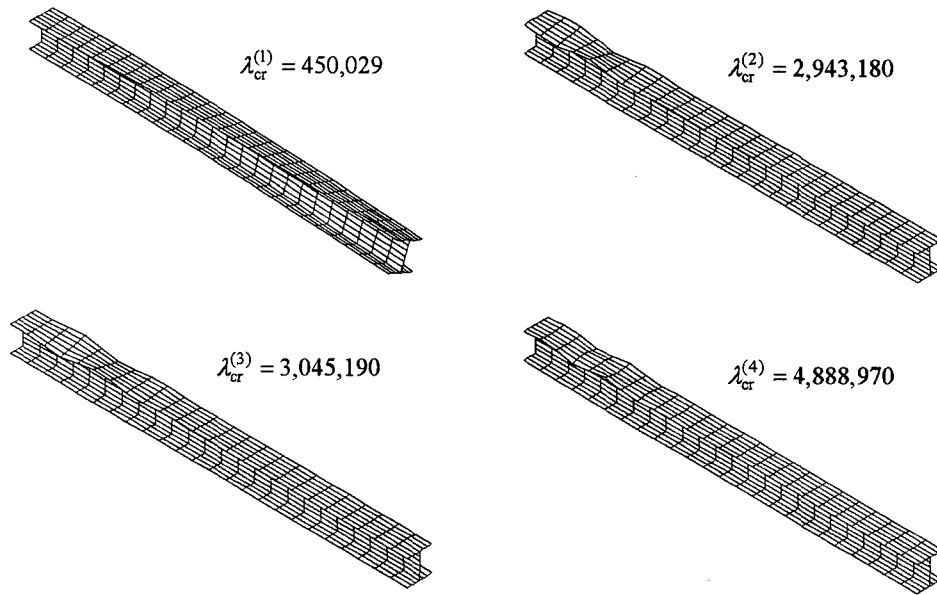


그림15: 측면하중( $P_2$ )을 받는 I형 보의 좌굴형상(buckling modes)과 임계하중(critical loads)

#### 4. 결 론

본 연구에서는 회전자유도(drilling D.O.F.)를 갖는 평면셸요소(CLS)의 선형좌굴해석 수식화 과정을 제시하였고, 여러 가지 박판구조물의 해석 예제를 통하여 타당성을 검증하였다. 기존의 유한요소해석 방법으로는 해석이 까다로웠던 복잡한 판의 결합으로 제작된 절판 및 박판구조물의 선형좌굴해석에 있어서 본 연구에서 제안된 유한요소 및 수식화 과정을 이용하면 정확하고 효율적인 해석이 가능하며, 특히, 복잡한 하중 상태 및 경계조건을 가질 경우 제안된 방법을 이용하여 해석하는 것이 용이하다. 따라서, 박판 구조물, 특히 절판구조물의 안정성 문제의 해석에 있어서 그 구조물의 좌굴 거동 특성 파악, 예측 및 설계 자료 제공에 이용될 수 있다.

#### 참고 문헌

1. C.K. Choi and W.H. Lee, 'Versatile Variable-node Flat Shell Element', *Journal of Engineering Mechanics(ASCE)*, 122(5), 432-441, 1996.
2. O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor, *The Finite Element Method: Solid and Fluid Mechanics, Dynamics and Nonlinearity*, Vol.II, McGraw-Hill, London, 1989.
3. R.D. Cook, D.S. Malkus and M.E. Plesha, *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, 3<sup>rd</sup> ed., John Wiley & Sons, New York, 1989.
4. K.J. Bathe, *Finite Element Procedures*, Prentice-Hall, USA, 1996.
5. S.P. Timoshenko and J.M. Gere, *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill, New York, 1961.
6. Z. Waszczyszyn, C. Cichon and M. Radwanska, *Stability of Structures by Finite Element Methods*, Elsevier, The Netherlands, 1994.
7. A. Eriksson, 'On a Thin Shell Element for Nonlinear Analysis, based on the Isoparametric Concept', *Computers & Structures*, 42(6), 927-939, 1992.