

막 구조물의 재단 패턴 결정에 관한 연구

A Study on the Cutting Pattern Determination for Fabric Structures

최 호¹⁾ 이 장 복²⁾ 김 재 열³⁾ 서 삼 열⁴⁾ 권 택 진⁵⁾
Choi, Ho Lee, Jang-Bog Kim, Jae-Yeol Sur, Sam-Uel Kwun, Taek-Jin

ABSTRACT

The object of this study is shape finding and cutting pattern generation of membrane structures under the following assumptions : (1) material is linearly elastic (2) stress state is plane stress.

Cable and membrane structures should introduce the nonlinear analysis considering geometric nonlinearity because these structures deform largely under the external loads. The analysis procedure is consisted of three steps considering geometric nonlinearity unlike any other structures. First step is the shape finding analysis to determine the initial equilibrium shape. Second step is the stress-deformation analysis to investigate the behaviors of structures under various external loads. Once a satisfactory shape has been found, a cutting pattern based on the shape finding analysis may be generated from the view point of construction.

In this paper, after shape finding analysis, cutting pattern determination procedure using weighted least-square minimization flattening method and some results are presented.

1. 서 론

대공간 구조물이라 함은 구조물의 곡률을 이용하여 힘의 흐름을 자연스럽게 하고 휨모멘트의 영향을 가능한 한 저감시켜 면내력만으로 외부하중에 저항하게 하는 셸구조의 원리를 기초로 한 형태 저항형 구조이다. 따라서 최소의 재료로 가볍고 얇게 대공간을 만들 수 있는 장점이 있다.

대공간 구조물 중에서도 연성구조물의 일종인 막구조, 케이블구조, 또는 복합구조체로서 막 및 케이블 구조물은 기존의 일반 건축 구조재료보다 가볍고, 축 강성은 강하나 휨강성이 매우 작은 막과 케이블을 사용하여, 대공간 구조물을 보다 효과적으로 구축할 수 있는 구조 시스템을 말한다.

막 및 케이블 구조물은 초기 강성이 매우 약하기 때문에 초기 강성을 확보하기 위해서는 초기응력의 도입이 필수적이다. 즉, 연성구조 시스템인 막 및 케이블 구조물은 초기강성을 갖기 전에는 불안정한 상태를 나타내지만, 초기 강성의 도입과 함께 안정상태가 된다.^{6),7)}

초기강성이 없는 재료로 구성되는 막 및 케이블 구조물은 다른 일반적인 구조물의 해석과는 달리, (1) 초기응력 도입에 의한 초기 형상을 결정하는 형상해석, (2) 초기 형상 결정 후, 외부하중에

1) 성균관대학교 건축공학과, 석사과정
2) 정회원, 성균관대학교 건축공학과, 박사과정
3) 성균관대학교 과학기술연구소 특별연구원, 공학박사
4) 정회원, 대림대학 건축설비과 조교수, 공학박사
5) 정회원, 성균관대학교 건축공학과 교수, 공학박사

대한 응력-변형 해석이 필요하게 된다.

우선 형상해석은 막 및 케이블 구조물 만에만 해당하는 것으로, 일반적으로 막구조의 형태는 복잡한 3차원적인 곡면이고 막재료에 초기장력을 도입함으로써 처음 외력에 저항할 수 있는 안정된 형태가 형성된다. 따라서 일반 구조물의 구조설계방법과는 근본적으로 다르다. 즉, 설계단계에 있어서 복잡한 3차원적 곡면형상을 정확하게 지정하기가 어렵고, 지정한다고 하더라도 곡면형상이 역학적인 초기장력의 평형조건을 만족한다고 할 수 없다. 이런 막 구조물 특유의 해석을 형상해석이라 한다. 초기 평형형상이 결정된 후에 여러 가지 외력이 작용하였을 때 변형, 응력 분포 등을 파악하는 응력-변형해석을 수행한다.

해석적 관점에서, 막구조물은 압축과 휨강성이 적은 구조재료를 사용함으로써 대변형 거동을 하기 때문에 해석과정에서는 대변형을 고려한 기하학적 비선형 해석을 하여야 하며 다음과 같은 가정을 도입한다.⁵⁾

- 1) 재료는 선형탄성, 등질·등방성
- 2) 대변형을 고려하기 위하여 기하학적 비선형을 고려
- 3) 응력상태는 평면응력

시공적 관점에서, 형상해석이 완료되고 응력-변형 해석을 하기 전 형상해석에서 얻어진 복잡한 3차원 형상을 2차원 막재단도로 만들어야 한다. 이러한 재단도의 중요성은 형상해석에서 얻어진 초기장력의 분포와 실제 시공시 도입된 장력의 상태가 근접하도록 하여 응력-변형 해석이 합리적인 해석결과가 되도록 하는데 있다.^{1),2),3),4)}

본 연구는 막구조물의 등장력 평형상태에 관한 형상해석 후 시공시 이론과 근접한 형상을 실현하는데 필요한 재단도를 구하는데 그 목적이 있다.

2. 재단도 정식화

재단도 해석을 하기 전에 먼저 그림 1. 2와 같이 평면 메쉬분할과 형상해석을 한 후 형상해석 결과를 막재 폭 이내로 적당히 추출(그림 3.)하여 재단도 해석(그림 4.)을 하게 된다.

형상해석에서 구한 초기평형 상태의 구조물은 일반적으로 등장력 곡면이 되나 2차원으로 전개할 수 없는 3차원 형상이기 때문에 다음과 같은 방법을 통하여 재단도를 구하여야 한다.

- (1) 실제 생산되는 막재의 최대폭을 고려하여 공간상에서 몇 개의 큰 조각으로 분할한다.
- (2) 각각의 막요소에 대한 3차원 데이터를 2차원의 평면형상으로 바꾼다.

공간상에서 재단도 분할은 제한된 막 재료폭 때문에 천 폭당 하나의 요소 배치를 사용하여야 한다. 이것은 이중곡면으로 이루어진 막의 형상을 정확하게 묘사하고 알맞은 재단도 데이터를 만들기 위해서 천이 몇 개의 요소 조각으로 구성되어야 함을 뜻한다. 3차원 곡면을 2차원 바닥에 평평하게 펼치기 위하여 길이의 변화가 최소화되어야 한다는 경계조건을 이용한 최소자승법을 사용한다.^{1),3),4)}

$$S(x) = \sum_{i=1}^m \phi_i^2(x) \quad (1)$$

여기서, m : 한 조각에 있는 요소의 수, x : 평면 막의 좌표 벡터

$$\phi_i(x) = \sqrt{(x_{i,1} - x_{i,2})^2 + (y_{i,1} - y_{i,2})^2} - d_i \quad (2)$$

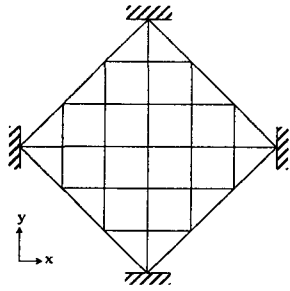


그림 1. 평면 메쉬분할 예

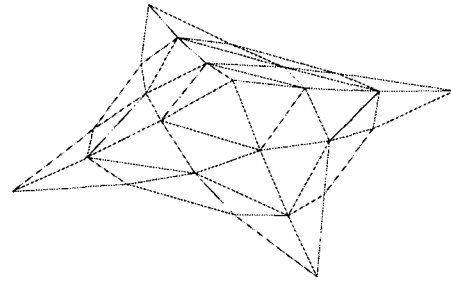


그림 2. 형상 해석 예

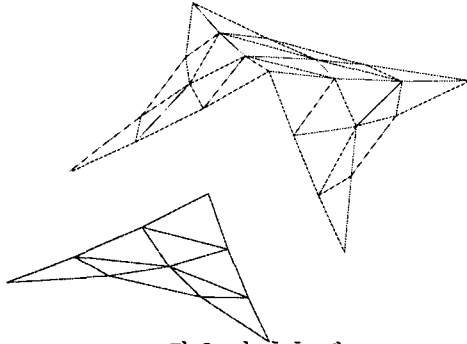


그림 3. 막 추출 예

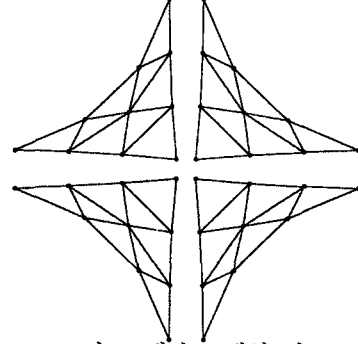


그림 4. 재단도 해석 예

여기서, $(x_{i,1}, y_{i,1}), (x_{i,2}, y_{i,2})$: i 번째 요소에 대한 평면에서의 미지 좌표

$$d_i = \sqrt{(X_{i,1} - X_{i,2})^2 + (Y_{i,1} - Y_{i,2})^2 + (Z_{i,1} - Z_{i,2})^2} \quad (3)$$

여기서, d_i : 형상 탐색 과정에서 결정된 삼차원 절점좌표 $(X_{i,1}, Y_{i,1}, Z_{i,1})$ 와 $(X_{i,2}, Y_{i,2}, Z_{i,2})$ 를 가진 i 번째 요소의 실제 길이

막재료 조각이 바닥에 평평하게 펼쳐진 후에도 인접 조각과의 적합성을 유지하기 위하여, 모든 접합부 경계 길이는 변하지 않는다는 경계조건을 이용한다.

$$S(x) = \sum_{i=1}^m \omega_i \phi_i^2(x) \quad (4)$$

여기서, $\omega_i > 0, i = 1, 2, \dots, m$, 다른 요소의 '가중치'를 결정하는 인자

ϕ_i 가 2차 함수이므로 수치계산을 수행하기 위하여 ϕ_i 를 선형화 한다. 초기값 x_0 를 가정하여, 근사해에 대해서 Taylor series로 ϕ_i 를 전개하고 선형항만 취하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\phi_i(x) = \phi_i(x_0) + \frac{\partial \phi_i(x_0)}{\partial x} (x - x_0) \quad (5)$$

식(4)에 식(5)를 대입하면 식(6)과 같다.

$$S(x) = \sum_{i=1}^m \omega_i \left[\phi_i(x_0) + \frac{\partial \phi_i(x_0)}{\partial x} (x - x_0) \right]^2 \quad (6)$$

\mathbf{x} 에 관한 식(6)의 최소값에 대한 필요조건은 식(7)과 같다.

$$\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} = 2 \sum_{i=1}^m \omega_i \left[\phi_i(\mathbf{x}_0) + \frac{\partial \phi_i}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \right] \frac{\partial \phi_i}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0) = 0 \quad (7)$$

그러므로, 최소자승법에 의하여 구하여진 식(7)을 매트릭스 형태로 표현하면 식(8)과 같이 선형방정식으로 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} = -\mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{C} \quad (8)$$

여기서,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_m}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \phi_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}_0}, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega_m \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = [\phi_1 \ \phi_2 \ \cdots \ \phi_m]_{\mathbf{x}_0}^T, \quad \Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$$

식(8)은 유한 요소 방정식과 비슷하게 식(9)의 형태로 쓸 수 있다.

$$\mathbf{K} \Delta \mathbf{x} = \mathbf{R} \quad (9)$$

여기서,

$$\mathbf{K} = \mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{A} \quad (10)$$

$$\mathbf{R} = -\mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{C} \quad (11)$$

하나의 요소는 트러스 요소와 비슷하며 아래와 같이 각 요소를 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_i &= [\partial \phi_i / \partial x_{i,1} \quad \partial \phi_i / \partial y_{i,1} \quad \partial \phi_i / \partial x_{i,2} \quad \partial \phi_i / \partial y_{i,2}] \\ &= [(x_{i,1} - x_{i,2})/l \quad (y_{i,1} - y_{i,2})/l \quad (x_{i,2} - x_{i,1})/l \quad (y_{i,2} - y_{i,1})/l] \end{aligned}$$

$$l = \sqrt{(x_{i,1} - x_{i,2})^2 + (y_{i,1} - y_{i,2})^2}$$

$$\mathbf{K}_i = \omega_i \mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_i \quad (12)$$

$$\mathbf{R}_i = -\omega_i \phi_i \mathbf{A}_i^T$$

여기서 전체 매트릭스 \mathbf{K} 와 \mathbf{R} 은 모든 요소매트릭스를 조합함으로써 얻을 수 있다. 이때 식(9)의 수렴해

를 얻기 위하여 Newton - Raphson 반복법이 적용된다. Newton - Raphson 반복법에 관한 과정을 살펴보면 다음과 같다.

- (1) 긴 막 재료 조각을 $X - Y$ 평면 위에 투영시킨 초기해 x_0 가정
- (2) K, R 을 구하고 Δx 를 계산
- (3) $x_1 = x_0 + \Delta x$
- (4) 최적해 x_1 사용. $\frac{|\Delta x|^2}{|x|^2} \leq \epsilon$ 일 때까지 (2), (3) 단계 반복 (예를 들어, $\epsilon = 10^{-6}$)

3. 재단도 해석 예

우선, 재단도 해석을 하기 전 평면 메쉬분할과 형상해석에 관한 그림은 아래와 같다. 그림 5에서, 가로·세로 폭은 각각 10m이다. 형상해석시, ● 부분은 +z 방향으로 4m 강제변위를 주고, ■ 부분은 평면에 고정이라고 보고 해석을 하면 그림 6과 같은 결과를 얻을 수 있다.

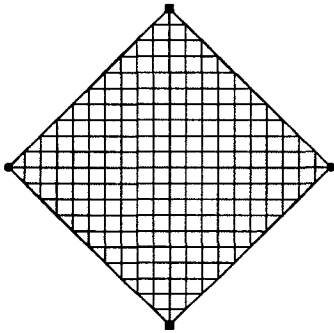


그림 5. 평면 메쉬분할

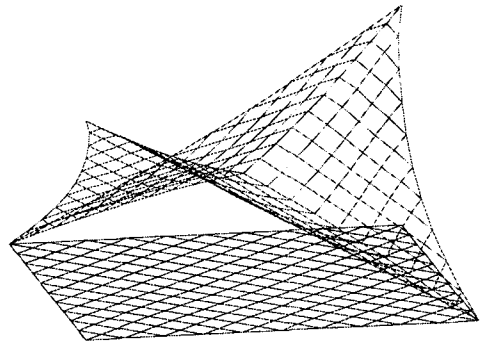


그림 6. 형상해석 결과

형상해석을 수행한 후 최소 자승법, Newton-Raphson법을 이용하여 3차원상의 좌표를 평면상의 좌표로 변환한다. 본 예제에서는 그림 7에서 보는 바와 같이 1/4에 해당하는 부분만 재단도 해석을 수행하면 구조물 전체의 재단도를 얻을 수 있다.

3차원 공간상의 각 요소의 길이 L_i 를 평면상에 투영시킨 후(1_i)에도 길이 변화가 없어야 하므로 결국 식(13)이 만족되어야 한다.

$$L_i = l_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (13)$$

식(12)를 만족하기 위하여 수식 전개 과정에서 최소자승법과 Newton-Raphson법이 도입된다. 식(12)에서 K_i 와 R_i 를 구한 후 전체 매트릭스 K 와 R 은 모든 요소매트릭스를 조합함으로써 얻을 수 있다. 이렇게 구한 K 와 R 로 Δx 를 구한 후 Newton - Raphson법을 이용하여 $|\Delta x|^2 / |x|^2 \leq \epsilon$ (예를 들어, $\epsilon = 10^{-6}$)일 때까지 x 를 증가시키면 식(13)을 만족하는 각 2차원 평면 절점의 좌표를 얻을 수 있다.

본 예제에서는 그림 7에서 보는 바와 같이, 전체 구조물의 1/4에 해당하는 부분을 다시 2조각으로 나누어 재단도 해석을 수행하였다.

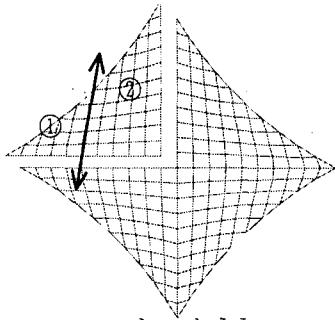


그림 7. 막 추출

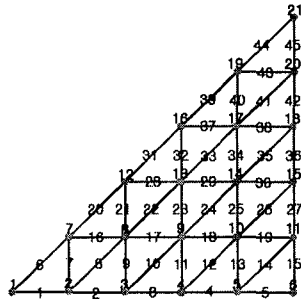


그림 8. 첫 번째 조각의 절점 및 부재번호

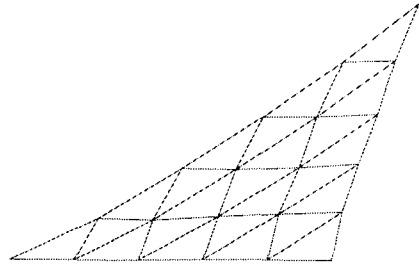


그림 9. 첫 번째 조각의 재단도 해석 결과

3.1 첫 번째 조각의 재단도 해석

첫 번째 조각은 그림 8에서 보는 바와 같이 절점 21개와 부재 45개로 구성된다. 재단도 해석시, 절점 1은 고정(평면에 깔린 후에도 좌표가 변하지 않는다), 부재 45개의 길이의 변화가 없다는 2개의 경계조건을 이용하였고 재단도 해석 후의 결과는 그림 9에서 보는 바와 같다. 재단도 해석 전·후의 각 부재 길이와 최종 2차원 평면 좌표는 표 1에 나타내었다.

표 1. 첫 번째 조각의 부재 길이 비교와 최종 재단도 좌표

부재 번호	재단도 해석 전 각 부재 길이(cm)	재단도 해석 후 각 부재 길이(cm)	절점 번호	재단도 해석 후 얻어진 최종 2차원 평면 좌표
1	53.8892383	53.9292897346	1	(0.0000000, 0.0000000)
2	54.0592268	54.1068673755	2	(53.3845075, 7.6460870)
3	53.9607265	53.9849101570	3	(106.8901232, 15.6898543)
4	53.9048235	53.9102554480	4	(160.2256597, 24.0379720)
5	53.9545179	53.9531402025	5	(213.5178179, 32.1780897)
6	82.9490205	82.6686132343	6	(266.8977706, 40.0216848)
7	41.9438911	41.9522379108	7	(68.0386809, 46.9566973)
8	74.8582661	74.8453162866	8	(113.3808751, 52.3926762)
9	37.2891405	37.2723355686	9	(166.9885452, 63.3932132)
10	76.6952411	76.7295952224	10	(216.6826073, 73.5631830)
...	11	(269.0515604, 83.2343295)
36	46.6134101	46.6441560748	12	(130.7328573, 100.2120396)
37	44.8143950	44.7901441263	13	(175.7277722, 106.3400480)
38	51.4549317	51.4397001492	14	(227.5034869, 116.1173995)
39	82.1681812	82.1176214040	15	(276.3185750, 126.7227420)
40	52.8796747	52.9009893278	16	(191.3899053, 155.5436528)
41	82.1370197	82.1096845690	17	(235.6563442, 162.3729573)
42	49.1806873	49.2084220733	18	(286.1242375, 172.3245652)
43	44.0995465	44.0939565458	19	(249.6844158, 213.3800928)
44	81.9752402	81.9560939391	20	(293.1088671, 221.0347670)
45	54.0920512	54.1020811942	21	(305.0568799, 273.8010458)
비 고	사용한 Weight factor $\omega = 1.0$ $\epsilon = 10^{-7}$ Iteration 횟수 : 109회(프로그램 running time : 15초)			

재단도 해석 전·후 길이 비교 결과, 6번 부재가 0.28cm로 가장 많은 오차를 보이며 수렴하였고 나머지 부재들은 대개 0.05cm내로 수렴하였다.

3.2 두 번째 조각의 재단도 해석

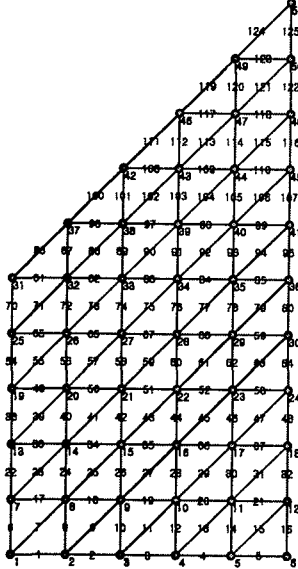


그림 10. 두 번째 조각의 절점 및 부재번호

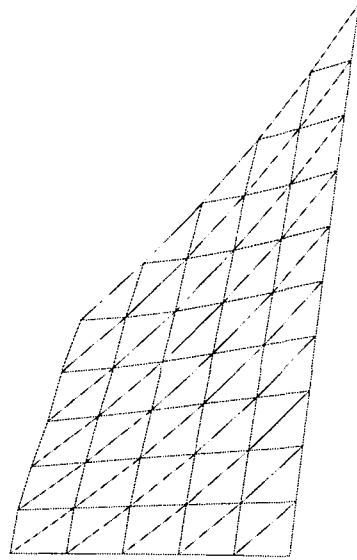


그림 11. 두 번째 조각의 재단도 해석 결과

두 번째 조각은 그림 10에서 보는 바와 같이 절점 51개와 부재 125개로 구성된다. 재단도 해석시, 절점 1은 고정(평면에 깔린 후에도 좌표가 변하지 않는다), 부재 125개의 길이의 변화가 없다는 2개의 경계조건을 이용하였고 재단도 해석 후의 결과는 그림 11에서 보는 바와 같다. 재단도 해석 전·후의 각 부재 길이와 최종 2차원 평면 좌표는 표 2에 나타내었다.

재단도 해석 전·후 길이 비교 결과, 7번 부재가 0.34cm로 가장 많은 오차를 보이며 수렴하였고 나머지 부재들은 대개 0.05cm내로 수렴하였다.

표 2. 두 번째 조각의 부재 길이 비교와 최종 재단도 좌표

부재 번호	재단도 해석 전 각 부재 길이(cm)	재단도 해석 후 각 부재 길이(cm)	절점 번호	재단도 해석 후 얻어진 최종 2차원 평면 좌표
1	53.9445085	53.882941194	1	(245.4000000, 0.0000000)
2	53.9796258	53.9720718383	2	(298.9465948, 6.0111171)
3	53.8897022	53.8907823141	3	(352.5868584, 11.9866218)
4	53.9834234	53.9821775839	4	(406.1771998, 17.6692035)
5	53.8777319	53.8774522697	5	(459.9013572, 22.9408636)
6	43.2663842	43.0120392171	6	(513.5547356, 27.8495146)
7	76.0497863	75.7023922475	7	(248.0842749, 42.9281980)
8	45.0251041	45.0726557200	8	(301.3260002, 51.0209240)
9	77.0720442	76.9945491916	9	(354.7698515, 59.0387006)
10	47.0950104	47.1026918535	10	(408.1645126, 66.7977129)
...
116	54.0593193	54.0594281258	42	(391.2125724, 359.0042248)
117	40.8864281	40.8769168292	43	(430.7873367, 370.7582243)
118	45.3220697	45.3164453112	44	(473.5728540, 386.2592496)
119	81.7135240	81.6765497214	45	(516.6400327, 404.1531276)
120	54.9727205	54.9853701467	46	(437.7692400, 426.1108586)
121	83.7275343	83.7138286739	47	(475.9597964, 440.6849359)
122	54.2502535	54.2483717964	48	(517.7541154, 458.2010747)
123	41.7672120	41.7591687865	49	(480.9429495, 495.4440367)
124	81.5142932	81.5039195247	50	(519.0900794, 512.4329938)
125	54.2261929	54.2226489328	51	(520.6279900, 566.6338285)
비 고	사용한 Weight factor $\omega = 1.0$ $\epsilon = 10^{-7}$ Iteration 횟수 : 289회(프로그램 running time : 25초)			

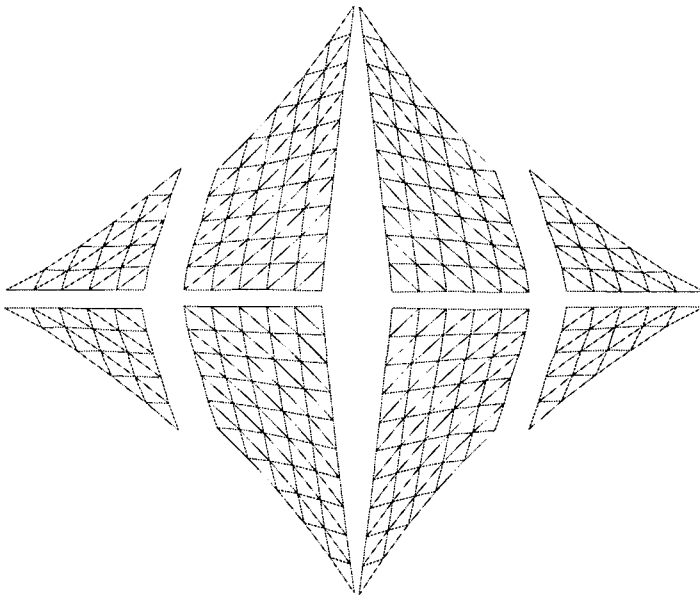


그림 12. 최종 재단도

있다.

지금까지는 형상해석 결과를 가지고 위치 변환만을 통해 2차원 전개도를 구하였다. 그러나, 추후에는 전개도와 더불어 응력함수를 도입하여 초기강성에 따른 막재의 신율을 고려하여야 하며 또한 실제 시공시 초기 장력 도입 방법과 해석시 등장력 곡면과의 차이점을 줄이기 위한 연구를 하여야 한다.

감사의 글

“ 본 연구를 지원해 주신 초대형 구조 시스템 연구센터(STRESS)에 감사드립니다. ”

참 고 문 헌

1. Tabarrok, B. and Qin, Z. "Form Finding and Cutting Pattern Generation for Fabric Tension Structures," *Microcomputers in Civil Engineering 8*, Elsevier Science Pub. Ltd, 1993, pp. 377-384.
2. 坪田張二, 膜構造の竣工釣り合状態と最適裁断圖の決定法, 京都大學 博士學位論文, 1991.
3. 권택진, 최 호, 이장복, 김재열, 서삼열, "막구조물에 관한 형상탐색과 재단도 결정법," 한국전산구조공학회 학술발표회 논문집, 제11권 제1집(통권 제20호), 1998. 4., pp.175~182.
4. 권택진, 최 호, 이장복, 김재열, 서삼열, "케이블 보강 막구조물의 재단 패턴 결정에 관한 연구," 대한건축학회 춘계학술발표대회 논문집, 제18권 제1호(통권 제35집), 1998. 4., pp.849~854.
5. Barnes, M. R., "Form-Finding and Analysis of Prestressed Nets and Membranes," *Computers & Structures*, Vol. 30, 1988, pp. 685-695.
6. 서삼열, "막구조물의 반복적 최적 형상탐색 "해석에 관한 연구", 성균관대학교 대학원 박사논문, 1991
7. 권택진, 서삼열, 고영준, "케이블의 길이 제한성을 고려한 케이블 보강 막구조물의 형상해석 및 응력-변형 해석에 관한 연구," *대한건축학회 추계학술발표대회 논문집*, 제17권, 제2호, 통권 제34집, 1997, 10, pp. 991-994.

4. 결 론

H.P.형 케이블 보강 막구조물의 예를 들어, 공간상의 3차원 좌표가 요소의 길이 변화 없이 평면상에 펼쳐지는 것을 볼 수 있었다. 하나 이상의 절점이 고정이라는 가정과 각 부재 길이는 변화하지 않는다는 경계조건을 도입하여 평면상의 2차원 좌표로 수렴시키는데 최소 상승법과 Newton-Raphson법을 사용하였다.

첫 번째, 두 번째 조각에서, 최대오차가 각각 0.28cm, 0.34cm로 나타났으나 이 오차는 공학에서 만족할만한 오차범위안에 있고, ϵ 값을 더 줄여 해석을 한다면 최대오차값은 줄어들게 되므로 필요로 하는 오차안으로 들어오도록 할 수