

보형태 빌딩구조물의 최적 강성 분배에 관하여

On the Optimal Distribution of Structural Stiffness in Beam-type Buildings

최 동 호
Choi, Dong-Ho

ABSTRACT

This paper presents motion based design methodology for structures. Current design methodologies are primarily strength-based. Such methods are adequate when strength is expected to govern the design. But as the slenderness of structures increases, motion such as displacement and acceleration becomes the dominant criterion. In this paper, a preliminary design approach for beam-type buildings, where motion dominates the design, is discussed by effectively distributing the magnitude of structural stiffness to control the distribution of displacement under service load. This analytic development is illustrated using a cantilever beam as the structure under static loads, free vibration, and forced vibration.

1. 서론

토목 및 건축 구조물들의 구조적 형태와 설계하중은 위치, 구조물의 기능성, 외관 및 경제성에 따라 정해진다. 관례적으로 구조물은 안전성(safety)과 사용성(serviceability)에 의해 설계된다. 안전성은 구조물의 수명 동안 한번정도 발생할 상황을 고려하는 것으로 구조물의 붕괴와 막대한 파손을 대비함에 있다. 사용성은 구조물의 수명동안 여러번 발생할 수 있는 설계하중하에서 구조물은 최소로 파손되며, 구조물의 거동은 특정한 한계치를 넘지 말아야 한다.

일반적으로 구조물의 설계 방법은 주로 강도에 의존한다. 안전도를 고려한 하중하에서 구조물의 부재들에 요구되어지는 강도에 따라 적당한 부재의 선택이 이루어진다. 이렇게 선택된 부재를 가진 구조물은 설계하중하에서 거동(변위, 가속도)이 점검되어진다. 구조물의 응답은 부재의 강도 뿐만 아니라 부재의 강성(stiffness)과 에너지 감쇠(dissipation)에 따라 달라지므로 부재의 선택과 점검작업을 사용성 조건이 만족 될 때까지 반복한다. 이러한 방법을 강도에 의존한 설계방법이라하고 강도가 주요 설계조건일때는 매우 유효하며, 대부분의 구조물들은 이 설계법에 따른다. 하지만 구조물의 세장(slenderness)이 커질수록, 거동이 더 중요한 요구조건이 될 수 있다⁽³⁾.

초고층 건물이나 장대 교량은 설계하중하에서도 큰 거동을 하기 때문에 안전성과 더불어 사용성에 큰 중점을 두어야 한다. 이와같은 구조물은 먼저 거동조건들을 만족시키는 강성에 기초하여 부재를 선택한후 요구되는 부재강도를 점검하는 설계방법이 요구된다. 설계하중하에서 변위는 주로 구조물의 강성에 의존하며, 가속도는 주로 구조물의 에너지 감쇠능력에 의존한다. 극한하중하에서는 구조물의 에너지 감쇠(dissipation)와

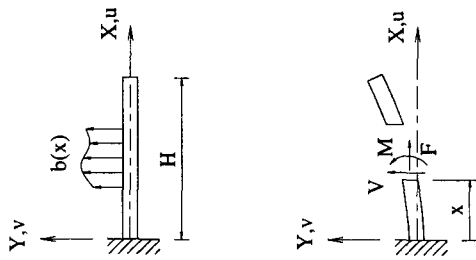
흡수(absorption) 능력이 변위를 좌우한다. 이와같이 변위와 가속도에 좀 더 유효하게 대처하기 위해서는 강도에 의존한 설계방법보다는 거동에 의존한 설계방법이 요구된다.

구조물의 변형 분배는 강성의 크기와 분배에 의존하고, 변형의 크기는 강성과 감쇠의 크기와 분배에 의해 조정되어진다. 본 연구에서는 구조적 강성의 분배는 설계하중하에서 변위의 분배조건을 만족시키기 위해 부재의 강성을 효율적으로 분배하는 방법을 연구함에 있어서, 캔틸레버 보를 예제 구조물로 선택하여 (1) 정적하중에서 부재의 강성을 효율적 분배, (2) 자유진동하에서 부재의 강성을 효율적 분배, (3) 강제진동하에서 부재의 강성을 효율적 분배함으로써 강도뿐만 아니라 거동 요구조건을 만족시키는 기본적 해석방법을 기술하였다.

2. 해석모델

2.1 평면변형과 변위

그림 1은 $X-Y$ 평면에서 길이 H 인 캔틸레버보가 외부의 횡하중 $b(x)$ 에 의해 변형한 형상을 보인 것이다. 그림 2는 미소요소 dx 의 변형전과 변형후의 형상을 그린 것으로, β 는 단면의 회전, γ 는 횡전단 변형률이다.



(a) 변형전의 보 (b) 변형후의 보
그림 1. 변형전과 변형후의 캔틸레버보

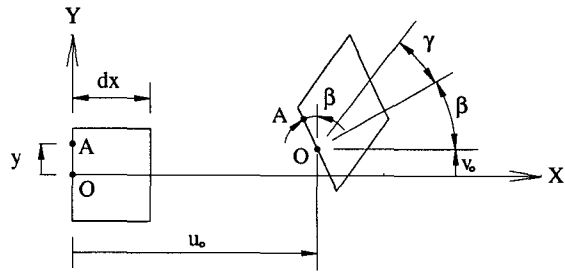


그림 2. 미소요소의 변형전과 변형후의 형상

단면의 회전이 충분히 작다고 가정할 때 (즉, $\beta^2 \ll 1$), O점으로부터 횡방향으로 임의의 거리 y 에 위치한 A에서 축방향 변위 u 와 횡방향 변위 v 는 아래식으로 나타낼 수 있다.

$$u = u_0 + \frac{\partial u}{\partial y} y = u_0 - \beta y \quad (1)$$

$$v = v_0 \quad (2)$$

여기서 u_0, v_0 는 O점의 축방향과 횡방향의 변위이다.

선형 변형관계식으로부터 휨과 전단 변형률은 다음식으로 나타낼 수 있다.

$$\epsilon = \frac{\partial u}{\partial x} = e - xy \quad (3)$$

$$\gamma = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = v' - \beta \quad (4)$$

여기서 e 는 축방향의 변형률로서 본 연구에서는 무시하였고, '은 x 에 대한 미분을 의미하고, x 는 곡률과 관련되는 휨변형계수는 아래식으로 정의한다.

$$x = \beta' \quad (5)$$

2.2 최적변형과 변위

최적설계를 설계하중하에서 구조물 길이방향으로 균등한 전단과 휨변형 상태로 고려한다면 다음식으로 표현할 수 있다.

$$\gamma = \gamma^* \quad (6)$$

$$x = x^* \quad (7)$$

설계하중하에서 빌딩 구조물에 대한 γ^* 의 전형적인 값으로 일본에선 약 1/200이고, 미국에선 1/300- 1/400이다. 극한하중하에선 일본에선 그 값을 1/100로 제한하는 반면 미국에선 1/200로 한다.

그림 1의 수직 캔틸레버보를 고려할 때, 식 (4)와 (5)을 적분하면 다음식과 같다.

$$v = \gamma^* x + \frac{x^* x^2}{2} \quad (8)$$

$$\beta = x^* x \quad (9)$$

보의 끝단에서의 처짐은 다음으로 주어진다.

$$v(H) = \gamma^* H + \frac{x^* H^2}{2} \quad (10)$$

여기서 $\gamma^* H$ 는 전단변형에 의한 영향이고 $x^* H^2/2$ 는 휨변형에 의한 영향이다. 예를들어 고층빌딩을 캔틸레버보로 생각할 때, 빌딩의 형상비(높이와 폭의 비)는 전단변형과 휨변형의 상대적 중요성을 제공한다. 형상비가 작은(형상비 \approx 1) 빌딩은 준-전단 거동과 $x \rightarrow 0$ 을 보이고, 약 7보다 큰 형상비를 갖는 빌딩은 준-휨 거동과 $\gamma \rightarrow 0$ 을 보여준다.

변위된 형상을 나타낼 때 전단변형과 휨변형에 관련된 함수를 포함한 매트릭스를 각각 Φ , Ψ 로 정의하면, 변위는 다음식으로 표현할 수 있다⁽¹⁾.

$$v(x) = \Phi(x) q_t + \Psi(x) q_b \quad (11)$$

$$\beta(x) = \Psi'(x) q_b \quad (12)$$

여기서 q_t , q_b 는 전단과 휨에 대한 함수참여계수(function participation factor)를 포함한 벡터이다.

식 (4), (5)는 식 (11), (12)를 이용하여 아래의 변형-변위식으로 변한다.

$$\gamma = \Phi'(x) q_t \quad (13)$$

$$x = \Psi''(x) q_b \quad (14)$$

1차모드의 일정한 상수 변형인 경우에는 다음과 같다.

$$\Phi = \frac{x}{H} \quad (15)$$

$$\Psi = \frac{x^2}{H^2} \quad (16)$$

$$q_t = \gamma^* H \quad (17)$$

$$q_b = \frac{x^* H^2}{2} \quad (18)$$

식 (17)과 (18)로부터, 변위에 대한 전단과 휨은 다음식으로 관련되어진다.

$$q_b = sq_t \quad (19)$$

여기서 s 는 변형에 의존한 무차원 계수이다.

$$s = \frac{H\chi^*}{2\gamma^*} \quad (20)$$

2.3 평형방정식

그림 3은 외적으로 횡하중 $b(x)$ 가 제하되고 내적으로 횡방향 전단력 V 와 휨모멘트 M 에 의해 구속된 미소요소 dx 를 나타내었다.

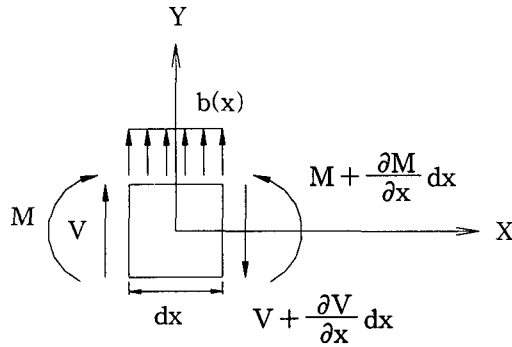


그림 3. 미소요소

전단력과 휨모멘트는

$$V = \int \tau_{xy} dA \quad (21)$$

$$M = - \int y \sigma_x dA \quad (22)$$

여기서 τ_{xy} 와 σ_x 는 단면에 작용하는 응력이다. 힘과 모멘트를 합치면

$$\frac{\partial V}{\partial x} - b = 0 \quad (23)$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} - V = 0 \quad (24)$$

$x=0$ 에만 지지되어 있는 부재와 같은 특별한 경우의 평형방정식은 다음 적분형태로 표현될 수 있다.

$$V = \int_0^H b dx \quad (25)$$

$$M = \int_0^H V dx \quad (26)$$

정적인 경우에 b 는 재하된 외적 작용하중이고, 시간의존적인 진동에서는 관성력과 감쇠력이 b 안에 포함되어야 한다.

2.4 힘과 변형 관계식

힘-변형 관계식은 보를 구성하는 재료의 특성에 의존한다. 일반적으로 동적하중하에서 선형 탄성거동을

할 경우 전단변형과 전단력, 휨변형과 휨모멘트의 관계식은 아래의 식으로 표현할 수 있다.

$$V(x, t) = D_t(x, t) \gamma(x, t) \quad (27)$$

$$M(x, t) = D_b(x, t) x(x, t) \quad (28)$$

여기서 D_t 와 D_b 는 횡방향으로의 전단과 휨 강성이다.

3. 강성 분배

3.1 정적하중하의 강성 분배

전단력과 휨모멘트 분배가 주어질 때, 특별한 변형 형상을 위한 강성분배를 할 수 있다. 길이에 따라 균등한 변형은 다음식과 같다.

$$D_t = \frac{V}{\gamma^*} \quad (29)$$

$$D_b = \frac{M}{x^*} \quad (30)$$

예를들어, 캔틸레버보에 등분포 하중 $b(x) = b$ 이 작용한다면, 식 (23), (24)로 부터 길이방향의 임의점 x 에서의 전단력과 휨모멘트는 아래식과 같다.

$$V(x) = b(H-x) \quad (31)$$

$$M(x) = b(H-x)^2/2 \quad (32)$$

그리고

$$D_t(x) = \frac{b(H-x)}{\gamma^*} = \frac{bH}{\gamma^*} \left(1 - \frac{x}{H}\right) \quad (33)$$

$$D_b(x) = \frac{b(H-x)^2}{2x^*} = \frac{bH^3}{4sx^*} \left(1 - \frac{x}{H}\right)^2 \quad (34)$$

위 식으로 부터 선형적인 전단강성 분배와 2차의 휨강성 분배를 가진 캔틸레버보는 횡방향 등분포 하중하에 균등한 변형을 보여준다.

3.2 비감쇠 자유진동의 고유모드 응답을 위한 강성 분배

본 절에서는 비감쇠 자유진동의 고유모드가 어떤 변형 형상을 갖도록 강성 분배를 한다. 자유진동에 대한 횡방향 하중은 관성항 만으로 나타낼 수 있다.

$$b(x, t) = -m(x) \ddot{v}(x, t) \quad (35)$$

간단한 예로서, 질량분배가 등분포일때, 즉 $m(x) = m$ 이라 가정할 때, 탄성거동과 관성력에 의한 평형방정식은 다음식과 같다.

$$V(x, t) = m \int_x^H \ddot{v}(x, t) dx = D_t(x) \gamma(x, t) \quad (36)$$

$$M(x, t) = \int_x^H V(x, t) dx = D_b(x) x(x, t) \quad (37)$$

본 연구에서는 바람직한 거동모드를 길이를 따라 균등한 전단변형과 휨변형을 할 경우로 생각한다. 등분포 변형모드로 진동응답하는 보는 아래식으로 기술할 수 있다.

$$\gamma(x, t) = \gamma^* e^{i\omega_1 t} \quad (38)$$

$$x(x, t) = x^* e^{i\omega_1 t} \quad (39)$$

여기서 $i = \sqrt{-1}$, ω_1 은 보의 기본진동수(fundamental frequency)이다. 식 (38), (39)를 사용하여 식 (4), (5)로부터 변위들을 나타내면 아래식과 같다.

$$v = e^{i\omega_1 t} \left(\gamma^* x + \frac{x^* x^2}{2} \right) \quad (40)$$

$$\beta = e^{i\omega_1 t} (x^* x) \quad (41)$$

$$x^* = \frac{2s}{H} \gamma^* \quad (42)$$

식 (35), (38)-(42)를 식 (36), (37)에 대입하면 다음의 강성분배식을 얻는다.

$$D_t \left(\frac{x}{H} \right) = \frac{m\omega_1^2 H^2}{2} \left[1 - \left(\frac{x}{H} \right)^2 + \frac{2s}{3} \left\{ 1 - \left(\frac{x}{H} \right)^3 \right\} \right] \quad (43)$$

$$D_b \left(\frac{x}{H} \right) = \frac{m\omega_1^2 H^4}{2} \left[\frac{1}{4} \left\{ 1 - \frac{4}{3} \left(\frac{x}{H} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{x}{H} \right)^4 \right\} + \frac{1}{3s} \left\{ 1 - \frac{3}{2} \left(\frac{x}{H} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{H} \right)^3 \right\} \right] \quad (44)$$

$x=0$ 에서 D_t 의 크기는 바닥 전단력과 횡방향 전단변형의 대표적인 값으로 결정할 수 있다.

$$D_t(0) = \frac{[V(0)]_{\max}}{\gamma^*} \quad (45)$$

일단 $D_t(0)$ 가 정의되면, 식 (43)을 $x=0$ 로 두면

$$D_t(0) = \frac{m\omega_1^2 H^2}{2} \left(1 + \frac{2s}{3} \right) \quad (46)$$

기본진동수는 식 (45)와 (46)으로부터 다음식과 같다.

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2[V(0)]_{\max}}{\gamma^* m H^2 \left(1 + \frac{2s}{3} \right)}} \quad (47)$$

그림 4과 5는 전형적인 고층 또는 저층빌딩에 대한 정규화(normalized)된 D_t 와 D_b 의 분배를 보였다.

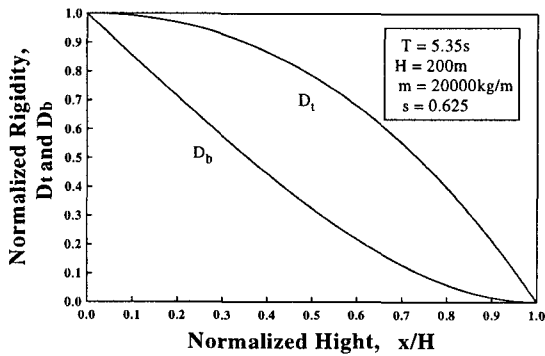


그림 4. 고층건물의 전단강성과 휨강성의 분배

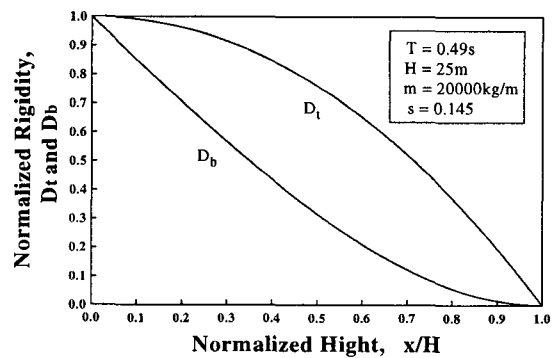


그림 5. 저층건물의 전단강성과 휨강성의 분배

3.3 강제진동

지진외적진동, 관성력, 선형의 감쇠시스템 고려하면, 등가하중 b 는

$$b(x, t) = -m a_g(t) - m \ddot{v}(x, t) - c \dot{v}(x, t) \quad (48)$$

여기서 a_g 는 지진가속도, c 는 보의 길이방향으로의 감쇠분배를 나타내는 계수이다. 힘-변형 관계식은 다음과 같다⁽²⁾.

$$V(x, t) = D_t(x) \gamma(x, t) + C_t(x) \dot{\gamma}(x, t) \quad (49)$$

$$M(x, t) = D_b(x) x(x, t) + C_b(x) \dot{x}(x, t) \quad (50)$$

강성에 비례하는 감쇠인 경우, 식 (48)의 감쇠항은 삭제되고 윗 식들은 다음과 같다.

$$b(x, t) = -m a_g(t) - m \ddot{v}(x, t) \quad (51)$$

$$V(x, t) = D_t(x) \gamma(x, t) + \alpha_t D_t(x) \dot{\gamma}(x, t) \quad (52)$$

$$M(x, t) = D_b(x) x(x, t) + \alpha_b D_b(x) \dot{x}(x, t) \quad (53)$$

여기서 α_t 와 α_b 는 비례상수이다. 캔틸레버보에서 q_t 와 q_b 는 가상변위의 원리를 이용해 다음과 같이 얻어질수 있다⁽²⁾.

$$\int_0^H (M \delta x + V \delta \gamma) dx = \int_0^H (b \delta v) dx \quad (54)$$

여기서 δ 는 가상변위 혹은 가상변형이다. 식 (4), (5), (11), (12)를 식 (54)에 대입하면 아래식과 같다.

$$\int_0^H (M \delta \Psi'' q_b + V \delta \Phi' q_t) dx = \int_0^H b (\delta \Phi q_t + \delta \Psi q_b) dx \quad (55)$$

1차모드의 모드형상을 나타내는 식 (15), (16)과 식 (19) 그리고 식 (43), (44)에 주어진 강성 분배식을 식 (55)에 대입하면, 외적진동에 대한 모드전단좌표 q_t 와 관련된 평형방정식을 구할 수 있다.

$$M^* \ddot{q}_t + C^* \dot{q}_t + K^* q_t = P^* \quad (56)$$

여기서

$$M^* = m H \left(\frac{1}{3} + \frac{s}{2} + \frac{s^2}{5} \right) \quad (57)$$

$$C^* = \int_0^H \left(\frac{4 \alpha_b D_b s^2}{H^4} + \frac{\alpha_t D_t}{H^2} \right) dx \quad (58)$$

$$K^* = \omega_1^2 M^* \quad (59)$$

$$P^* = \frac{-m a_g H}{2} \left(1 + \frac{2s}{3} \right) \quad (60)$$

1차모드의 감쇠비 ξ_1 의 정의를 도입하면 다음식과 같다.

$$C^* = 2 \xi_1 \omega_1 M^* \quad (61)$$

$\alpha_s = \alpha_b = \alpha$ 로 가정하면, 1차모드의 감쇠비는 아래식으로 주어진다.

$$\xi_1 = \frac{\alpha \omega_1}{2} \quad (62)$$

식 (56)을 M^* 로 나누면 다음의 평형방정식을 구한다.

$$\ddot{q}_t + 2\xi_1 \omega_1 \dot{q}_t + \omega_1^2 q_t = \frac{P^*}{M^*} = -\Gamma_1 a_g \quad (63)$$

여기서 Γ_1 는 모드참여계수(modal participation factor)이다.

$$\Gamma_1 = \frac{1 + \frac{2s}{3}}{\frac{2}{3} + s + \frac{2s^2}{5}} \quad (64)$$

표 1은 s 에 따른 Γ_1 의 변화를 보여준다.

표 1. s 에 따른 Γ_1 의 변화

s	Γ_1
0.00	1.5
0.125	1.36
0.25	1.24
0.50	1.05
0.75	0.91
1.00	0.81

4. 결론

본 연구에서는 정·동적하중하에서 구조물의 길이에 따라 최적으로 부재들의 강성을 분배함으로써 거동 요구조건을 만족시키는 기본적 해석방법을 기술하였다. 부재의 강성을 효율적으로 분배하는 방법을 연구함에 있어서, 캔틸레버 보를 예제 구조물로 선택하여 해석적으로 (1) 정적하중에서 부재의 강성을 효율적 분배, (2) 자유진동하에서 부재의 강성을 효율적 분배, (3) 강제진동하에서 부재의 강성을 효율적 분배하는 기본적 해석방법을 기술하였다.

참고문헌

1. J. W. Clough and J. Penzien, "Dynamics of Structures", 2nd Edition, McGraw-Hill, 1993.
2. J. J. Connor and A. Wada, "Performance Based Design Methodology for Structures", International Workshop on Recent Developments in Base-Isolation Techniques for Buildings, Tokyo, April 27-30, 1992, pp. 57-70.
3. B. S. Taranath, "Structural Analysis and Design of Tall Buildings", McGraw-Hill Book Company.