

## 축대칭 원판의 해석 결과를 이용한 탄성지반위에 놓인 평판의 해석

### An Analysis of Plate on the Elastic Half-Space by Using the Analysis Results of the Axisymmetric Circular Plate

정진환\*                      이외득\*\*                      정우성\*\*\*  
Cheung, Jin-Hwan              Lee, Oe-Duck              Cheung, Woo-Sung

#### ABSTRACT

A plate on the elastic half-space may generally be analyzed by the finite element method. However, there are some difficulties to obtain the flexibility matrix of the foundation based on the Boussinesq's theory. In this study, an efficient numerical procedure which uses the analysis results of the vertical displacements due to the uniformly distributed loading in a circular area is presented. Some numerical examples represent better results than those of numerical integration technique or subsection method especially in the case of irregular mesh pattern.

#### 1. 서 론

상부구조가 외적으로 부정정일 때 외력이 작용하면 그 구조물 내의 응력은 지반변형의 영향을 받기 때문에 지반-기초-구조물 사이의 상호작용을 고려한 일체적 해석 방법이 요구된다. 그러므로 지반이 평판에 미치는 영향을 단순한 가정으로 처리한다면 지반 위에 놓인 평판의 거동을 완전히 파악할 수 없으며 평판을 통해 지반에 전달되는 힘으로 인한 지반의 처짐과 지반내의 응력도 정직하게 계산할 수 없다. 구조물과 지반의 상호작용의 문제는 매우 빈번하게 거론되지만 그 대부분이 선형적 탄성해석의 범위를 넘지 않고 있었으나 최근에 와서는 비선형 해석 및 시간 종속적 재료의 특성에 대한 거동의 규명문제까지 확대되어가고 있다. 지반-평판 상호작용문제를 이용한 탄성지반 위의 평판해석은 접촉영역에서의 접촉응력의 결정문제로 귀착되는 데 이것이 결정되면 평판의 처짐 및 응력 외에도 지반의 내부응력 및 변위가 구해진다. 구조물과 지반의 상호작용 문제는 매우 빈번하게 거론되고, 구조공학자들도 여러 가지 종류의 하중이 여러 형상의 평판에 작용할 때 지반 위에 놓인 평판해석을 탄성이론 및 수치이론을 적용하여 연구하였다<sup>(1-4)</sup>.

본 연구에서는 판과 지반의 분리가 없다는 가정 하에서 접촉응력을 해석하고 지반의 접촉압력을 먼저

\* 부산대학교 공과대학 토목공학과 교수  
\*\* 동의대학교 공과대학 토목공학과 교수  
\*\*\* 부산대학교 공과대학 토목공학과 석사과정

구한 후 판과 지반의 접촉점 변위를 구하여 판의 모든 요소변위를 확정하는 방법을 택하였다. 해석과정 중 지반의 유연도 행렬 구성 방법은 크게 수치해석 방법과 소영역 분할법 그리고 축대칭 원판의 수치 해석 결과를 이용한 방법으로 수행하였다.

## 2. 판의 유한요소 정식화

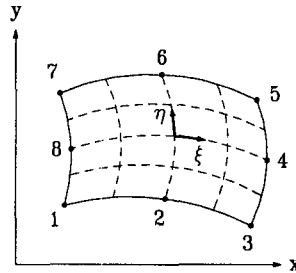


Fig. 2.1 8-node isoparametric element

판 요소는 두께변화에 관계없이 적용할 수 있고 이동변위와 회전변위의 연속조건을 동시에 만족시킬 수 있는 그림 2.1과 같은 8절점 등매개변수 요소를 사용하였다.

8절점 2차원(quadratic two-dimensional) 요소에 대하여 국소적으로 임의의 사변형 내의 곡선좌표계  $(\xi, \eta)$ 를 설정하고, 이때 곡선좌표계  $(\xi, \eta)$ 의 값은 -1로부터 +1사이의 값을 갖는다. 여기서, 형상함수(shape function) 혹은 보간 함수(interpolation function)로서 2차 요소에 대해서는 여러 참고 문헌에 나와있다.<sup>(5)</sup>

요소강성도 행렬을 구하는 방법에는 평형상태에 있는 요소의 전체 포텐셜 에너지를 요소의 절점변위로써 최소화하는 조건으로부터 구하는 최소포텐셜 에너지 원리를 이용하는 방법, 가상 일의 원리를 이용하는 방법 및 Galerkin방법 등이 있다. 잘 알려져 있는 바와 같이, 요소 강도 행렬  $[K]^{(e)}$ 는 다음 식 (2-1)과 같다.

$$[K_{ij}]^{(e)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_i]^T [D] [B_j] t \det[J] d\xi d\eta \quad (2-1)$$

여기서  $[B]$  : 변형률행렬,  $[D]$  : 탄성행렬,  $t$  : 요소의 두께,  $[J]$  : Jacobian행렬

식(2-1)은 곡선좌표계  $(\xi, \eta)$ 에 관한 수치적분법으로 구하는 데 보통 Gauss-Legendre구적법을 사용한다. 요소 강성도 행렬은 절점에서 변위의 연속조건을 고려하여 평형방정식을 세우기 위해서 공통의 전체좌표계로의 변환이 필요하며, 이것을 전 요소에 대하여 조합한 강성도 행렬  $[K]$ 를 구하고 외적 절점하중도 전체 계에 대하여  $[F]$ 라 할 때 다음 식 (2-2)과 같은 평형방정식을 세워서 Gauss소거법 등으로 푼다.

$$[F] = [K][\delta] \quad (2-2)$$

## 3. 지반의 유한요소 정식화

### 3.1 반무한 탄성체 지반에 대한 Boussinesq의 해

Boussinesq는 반무한 탄성체의 표면에 작용하는 하나의 집중하중에 의한 임의점  $j$ 에서의 표면변위를 다음 식으로 구하였다.

$$w_{ji} = \frac{(1-\nu_i^2)P_i}{\pi E_i d_{ij}} \quad (3-1)$$

여기서  $P_i$ 는 작용하중,  $\nu_s$ 는 지반의 Poisson비,  $d_{ij}$ 는 하중작용점에서 임의점까지의 거리,  $E_s$ 는 지반의 탄성계수이다.

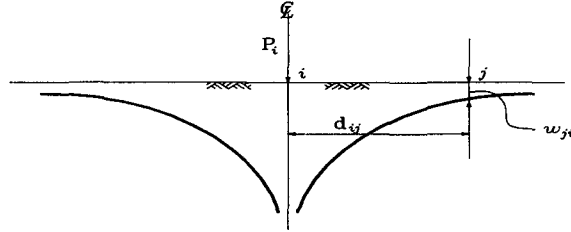


Fig. 3.1 Surface deflection of half-space due to a concentrated loading on Boussinesq's model

여기서 Boussinesq는 지반을 탄성, 균질 및 등방성이라고 가정하였으며, 응력과 변형률은 Hooke의 법칙을 따르고 변형은 미소하다고 가정하였다. 이러한 가정은 실제적인 조건들을 이상화한 것이지만 물리적으로는 연단부근의 교란분포반력을 표현해낼 수 있다는 장점이 있다.

### 3.2 축대칭 등분포하중이 지표면에 직접 작용하는 지반의 변위

지반을 반무한 탄성체로 가정하면 식(3-1)을 이용하여 원영역에 작용하는 축대칭 등분포하중  $q$ 에 의한 지표면의 변위는 다음과 같이 계산할 수 있다.

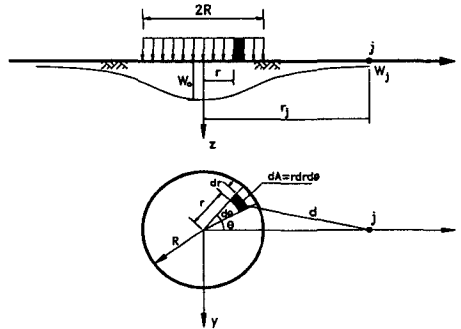


Fig. 3.2 Surface deflection of half-space due to axisymmetric loading

먼저 하중원상의 미소영역  $dA$ 에 작용하는 하중  $qrdrd\theta$ 에 의한  $j$ 점의 수직방향 변위는 식(3-2)을 이용하면 다음과 같이 나타내어진다.

$$dw_j = \frac{(1-\nu_s^2)qrdrd\theta}{\pi E_s d} \quad (3-2)$$

따라서 원영역에 작용하는 축대칭 등분포하중에 의한 지반의 변위는 식(4-2)을 적분하여 다음과 같이 얻어진다.

$$w_j = 2\alpha q \int_0^\pi \int_0^R I(r, \theta) dr d\theta \quad (3-3)$$

여기서  $\alpha = \frac{1-\nu_s^2}{\pi E_s}$  이고,

식 (3-3)에서  $r$ 방향 적분을 수행하면 아래와 같다.

$$w_j = 2\alpha q \int_0^\pi \int_0^R I(r, \theta) dr d\theta = 2\alpha q \int_0^\pi I_1(\theta) d\theta \quad (3-4)$$

식(3-4) 반경방향 ( $r$ )에 대하여 해석적분이 가능하나 원주방향 ( $\theta$ )에 대하여는 해석적분이 불가능하여 수치적분을 수행하였다. 수치적분은 재하반경  $R$ 과 변위를 알고자 하는 위치  $r_j$ 가 달라질 때마다 반복 수행해야하는 불편이 있으므로 이를 없애기 위하여 지표변위  $w_j$ 를 지반상의 임의점  $j$ 까지의 거리  $r_j$ 와  $R$ 과의 비인  $e_j (= \frac{r_j}{R})$ 의 함수로 무차원화한 함수  $F(\theta)$ 를 이용하여 다음 식과 같이 나타내었다.

$$w_j = 2\alpha q \int_0^\pi I_1(\theta) d\theta = 2w_i = 2Ra q \int_0^\pi F(\theta) d\theta \quad (3-5)$$

여기서  $I_1(\theta) = F(\theta)R$

$$F(\theta) = \sqrt{1+e_j^2-2e_j\cos\theta} - e_j + e_j\cos\theta \ln|(1-e_j\cos\theta)/(e_j\sin\theta)| + \sqrt{(1-e_j\cos\theta)^2/(e_j\sin\theta)^2+1} |\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta| \quad (3-6)$$

(3-5)의 적분은 무차원 함수  $F(\theta)$ 의 수치적분으로서 다음과 같이 수행된다.

$$\text{즉 } w_j = 2Ra q \int_0^\pi F(\theta) d\theta = 2Ra q f(e_j) \quad (3-7)$$

식(3-7)의 수치적분을 수행하면 그 결과는 그림(3.3)과 같다.

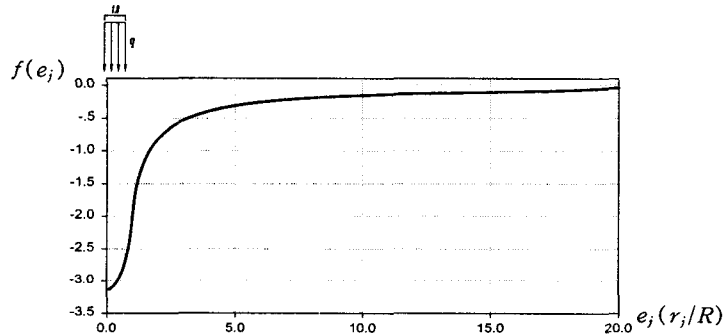


Fig. 3.3 Non-dimensional function and coefficients of 5th degree approximate polynomials

### 3.3 사각형 영역에 작용하는 분포하중에 의한 지반 변위

상부구조 저판과 수평 지반의 접촉면의 미소면적  $dA$ 에서의 하중강도를  $q_i$ 라 할 때 이로 인한  $j$ 점의 변위는 식 (3-2)와 마찬가지로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$dw_{ji} = \frac{(1-\nu_i^2)}{\pi E_s} \frac{q_i dA}{\sqrt{(x_j-x_i)^2 + (y_j-y_i)^2}} \quad (3-8)$$

따라서 지금  $dA$ 가 한 영역 ( $e$ ) 내에 있다고 할 때 그 영역내의 분포하중에 의한 한점  $j$ 의 수직변위는 다음과 같은 적분으로 주어진다.

$$w_j = \alpha \int_{A(e)} \frac{q(x, y) dA}{\sqrt{(x_j-x)^2 + (y_j-y)^2}} \quad (3-9)$$

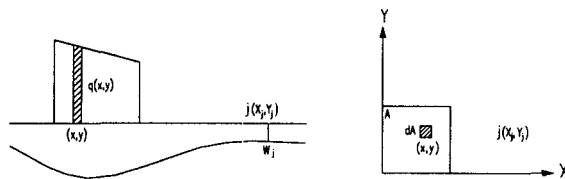


Fig. 3.4 Distributing reaction applied on soil medium

### 3.3.1 수치해석에 의한 방법

식(3-9)의 적분을 구체적으로 생각하면 아래와 같다. 상부 평판 요소로부터 지반에 주어지는 분포반력의 강도를 평판에 관한 8절점 등매개변수 요소의 경우와 동일하게 요소 절점강도로 부터 보간하면 다음과 같다.

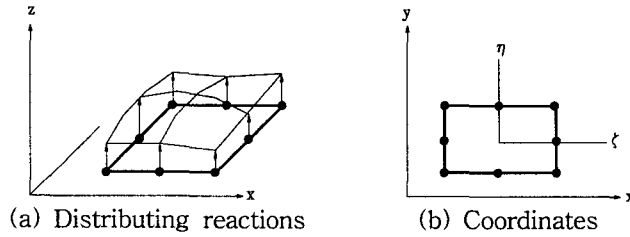


Fig. 3.5 Distributing reactions under an element

저판의 한 요소 ( $e$ ) 영역에 작용하는 분포반력에 의한  $j$ 점의 변위는 다음과 같은 적분으로 주어진다.

$$w_j^{(e)} = a \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{[N] a^{(e)} \det J | d\xi d\eta}{\sqrt{(x_j - \sum N_i x_i)^2 + (y_j - \sum N_i y_i)^2}} \quad (3-10)$$

여기서  $N_i$ 는 8절점 등매개변수의 형상함수이다. 식(3-10)의 적분은 먼저 하층이 작용하는 한 요소 영역이 임의의 형상이고 또 하층 분포가 일정하지 않는 경우를 생각하여야 하므로 수치적분에 의존하지 않을 수 없다.

### 3.3.2 소영역분할법에 의한 방법

임의의 함수  $f(x)$ 의 Gauss적분 과정을 살펴보자. Gauss적분점  $x_i$ 에서의 함수 값을  $f(x_i)$ 라 하면

$$F = \sum_i f(x_i) W_i \quad (3-11)$$

3점 적분을 수행하는 경우 이 식을 그림으로 표현해 보면 그림 3.6과 같고, Gauss적분점  $i$ 에서의 함수 값  $f(x_i)$ 가 그 Gauss적분점의 가중치에 대응하는 넓이에 등분포하고 있는 경우라고 생각할 수 있다. 이러한 가정하에서 3점 Gauss적분을 수행할 직사각형 판에서 한 Gauss적분점에서 함수값이 일정하게 분포하는 영역은 그림 3.7과 같다고 볼 수 있으므로 하나의 요소에 대응하는 반무한 탄성체 경계상의 면적을 9개의 소영역으로 분할하여 각 소영역내의 접촉압력이 그 소영역내의 Gauss적분점에서의 접촉압력  $q_G$ 로서 일정하다고 가정할 수 있다.<sup>(6-8)</sup>

식(3-9)에 이 가정을 도입하여 다시 쓰면 다음과 같고, 이 식들은 해석적으로 적분이 가능하다.

$$w_j^{(e)} = a \left[ q_{G1} \int_{A_{G1}} \frac{dA_{G1}}{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}} + q_{G2} \int_{A_{G2}} \frac{dA_{G2}}{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}} + \dots + q_{G9} \int_{A_{G9}} \frac{dA_{G9}}{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}} \right] \quad (3-12)$$

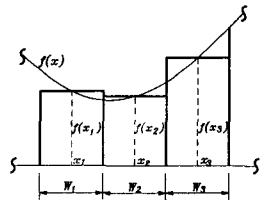


Fig. 3.6 Gauss numerical integration

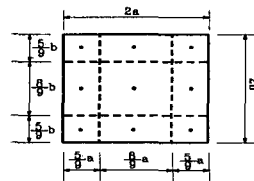


Fig. 3.7 Influence area of Gauss point

### 3.3.3 축대칭 원형판의 해석결과를 이용한 소영역 분할 방법

앞의 식(3-12)에서 만일 적분영역이 직사각형이 아니라면 해석적인 적분이 불가능하게 되며 수치적분이 필요하게 된다. 여기서 3.2절의 결과를 이용한 근사적인 방법이 가능하다.

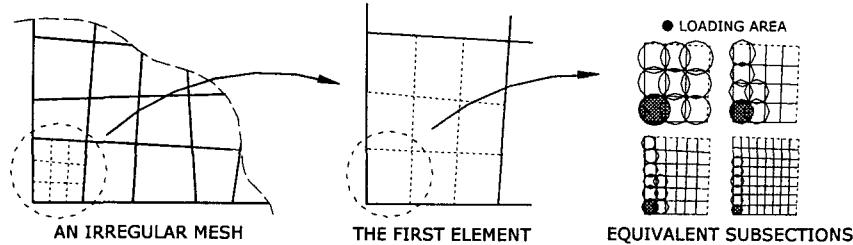


Fig. 3.8 The irregular mesh of plate and equivalent loading in the subsection of element

즉, 그림 3.8에서와 같이 하중작용영역 요소를 차례대로 한 개의 요소에 대하여 gauss point의 개수 만큼 소영역을 나누고 나누어진 소영역을 더욱 작은 세부 영역으로 다시 나누어서 각각의 세부영역을 등가원형영역으로 바꾼다. 이 영역에 작용하는 등분포 하중에 의한 임의점의 변위를 계산하고 모든 세부 영역의 결과를 더하여 식(3-12)의 적분 결과로 대치한다.

## 4. 지반의 강성도 행렬

지반의 유연도 행렬로부터 저판의 분포 반력에 의한 모든 절점에서의 수직변위는 다음 식과 같이 표현 될 수 있다.

$$w = Gq \quad (4-1)$$

그리고, 판과 지반의 접촉절점의 변위  $[w]$ 를 안다면 그 절점상의 하중강도는 유연도 행렬 식(4-1)로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$[q] = [G]^{-1}[w] \quad (4-2)$$

따라서 구조계 전체의 강성도 방정식은 판에 작용하는 외력과 반력의 평형을 고려하여 다음의 방정식이 얻어진다.

$$[P] - [Q] = [K_s][U]$$

$$\text{또는 } [P] = [K_s][U] + [K_b][w] \quad (4-3)$$

위식에서 지반의 수직변위  $[w]$ 를 전체계의 변위  $[U]$ 속에 포함시키면 상·하 전체계 즉 전체 상호 작용 계의 강성도 방정식을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$[P] = [[K_s] + [K_b]][U]$$

$$\text{또는 } [P] = [K][U] \quad (4-4)$$

## 5. 계산예

### 5.1 탄성지반 위에 놓인 사각형판의 계산예

표 1의 재원을 가지는 반무한 탄성 지반 위에 놓여 있는 사각형판의 전 영역에 걸쳐 등분포하중이 작용할 때 판의 처짐과 접촉응력을 계산하는 예제이다. 이 예제의 요소 분할 형태는 그림 5.1에, 수직처짐 값은 그림 5.2에 그리고 지반반력 분포는 그림 5.3에 각각 그려져 있다.

Table. 1 Material properties and dimensions of example

|      | 크 기                           | 두 개             | 탄성계수                              | Poisson 비 |
|------|-------------------------------|-----------------|-----------------------------------|-----------|
| 사각형판 | $720 \times 720 \text{ cm}^2$ | $30 \text{ cm}$ | $2.0 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ | 0.17      |
| 지 반  | 반무한 탄성체                       | -               | $500 \text{ kg/cm}^2$             | 0.30      |

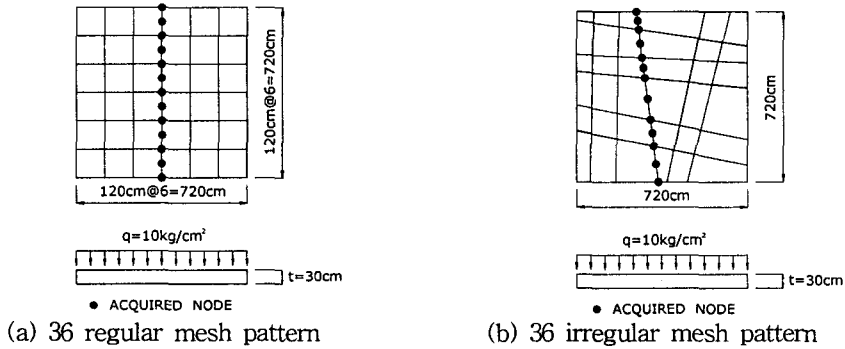
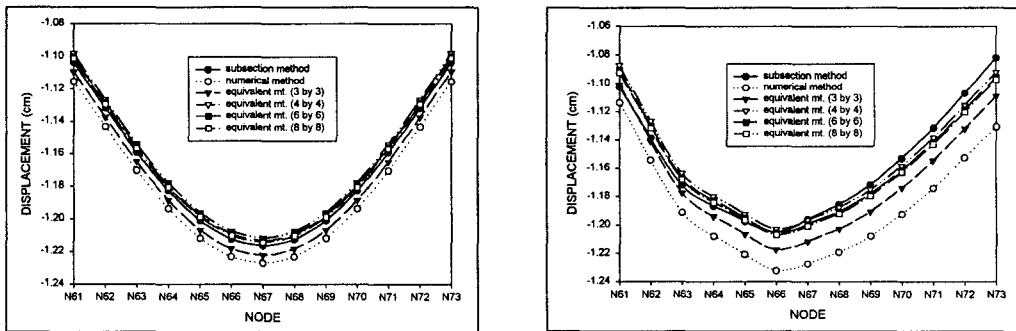
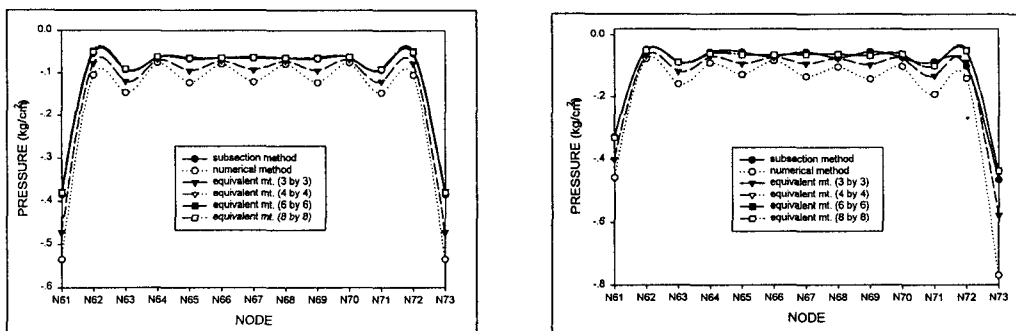


Fig. 5.1 Modeling for plate on the elastic half-space



(a) Vertical displacements of regular mesh (b) Vertical displacements of irregular mesh

Fig. 5.2 Results of vertical displacements of plate



(a) Contact pressure distribution of regular mesh (b) Contact pressure distribution of irregular mesh

Fig. 5.3 Results of contact pressures of plate

## 6. 결 론

반무한 탄성 지반 위에 놓여 있는 사각형판에 연직의 분포하중이 작용하는 경우 판의 변위, 응력, 지반의 접촉압력 분포 등을 유한요소법을 이용하여 상호작용 해석을 연구하였다.

본 연구에서는 접촉압력과 처짐을 regular/irregular mesh에 대하여 수치해석 방법, 소영역분할 방법, 축대칭원판의 수치해석 결과를 이용한 원형등가영역 방법 등의 세 가지로 계산 하였으며, 세 번째 방법은 한 개의 Gauss 영역에 대해 9( 3×3 ), 16( 4×4 ), 36( 6×6 ), 64( 8×8 )개의 영역별로 재분할하여 4개의 유형별로 계산 하였다.

1. regular mesh에서는 소영역 분할방법의 결과값이 가장 양호한 값으로 평가되며, 증가하중 적용 방법은 재분할 영역의 개수를 증가 시킬수록 정도가 증가하며 접촉압력의 결과값이 개선됨을 알 수 있다. 또한 재분할 영역이 6×6에 가까울수록 소영역 분할방법의 결과와 거의 일치함을 볼 수가 있다.
2. irregular mesh에서 수치해석 방법, 소영역분할 방법은 요소 형상이 왜곡되면 정확한 결과값을 계산 하지 못하는 어려움이 있다. 그러나 원형등가영역 방법은 irregular mesh에서도 만족할만한 결과값을 얻을 수가 있다.

## 참 고 문 헌

- 【1】 Cheng, M. S., "A simplified finite element solution for the plates on elastic foundation." Computer & Structures, Vol. 8, 1978.
- 【2】 Cheung, Y. K. and Zienkiewicz, O. C., "Plates and tanks on elastic foundation - an application of finite element method", Int. J. Solids Structures, Vol. 1, pp. 451 - 461, 1965.
- 【3】 Desai, C. S., "Soil-structures interaction and simulation problems", in finite elements in Geomechanics edited by Gudeus, G., John Willy & Sons, New York, pp. 209 - 250, 1977.
- 【4】 Selvadurai, A. P. S., "Elastic analysis of soil foundation interaction." Elsevier, New York, 1979.
- 【5】 Hinton, E. and Owen, D. R. J., "Finite element programing." Academic, New York, 1977.
- 【6】 李外得, "彈性地盤 上에 놓인 箱子 構造의 解析", 釜山大學校 博士學位 論文, 1981.
- 【7】 趙顯榮, 鄭振煥, 金聖都, 韓忠穆, "彈性地盤과 板의 接觸壓力 解析에 관한 研究". 大韓土木學會 論文輯, 第 12 卷, 第 1 號, pp. 1 - 7, 1992.
- 【8】 趙顯榮, 鄭振煥, 金成喆, "分離를 고려한 彈性地盤 上의 軸對稱 圓板의 靜的 相互作用 解析에 관한 研究", 大韓土木學會 論文集, Vol. 17, No. 1-4, pp. 589 - 596, 1997.