

# 적용 횡단선 필터에서 재순환 버퍼를 이용한 수렴속도 개선

°김원균\*, 임경모\*, 김광준\*, 나상동\*, 배철수\*\*

\*조선대학교 컴퓨터 공학과

## An Improvement of Convergence Speed with Recycling Buffer in Adaptive Transversal Filter

°Won-Kyun Kim\*, Kyung-mo Lim\*, Kwang-Jun Kim\*, Sang-Dong Na\*, Chul-Soo Bae\*\*

\*Dept. of Computer Eng. Chosun Univ.

\*\*Dept. of Electronic Commun. Eng. Kwandong Univ.

E-mail: sdna@mail.chosun.ac.kr

### ABSTRACT

In this paper, a new simple and efficient technique to improve the convergence speed of LMS algorithm is proposed in an interference-limited multi-path fading environment as encountered in indoor wireless communications. The convergence characteristics of the proposed algorithm, whose coefficients are multiply adapted in a symbol time period by recycling the received data, are analyzed to prove theoretically the improvement of convergence speed. The theoretical analysis shows that the data-recycling LMS technique can increase convergence speed by (B+1) times without increasing the computational complexity substantially, where B is the number of recycled data. The results of the computer simulation demonstrate that the simulation results are in accordance with the theoretical analysis and the superiority of the filter algorithm.

### I. 서 론

적용적 필터들은 디지털 신호 처리와 통신 시스템에서 더욱 개선된 실행을 요구하는 필요성을 만족시키기 위해 필수적이며 또한, 빠른 수렴 속도를 갖는 적응적 필터 알고리즘들과 비교적 낮은 평균 자승 에러(MSE), 하드웨어 성능에 대한 실용성을 요구한다. LMS 알고리즘의 중요한 특징은 간결성인데 이는 적절한 상관 함수의 측정과 역행렬을 필요로 하지 않는다는 것이다. 다른 적용 필터링 알고리즘의 기준과 비교해볼 때 LMS 알고리즘의 간결성이 표준이 된다. LMS 알고리즘은 선형 적용 필터링 알고리즘으로서 두 가지의 기본적인 처리과정으로 구성된다. 첫 번째는 필터링 처리로서 탭 입력의 집합에 의해 생성되는 횡단선 필터의 출력을 계산하는 것과 출력과 원하는 응답을 비교하여 에러를 측정하는 것이다. 두 번째 처리과정은 적용 처리과정으로서 측정 에러에 따라서 필터의 탭 가중치를 자동적으로 조절하는 것이다. 최소 평균 자승 알고리즘의 이용으로 적용 횡단선 필터는 비교적 적용 횡단선 필터의 간결성과 효율성 때문에 광범위하게 이용되어왔으며 [1-4], 적용 횡단선 필터 탭 가중치를 조절하기 위한 새로운 반복적 알고리즘이 개발되어져 왔다[5]. 적용 횡단선 필터에서 사용된 개별 탭 가중치를 갱신하기 위해 LMS 알고리즘을 이용하며, 뛰어난 성능 개선을 가져오는 반면에, 연산의 복잡성을 요구한다. 본 논문에서는 LMS 알고리즘을 이용한 적용 횡단선 필터의 빠른 수렴 속도에 대해서 효율적인 구조를 제안한다. 제안된 구조의 기본 개념은 표본 기간에서 탭 계수들을 갱신하기 위해 폐기된 데이터 표본을 이용함으로써 수렴속도를 개선하는데, 이는 연산 복잡성을 증가시키지 않으면서도 수렴속도를 (B+1)배로 향상

시킨다. 여기서 B는 재활용된 데이터의 수를 나타낸다.

### II. 데이터 재사용 알고리즘

필터링 처리와 적용적 처리의 상호 작동에 대한 조합은 그림 1에서 나타낸 것과 같이 LMS 알고리즘을 중심으로 케환 루프로 구성된다. 첫 번째로, LMS 알고리즘을 중심으로 설정되어 있는 횡단선 필터로서 필터링 처리과정을 수행하며 두 번째는 횡단선 필터의 탭 가중치에서 적용 제어 처리를 수행하기 위한 메카니즘이다.

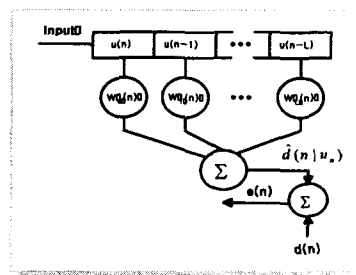


그림 1. 횡단선 필터 구조

위 그림에서 나타낸 바와 같이 탭 입력  $u(n), u(n-1), \dots$ ,

$u(n-M+1)$ 은  $M \times 1$  탭 입력 벡터  $u(n)$ 의 원소 형태를 갖는다. 여기서  $M-1$ 은 지연 원소의 수이고, 탭 입력은 0의 평균과 상관 행렬  $R$ 의 통계적 처리과정으로부터 유도된 샘플들을 나타낸다. 이러한 입력과 외에 또 필터는 최적 필터를 위해 기준 프레임 을 제공하는 원하는 응답  $d(n)$ 에 공급된다.  $n$  번에서 탭 가중치의 벡터는  $u(n)$ 로 표시하고 필터 출력에서 부합되는 원하는 응답의 추정치는  $\hat{d}(n|u_n)$ 으로,  $u_n$ 은 탭 입력  $u(n), u(n-1), \dots, u(n-M+1)$ 에 떨어진 간격을 나타낸다. 이러한 추정치와 원하는 응답  $d(n)$ 을 비교함으로써 에러 추정치  $e(n)$ 을 산출할 수 있는데 이는 식 (1)과 같이 나타낼 수 있다.

$$e(n) = d(n) - \hat{d}(n|u_n) = d(n) - w^H(n)u(n) \dots\dots (1)$$

위 식에서 나타낸  $w^H(n)u(n)$ 항은 탭 가중치 벡터  $w(n)$ 과 탭 입력 벡터  $u(n)$ 의 내적이다. 탭 가중치 벡터의 확장된 형태의 식은 식 (2)와 같고,

$$w(n) = [w_0(n), w_1(n), \dots, w_{M-1}(n)]^T \dots\dots (2)$$

탭 입력 벡터의 확장된 형태의 식 (3)과 같이 나타낼 수 있다.

$$u(n) = [u(n), u(n-1), \dots, u(n-M+1)]^T \dots\dots (3)$$

그림 1에서 나타낸 횡단선 필터 구조를 고려하면, 필터 출력의 추정치  $\hat{d}(n|u(n))$ 는 입력 신호 벡터  $u(n)$ 와 탭 가중치 벡터  $w(n)$ 로 구성된 다음의 식 (4)와 같다.

$$\begin{aligned} \hat{d}(n|u(n)) &= \sum_{j=0}^{M-1} w_j(n) \cdot u(n-j) \dots\dots (4) \\ &= \hat{w}^H(n) \cdot u(n) \end{aligned}$$

에러 신호  $e(n)$ 은 요구된 신호  $d(n)$ 와 횡단선 필터 출력  $\hat{d}(n|u(n))$  사이의 차로써 나타낼 수 있다. 따라서 LMS 알고리즘을 이용하여 탭 가중치 식은 식 (5)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} w(n+1) &= w(n) + \mu \cdot \left( -\frac{\partial e^2(n)}{\partial w(n)} \right) \dots\dots (5) \\ &= w(n) + 2\mu \cdot e(n) \cdot u(n) \end{aligned}$$

탭 가중치를 갱신하기 위해 단일 탭 입력 데이터  $u(n)$ 을 이용하는 것 대신에, 몇몇의 한정된 버퍼들에 저장되는 탭 입력 데이터 벡터들 ( $u(n-1), u(n-2), u(n-3), \dots$ )을 이용할 수 있다. 탭 가중치 벡터의 갱신 처리와 재사용 데이터에 이용되는 버퍼들이 갖는 제안된 구조는 그림 2와 같이 나타낼 수 있다.

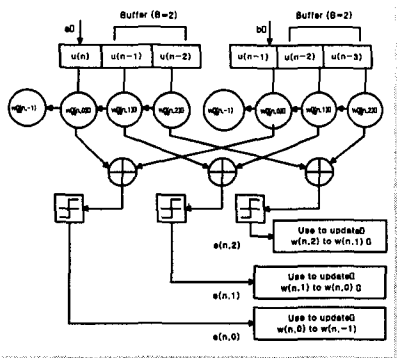


그림 2. 제안된 데이터 재순환 필터의 구조

그림 2에서 나타낸 바와 같이 두 개의 탭 가중치  $a, b$ 를 포함하는 제안된 구조로서 이러한 구조에서 탭 가중치  $a$ 와  $b$ 는 각각 그들의 버퍼 내에 두 개의 재사용 데이터 ( $B=2$ )를 갖는다. 첫 번째로, 탭  $a$ 의 버퍼에서 재사용 데이터  $u(n-2)$ 와 탭  $b$ 의 버퍼에서 재사용 데이터  $u(n-3)$ 은 에러  $e(n,2)$ 에 이용하여  $w(n,1) = [w_0(n,1), w_1(n,1)]^H$ 와  $w(n,2) = [w_0(n,2), w_1(n,2)]^H$ 로 갱신된다. 두 번째로,  $e(n,1)$ 와  $u(n-1) = [u(n-1), u(n-2)]^H$ 을 이용하여  $w(n,0) = [w_0(n,0), w_1(n,0)]^H$ 은  $w(n,1) = [w_0(n,1), w_1(n,1)]^H$ 로 갱신되어진다. 마지막으로 탭 입력 데이터 벡터  $u(n-0) = [u(n-0), u(n-1)]^H$ 와  $e(n,0)$ 을 이용하여 탭 가중치 벡터  $w(n,0) = [w_0(n,0), w_1(n,0)]^H$ 가 생성된다.  $w(n,-1)$ 는 횡단선 필터의 다음 출력 추정치  $\hat{d}(n+1|u(n+1))$ 을 생성하는데 이용될 수 있는 횡단선 필터 탭 가중치 벡터  $w(n+1)$ 에 갱신되어진다.

데이터 재순환 알고리즘을 이용하여 탭 가중치 벡터를 갱신하기 위한 처리 과정은 다음 4단계로 구분하여 실현될 수 있다.

- 단계 1 : 횡단선 필터 구조의 입력신호벡터  $u(n)$ 와 탭 가중치 벡터  $w(n)$ 를 초기화 한다.
- 단계 2 : 재순환 데이터  $B$ 를 결정한다.
- 단계 3 : 식(5)에서 나타낸 에러  $e(n)$ 를 이용하여 탭 가중치 벡터  $w(n)$ 를 갱신하기 위하여 재순환 데이터 수만큼 반복하여 갱신한다.
- 단계 4 : 횡단선 필터 출력  $\hat{d}(n+1|u(n+1))$ 을 생성하는데 이용되는 필터 계수 벡터  $w(n)$ 를  $w(n+1)$ 에 복사한다.

### III. 재순환 데이터 계수특성

#### A 최적화 계수 속도

데이터 재순환 알고리즘으로부터  $w(n+1)$ 과  $w(n)$  사이의 관계는 다음 식 (6)과 같다.

$$w(n+1) = w(n) + 2\mu \sum_{i=0}^B e(n,i) u(n-i) \dots (6)$$

에러 추정치  $e(n,i) = d(n-i) - w^H(n,i)u(n-i)$ 의 이용과 식 (6)의 탭 가중치 갱신의 기대값을 취하면 식 (7)과 같이 나타낸다.

$$\begin{aligned} E[w(n+1)] &= \\ E[w(n)] + 2\mu \sum_{i=0}^B (E[d(n-i)u(n-i)]) \dots\dots (7) \end{aligned}$$

$- E[u(n-i)u(n-i)^H]E[w(n,i)]$  식 (7)에서 탭 입력 데이터와 탭 가중치는 독립적이라고 가정할 수 있으며, 상관행렬  $R$ 을  $R = E[uu^H]$ 라 정의하면, 다음과 같은 식 (8)을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} E[w(n+1)] &= \\ E[w(n)] + 2\mu \sum_{i=0}^B (E[d(n-i)u(n-i)] \dots\dots (8) \end{aligned}$$

$- R \cdot E[w(n,i)]$ )  $R$ 이 정측행렬일 경우를 가정하면,  $R$ 과 최적 탭 가중치 벡터  $w^0$ 의 적분인  $E[\hat{d}(n-1|u(n-1))u(n-i)]$ 과 동일하므로 식(9) 또는 식(10)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} E[w(n+1)] &= \\ E[w(n)] + 2\mu \sum_{i=0}^B (Rw^0 - RE[w(n,i)]) \dots\dots (9) \end{aligned}$$

또는

$$E[w(n+1)] - w^0 = (d(n) - 2\mu R)(E[w(n)] - w^0) - 2\mu \sum_{i=1}^B R(E[w(n, i)] - w^0) \quad (10)$$

식 (10)은 탭 가중치 편차 벡터  $V(n, i) = E[w(n, i)] - w^0$ 를 정의할 때 더욱 간단하게 나타낼 수 있는데, 편차 가중치 벡터의  $j$ 번째 인수는  $v(n, i, j)$ 이다.  $i=0$  이면,  $w(n, 0)$ 은  $w(n)$  그리고  $V(n, 0)$ 은  $V(n)$ 가 된다. 그러므로  $E[w(n, k)] - w^0$ 는  $j$ 번째 인수가  $v(n, 0, j)$ 인  $V(n)$ 가 된다. 따라서,  $v(n+1)$ 은 식(11)과 같이 나타낸다.

$$V(n+1) = (d(n) - 2\mu R)V(n) - 2\mu \sum_{i=1}^B R V(n, i) \quad (11)$$

다른 측면에서 입력 상관 행렬  $R$ 은 일반적 형태  $R = Q \Lambda Q^{-1}$ 로 표현될 수 있으며, 여기서  $\Lambda$ 는 대각 고유치 행렬이고  $Q$ 는  $R$ 의 고유치 벡터 행렬이다.  $V' = Q^{-1}V$ 를 이용하는 중심축으로  $V(n)$ 를 회전하면 식(11)은 식(12)와 같다.

$$V'(n+1) = Q^{-1}(d(n) - 2\mu R)QV'(n) - 2\mu \sum_{i=1}^B Q^{-1}RQV'(n, i) \dots (12)$$

$$= (d(n) - 2\mu \Lambda)V'(n) - 2\mu \sum_{i=1}^B \Lambda V'(n, i)$$

$V'(n+1)$  그리고  $V'(n)$ 와  $V'(n, i)$ 의  $j$ 번째 인수는 각각  $v'(n+1, 0, j)$ ,  $v'(n, 0, j)$  그리고  $v'(n, i, j)$ 이다. 이렇게 대응하는 인수를 이용함으로써, 식 (12)를 다음의 식 (13)과 같이 나타낼 수 있다.

$$v'(n+1, 0, j) = (1 - 2\mu \lambda_j)v'(n, 0, j) - 2\mu \lambda_j [v'(n, 1, j) + v'(n, 2, j) + \dots + v'(n, B, j)] \quad (13)$$

$$= v'(n, 0, j) - 2\mu \lambda_j [v'(n, 0, j) + v'(n, 1, j) + v'(n, 2, j) + \dots + v'(n, B, j)]$$

$v'(n, B, j)$ 의 항은 식(13)의 반복에 의해 식(14)와 같이 나타낼 수 있다.

$$v'(n, B-i, j) = (1 - 2\mu \lambda_j)v'(n, B-i+1, j) \quad (14)$$

기하학적 비율  $1 - 2\mu \lambda_j$ 을 이용한 식은 식(13)을 식(15) 또는 식(16)과 같이 다시 나타낼 수 있다.

$$v'(n+1, 0, j) = v'(n, 0, j) - 2\mu \lambda_j \left[ \frac{v'(n, 0, j)(1 - (1 - 2\mu \lambda_j)^{B+1})}{(1 - (1 - 2\mu \lambda_j))} \right] \quad (15)$$

$$\text{또는} \quad v'(n+1, j) = v'(n, j) \left[ \frac{1 - 2\mu \lambda_j (1 - (1 - 2\mu \lambda_j)^{B+1})}{(1 - (1 - 2\mu \lambda_j))} \right] \quad (16)$$

이를 재배열하면 다음의 식 (17)과 같은 식이 산출된다.

$$v'(n+1, j) = \frac{v'(n, j) \left[ \frac{v'(n, j)}{2\mu \lambda_j} - \frac{v'(n, j)(1 - 2\mu \lambda_j)^{B+1}}{2\mu \lambda_j} \right]}{v'(n, j)(1 - 2\mu \lambda_j)^{B+1}} \quad (17)$$

식 (17)에서 현재의 탭 가중치와 최적화 가중치 사이의 차이가 그들의 기하학적 비율인  $(1 - 2\mu \lambda_j)^{B+1}$ 로 감소함을 나타낸다. LMS 알고리즘  $1 - 2\mu \lambda_j$  [6]에 대한 기하학적 비율과 비교해 보면, 제안된 MSE 비율은 다음의 식 (18) 또는 식(19)와 같이 나타낼 수 있다.

$$MSE \text{ ratio} = (1 - 2\mu \lambda_j)^{2(B+1)} \quad (18)$$

또는

$$\log(MSE \text{ ratio}) = (B+1) \log(1 - 2\mu \lambda_j)^2 \dots (19)$$

## B 수렴 특성

적용 횡단선 필터 구조에서 식(19)를 적용한 제안된 데이터 재순환 알고리즘을 이용하여 나타낸 수렴특성과 기존의 LMS 알고리즘만을 사용한 수렴특성을 비교하면 제안된 데이터 재순환 알고리즘 방식의 수렴특성이 우월하다는 것을 알 수 있다. 또한 식(19)의 산술적 결과로부터 제안된 알고리즘이 LMS 알고리즘과 비교할 때  $(B+1)$ 배의 개선된 수렴 속도를 갖는다는 것을 나타낸다.

식(17)의 결과는 제안된 알고리즘이 안정적이고 식(20)과 같을 때에  $j$ 번째 계수에 대해 수렴함을 보여준다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - 2\mu \lambda_j)^{(B+1)n} = 0 \quad (20)$$

식(20)에서 식 (21)을 충족하는  $\mu$ 를 선택함으로써 수렴조건을 만족하는 것을 알 수 있다.

$$0 < \mu < \frac{1}{\lambda_{\max}} \quad (21)$$

위 식에서  $\lambda_{\max}$ 는  $R$ 의 최대 고유치이다. 조건 (21)은 LMS 알고리즘 [7]과 동일한 결과이다.

그림 3은 매개변수의 집합과 다양한 스텝 크기 매개변수  $\mu$ 를 위한 LMS 알고리즘을 이용한 학습을 나타낸 것으로서,  $\mu$  값이 0.01과 0.1로 전체적 평균 실험의 500번 이상 수행한 결과로서, 스텝 크기 매개변수  $\mu$ 는 계산된 학습 곡선에서 감소시키는 효과를 가져온다. 그러므로 데이터 재순환 알고리즘을 이용한 적용 횡단선 필터의 수렴특성이 보장될 수 있기 때문에, LMS 알고리즘에 이용된 스텝 크기를 이용할 수 있다.

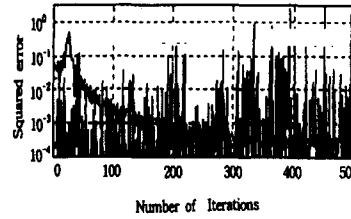


그림 3. 스텝 크기 매개변수  $\mu$ 에 따른 평균 자승 에러

제안된 알고리즘은 연산적 부담을 회피할 수는 없다. 그림 2에서 나타낸 데이터 재순환 필터 구조에서 전체 연산들은  $(2N+1)(B+1)$ 이다. 여기서  $N$ 은 계수들의 수이고  $B$ 는 재사용 데이터의 수이다. LMS 알고리즘의 연산의 복잡성이  $2N+1$ 임을 고려하면, 제안된 알고리즘이 연산의 복잡성을 실질적으로 증가하지 않는다는 것을 알 수 있다.

## IV. 시뮬레이션 결과와 분석

컴퓨터 시뮬레이션은 채널 균등화에 대한 이산-시간 채널을 이용한다. 이 채널의 고유치 확산 비율은 11이고 이것의 임펄스 응답은 식(22)와 같이 나타낼 수 있다.

$$H(Z) = 0.26 + 0.93Z^{-1} + 0.26Z^{-2} \dots (22)$$

그림 5에서 나타낸 시뮬레이션 결과는 적용 횡단선 탭 가중치 개수를 11개로, 탭 가중치 벡터를 조정하기 위한 스텝 크기 파라미터  $\mu$ 는 0.01로, 잡음 변이는 0.001로서 통상적인 LMS 알고리즘( $B=0$ )과 몇가지의 다른  $B$  값을 갖는 제안된 알고리즘의 수렴 비율을 나타내고 있다. LMS 알고리즘의 평균에 의해 적용적으로 조정된 계수를 갖는 적용 횡단선 필터는 수렴을 위해 500 개의 표본들을 요구한다. 곡선이 근사적으로 선형이 되는 -2.5dB 범위와 요구된 샘플의 수를 비교해 보면, 그림 4는  $B=0$ 일 때의

곡선이 500개의 표본들에 이른다는 것을 보인다. 반면에, B=5, B=8, B=11개의 곡선은 각각 83, 56, 42개의 표본에 이른다는 것을 보인다. 이러한 결과는 제안된 알고리즘의 수렴 속도가 재사용 데이터 B의 수에 따라 (B+1)배로 증가된다는 것을 나타낸다. 컴퓨터 시뮬레이션의 결과들은 시뮬레이션 결과들이 제안된 알고리즘의 이론적 분석에 부합한다는 것을 증명한다.

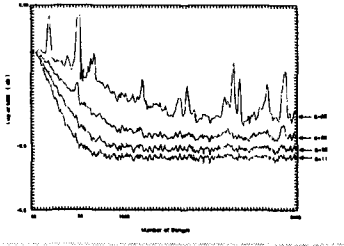
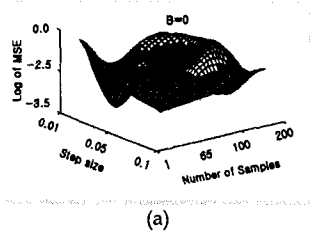
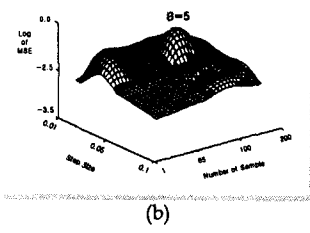


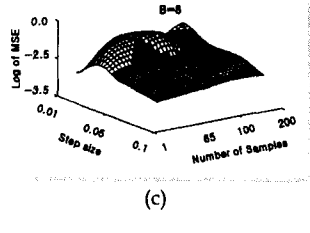
그림 4. 재사용 데이터 B의 다양한 수에 대한 MSE 학습한 곡선



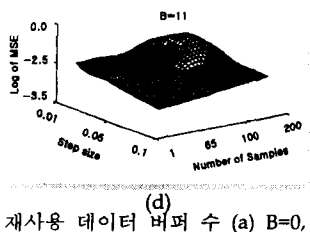
(a)



(b)



(c)



(d)

그림 5. 재사용 데이터 버퍼 수 (a) B=0, (b) B=5 (c) B=8 (d) B=11에 따른 삼차원적 수렴 특성

그림 5는 그림 4의 시뮬레이션 결과에서 나타난 데이터 재순환 버퍼의 크기를 0, 5, 8과 11개로 이용한 삼차원적 시뮬레이션으로서 스텝 크기  $\mu$ 와 표본화 수에 따른 수렴 특성을 나타낸 것으로서 스텝 크기 매개변수  $\mu$ 가 높을수록 점점 더 수렴특성이 근사적으로 접근함을 알 수 있다.

## V. 결론

본 논문은 적응 횡단선 필터의 램 가중치를 빠르게 조정하는 것에 대한 효율적이고 간단한 기술을 제시했다. 램 가중치는 버퍼에 저장된 입력 표본들을 이용함으로써 조정되었다. 이론적 분석은 데이터-재사용 LMS 기술이 (B+1)배로 수렴 속도를 증가시킬 수 있다는 것을 보인다. 이산-시간 채널에 대한 MSE 학습 곡선과 관계를 갖는 컴퓨터 시뮬레이션의 결론은 이론적 분석이 시뮬레이션 결과와 부합함을 보인다. 이는 데이터 재순환 버퍼 알고리즘을 이용한 제안된 적응 횡단선 필터가 LMS 알고리즘과 동일한 수렴 조건을 가지고 실행될 때 연산적 복잡성의 실질적 부담감을 배제하고 적응 횡단선 필터의 수렴속도를 증가시킬 수 있다는 것을 보인다.

## [참고문헌]

- [1] S. U. H Qureshi, "Adaptive Equalization," Proc. IEEE, vol. 73, No. 9, pp. 1349-1387, Sep. 1985.
- [2] A. Gersho, "Adaptive equalization of high dispersive channels for data transmission," B.S.T.J., vol. 48, pp. 55-70, Jan. 1969.
- [3] J. G. Proakis and J. H. Miller, "An Adaptive Receiver for Digital Signalling Through Channel With Intersymbol Interference," IEEE Trans, Inform. vol. IT-15, pp. 484-497, July. 1969.
- [4] J. G. Proakis, *Digital Communications*, McGraw-Hill, 1983.
- [5] B. Widrow, *Adaptive Signal Processing*, Prentice-Hall, 1985.
- [6] S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*, Prentice-Hall, 1991.
- [7] Satorius, E. H. and Pack, J. D., "Application of Least squares Lattice Algorithms to Adaptive Equalization," IEEE Trans. Communications, vol. COM-29, pp.136-142, February 1981.
- [8] Horowitz, L.L., and Senne, K.D., "Performance advantage of complex LMS for controlling narrowband adaptive array," IEEE Trans. on Circuit and Systems, vol. CAS-28, June 1981.
- [9] Brennan, L.E., and Reed, I.S., "An adaptive array signal processing algorithm for communication," IEEE Trans. on Aerospace and Elec. Systems, vol. AES-18, pp. 124-130, Jan. 1982.
- [10] Milstein, L.B., and Das, P.K., "An analysis of a real time transform domain filtering digital communication system, Part 1: Narrowband interference rejection," IEEE Trans. on Commun. vol. Com-28, pp. 816-824, June 1980.
- [11] Soon-Tck Oh, Sang-Dong Na, "Signal interference control for rapid convergence speed using the LMS algorithm in the digital fading system," Basic Science & Eng., vol. 1, No.2, pp. 1159-1164, Nov. 1997.