

사각형 분할에 의한 육각형 노드의 중성자확산 노달기법

이창호, 송재승, 조병오, 지성균, 장문희
한국원자력연구소

요약

육각형 구조에서 중성자 확산방정식의 해를 구하기 위해 육각형을 3개의 사각형으로 분할하여 노달해를 구하는 방법을 개발하였다. 이 방법은 기존의 사각형 노달기법의 기본적인 틀을 그대로 이용할 수 있기 때문에 육각형을 직접 푸는 방법에 비해 간단하며, 향후 노드의 세분화 및 다균 확산방정식에 적용하기 쉬운 장점을 가지고 있다. 이러한 사각형 분할에 의한 육각형 노달해를 구하는 방법을 2차원 IAEA 벤치마크 계산을 통해 검증해 본 결과, 정확성이 잘 유지되고 있음을 알 수 있었다.

1. 서론

현대의 노달방법에 의해 육각형 구조를 해석하는 노달방법으로는 대표적으로 횡방향적분 일차원 노달전개법¹, 노달해석해전개법 (Analytic Function Expansion Nodal Method: AFEN)², 사상변환법 (Conformal Mapping)³, 고차다항식전개법 (Higher-Order Polynomial Expansion Method: HOPEN)⁴ 등이 있다. 일차원 노달전개법은 횡방향으로 적분된 일차원 방정식을 세방향으로 풀어 육각형 면에서의 중성자류를 해석하는 방법인데, 횡방향의 누출중성자 분포를 가정하는데 불연속 미분점이 있어 다른 방법에 비해 오차가 큰 단점을 가지고 있다. 노달해석해전개법은 육각형의 다차원 해석해를 직접 구하기 때문에 상당한 정확성을 유지하는 반면, 계산시간이 상대적으로 많이 소요되고 노드를 세분화하기 힘들며 에너지균이 늘어날 수록 점점 식이 복잡해 진다는 문제점을 가지고 있다. 사상변환법은 균질한 육각형 구조를 알기쉬운 비균질의 사각형 구조로 변환하여 중성자확산해를 구하는 방법으로서, 기존의 사각형 구조의 노달해를 구하는 방법보다 비균질함수만을 추가적으로 고려하기만 하면 된다. 이 방법은 육각형 구조의 간단한 사상변환에 의해 정확한 해를 구할 수 있다는 장점을 갖고 있지만, 노드의 세분화시 사상변환을 위한 비균질함수가 다양하게 고려되어야 한다는 단점을 가지고 있다. 고차다항식전개법은 육각형의 해를 고차다항식으로 전개하여 푸는 방법으로서, 육각형을 한개의 노드로 계산하면 오차가 크기 때문에 기본적으로 삼각형 노드로 분할한 후 계산한다.

위에서 설명된 대부분의 방법들이 각각의 장단점을 갖고 있기는 하지만, 횡방향적분 일차원 노달전개법은 ANL의 DIF3D와 SIEMENS/KWU의 HEXMED에, 노달해석해전개법은 한국원자력연구소의 MASTER 2.0⁵에, 사상변환법은 WH사의 ANC-H에 적용되어 사용중에 있다. 본 논문에서는

기존의 노달방법의 문제점을 해소하기 위해서, 비교적 간단한 횡방향적분 일차원 노달전개법의 골격을 그대로 유지하면서 횡방향 분포의 미분 불연속점을 피하고 노드의 세분화 및 에너지준의 증가에 전혀 문제가 없는 방법으로서 육각형의 사각형 분할 방법을 시도해 보았다. 즉, 육각형을 3개의 마름모로 분할하여 해를 구함으로써, 기존의 육각형 노달해법들이 가지고 있는 단점들의 보완을 기대할 수 있다. 한편, ANL의 Y. Y. Azmy는 노드 세분화에 중점을 두고 노달적분법과 좌표전환을 이용하여 식을 유도하여 이러한 접근방법이 유효한지를 확인한 바 있다.⁶ 본 논문에서는 노달전개법⁷을 사용하여 식을 유도하였으며, 이를 육각형 핵연료집합체로 구성된 벤치마크 문제⁸에 적용하여 정량적인 정확도를 확인해 보았다.

2. 중성자 확산해

여기에서 소개되는 방법은 육각형의 중성자확산해를 구하기 위해서 육각형을 사각형으로 분할하여 사각형의 해를 먼저 구하는 방법이다. 육각형은 그림 1과 같이 3개의 사각형으로 나뉘어질 수 있다.

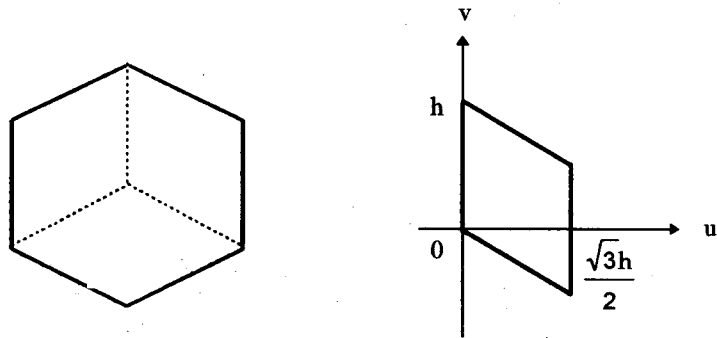


그림 1. 육각형 구조의 사각형 분할 및 좌표

육각형을 구성하는 사각형은 기존의 사각형 구조에 적용되었던 횡방향적분 일차원노달전개법과 동일한 방법으로 해석될 수 있다. 마름모에 대한 일차원식을 얻기 위해서 직접 적분할 수도 있고 좌표전환에 의해 직사각형으로 변환하여 적분할 수도 있다. 그러나, 일차원식을 구하는 방법과 관계없이 마름모 구조에서의 중성자 균형방정식은 다음과 같이 구성된다.

$$\frac{2}{\sqrt{3}h} \sum_{u,v} (J_g^{\text{out}} - J_g^{\text{in}}) + \sum_{g'} \bar{\phi}_{g'} = Q_g, \quad (1)$$

여기에서 $Q_g = \sum_{g'} \left(\frac{1}{\lambda} \nu \Sigma_{fg'} + \Sigma_{g'g} \right) \bar{\phi}_{g'}$,

J_g^{out} = 노드로부터 나가는 부분중성자류,

- J_g^{in} = 노드로 들어오는 부분중성자류,
 λ = 고유치,
 h = 사각형 한변의 길이.

횡방향으로 적분된 일차원 중성자확산방정식은 아래와 같다.

$$\begin{aligned}
 & -D_g \frac{\partial^2}{\partial u^2} \psi_g(u) + \Sigma_{t,g} \psi_g(u) \\
 & = Q_g(u) - \frac{2}{\sqrt{3h}} [J_v(u, h) - J_v(u, 0)] + \frac{1}{\sqrt{3h}} D_g \frac{\partial}{\partial u} \phi_g(u, v) \Big|_{v=0}^{v=h} \quad (2a)
 \end{aligned}$$

$$J_g(u) = -D_g \frac{\partial}{\partial u} \psi_g(u) - \frac{1}{\sqrt{3h}} D_g \phi_g(u, v) \Big|_{v=0}^{v=h}, \quad (2b)$$

$$\begin{aligned}
 \text{여기에서 } \psi_g(u) &= \frac{1}{h} \int \phi_g(u, v) dv, \\
 J_v(u, v) &= -\frac{1}{h} \int D_g \frac{\partial^2}{\partial v^2} \phi_g(u, v) dv.
 \end{aligned}$$

일차원 중성자속은 해석해로 나타낼 수도 있지만, 여기에서는 아래의 4차 다항식으로 전개된다. 따라서, 식(1), (2)를 제외한 대부분의 과정은 기존의 노달전개법의 과정과 동일하다.

$$\psi_g(u) = \sum_{i=0}^4 a_{ig} w_i(u) \quad (0 \leq u \leq \frac{\sqrt{3h}}{2}) \quad (3)$$

식(2b)에 식(3)을 대입하고 경계조건을 적용하면 중성자류와 중성자속의 관계식을 구할 수 있다. 이 관계식은 직사각형의 노달전개법에서 얻어진 결과식에 식(2b)의 오른쪽 마지막 항에 관련된 값이 더해지는 형태로 나타난다. 식(3)의 고차항의 계수를 구하기 위해 직사각형에서와 마찬가지로 잔여치 가중법 (Weighted Residual Method: WRM)을 적용한다. 이 때, 식(2a)에서 볼 수 있는 바와 같이 횡방향 누출중성자 분포 뿐만 아니라 횡방향 표면에서의 중성자속 분포를 알 필요가 있다. 흔히, 횡방향 누출중성자분포는 직사각형에서와 같이 인접노드의 횡방향 중성자누출량 또는 모서리 중성자속을 이용하여 근사되는데, 본 논문에서는 후자의 방법이 사용되었다. 마찬가지로, 이미 알고 있는 표면 중성자속과 모서리 중성자속을 이용하여 횡방향 표면에서의 중성자속 분포도 다음과 같이 2차 다항식으로 가정된다.

$$\phi_g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \Big|_{\mathbf{v}=\mathbf{s}} = \psi_{\text{gus}} + \frac{\phi_{\text{gsr}}^c - \phi_{\text{gsl}}^c}{2} w_1(\mathbf{u}) + \left(\psi_{\text{gus}} - \frac{\phi_{\text{gsr}}^c + \phi_{\text{gsl}}^c}{2} \right) w_2(\mathbf{u}), \quad (4)$$

여기에서 ψ_{gus} = \mathbf{u} 방향의 \mathbf{s} 표면에서의 평균중성자속,
 $\phi_{\text{gsr}}^c, \phi_{\text{gsl}}^c$ = \mathbf{s} 표면의 오른쪽, 왼쪽 모서리 중성자속.

횡방향 누출중성자 분포와 식(4)를 식(2b)에 대입하여 가중함수 w_1, w_2 를 이용하여 WRM을 풀면 고차항의 계수를 구할 수 있다. 육각형 내부의 3개의 사각형에 대해서 위에서 설명된 노달전개법을 적용하여 수치해를 풀면, 각 육각형 노드의 노달값들과 더불어 노심 전체의 고유치를 얻게 된다. 사각형 노드만의 연결로 노심계산을 수행할 수도 있지만, 노심의 대칭조건에 따라 인접노드와의 관계를 설정하는 것이 간단치 않다. 따라서, 이러한 어려움은 육각형 중심으로 인접노드와의 관계를 설정하고 그 내부의 사각형의 노달해를 구한다면 쉽게 해결할 수가 있다. 하지만, 육각형을 사각형으로 분할할 때 그림 2와 같이 두가지 방식으로 나뉘어 질 수 있다.

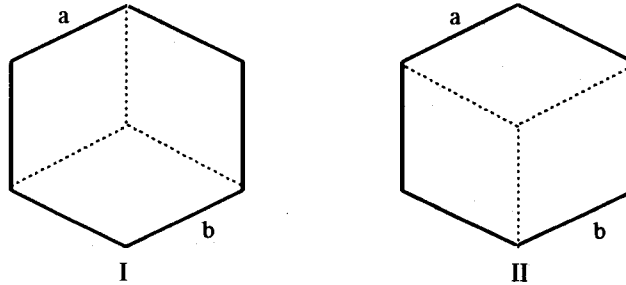


그림 2. 육각형의 사각형 분할 방법의 두가지 형태

예컨대, 중성자가 표면 \mathbf{a} 를 통해 들어와 I 형태로 나뉘어진 3개의 사각형을 통해 표면 \mathbf{b} 로 나가는 양과 II 형태로 나뉘어진 3개의 사각형을 통해 나가는 양은 동일해야 하지만, 실제로는 횡방향 중성자 누출분포, 횡방향 표면에서의 중성자속 분포, 모서리 중성자속에 대한 근사때문에 정확히 일치하지 않는 문제를 가지고 있다. 따라서, 본 논문에서는 I, II의 형태로 나뉘 표면 중성자류를 구한 다음 평균값을 취함으로써 노심상의 대칭이 상실되는 점을 해결하였다. 궁극적으로는, 사각형 노드의 중성자류 관계식을 정리하여 육각형 노드에 해당하는 변수만으로 표현한다면, 위와 같은 문제를 해결할 수 있을 것이다.

3. 비교 결과

사각형분할에 의한 육각형구조 해석방법에 관한 유효성을 알아보기 위해서 2차원 IAEA 벤치마크 문제⁸에 적용해 보았다. 이 벤치마크 문제는 반사체가 없는 경우, 있는 경우, 그리고 각각에 대하여

노심 외곽의 albedo가 0.125, 0.5인 경우로 나뉘어져 있다. 여기에서, albedo가 0.125인 경우는 노심에서 노심밖으로 나가는 중성자류의 60%가 다시 노심으로 되돌아 오는 경우를 말하며, 0.5는 노심으로 들어오는 중성자가 없는 경우를 말한다. 출력분포의 비교결과는 그림 3, 4에 나타나 있으며, 고유치는 표 1에 다른 방법의 결과와 함께 비교되어 있다.

4. 결 론

육각형 구조를 중성자확산해를 구하기 위해 육각형을 사각형으로 분할하여 기존의 일차원 노달전개법을 적용하는 방법이 시도되었다. 이 방법은 노드의 세분화라든가 에너지군의 수의 확장에 쉽게 적용할 수 있다는 장점을 가지고 있다. 검증을 위해 2차원 IAEA 벤치마크 문제에 적용해 본 결과, 기존의 방법의 정확도에 상응하는 결과를 얻을 수 있었다. 현재, 이방법에 적용된 수치방법론은 계산시간의 소모가 크지만, 향후 사각형노드의 중성자류 관계식들을 이용하여 육각형 노드에 해당하는 변수만으로 중성자류 관계식을 구성한다면 대칭성 상실의 문제 해결은 물론 계산시간의 단축 등 좋은 결과를 얻을 수 있을 것이다.

참고문헌

1. M. R. Wager, "Three-Dimensional Nodal Diffusion and Transport Theory Methods for Hexagonal-z Geometry," Nuc. Sci. Eng., 103, 377-391 (1989).
3. N. Z. Cho and J. M. Noh, "Analytic Function Expansion Nodal Method for Hexagonal Geometry," Nuc. Sci. Eng., 121, 245 (1995).
4. Y. A. Chao and N. Tsoulfanidis, "Conformal Mapping Method and Hexagonal Methods-I: Mathematical Foundation," Nuc. Sci. Eng., 121, 202-209 (1995).
4. J. Y. Cho and C. H. Kim, "Polynomial Expansion Method for Hexagonal Core Analysis," Trans. Am. Nuc. Soc., Francisco, October (1995).
5. C. H. Lee et al., "MASTER 2.0 User's Manual," KAERI/UM-3/98, March (1998).
6. Y. Y. Azmy, "A Nodal Integral Method for Neutron Diffusion in Hexagonal Geometry," Proc. of Topical Mtg. On Advances in Reactor Physics, Charlestone, March 8-11 (1992).
7. H. Finnemann, H. Raum, "Nodal Expansion Method for the Analysis of Space-time Effects in LWRs," Proceedings of a Specialists' Meeting on Calculation of 3-Dimensional Rating Distributions in Operationg Reactors, Paris, November (1979).
8. Y. A. Chao and N. Tsoulfanidis, "Conformal Mapping Method and Hexagonal Methods-II: Implementation in the ANC-H Code," Nuc. Sci. Eng., 121, 210-225 (1995).

표 1. 2차원 IAEA 벤치마크 문제에 대한 방법별 고유치 오차,

출력 오차의 최대값 및 평균값 비교

종류			AFEN	HOPEN ¹⁾	ANC-H	사각형분할	
반사체없음	albedo= 0.125	고유치(pcm) ²⁾	+0	+64	+6	-27	
		출력(%) ³⁾	최대	2.78	2.22	0.5	0.83
			평균	0.77	1.00	-	0.17
	albedo= 0.5	고유치(pcm) ²⁾	-35	+31	-7	-48	
		출력(%) ³⁾	최대	0.47	0.49	0.8	1.06
			평균	0.16	0.23	-	0.39
반사체있음	albedo= 0.125	고유치(pcm) ²⁾	-26	+41	+7	-26	
		출력(%) ³⁾	최대	0.43	1.02	0.5	0.55
			평균	0.16	0.49	-	0.15
	albedo= 0.5	고유치(pcm) ²⁾	-34	+24	-2	+5	
		출력(%) ³⁾	최대	0.69	0.48	0.7	0.66
			평균	0.27	0.25	-	0.26

1) HOPEN은 육각형을 6개의 삼각형으로 분할하여 구한 것임.

2) 계산값 - 기준값⁸

3) (계산값 - 기준값) / 기준값 * 100

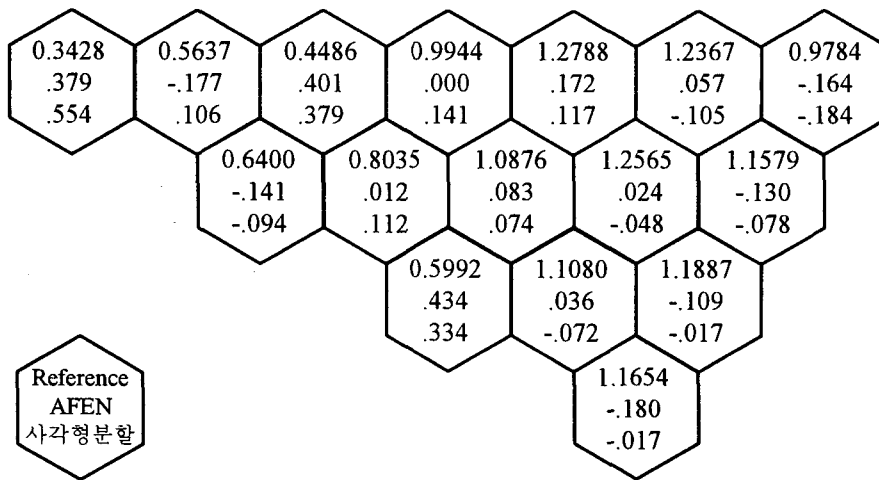


그림 3. 2차원 IAEA 벤치마크 문제 (반사체 있음, albedo=0.5)

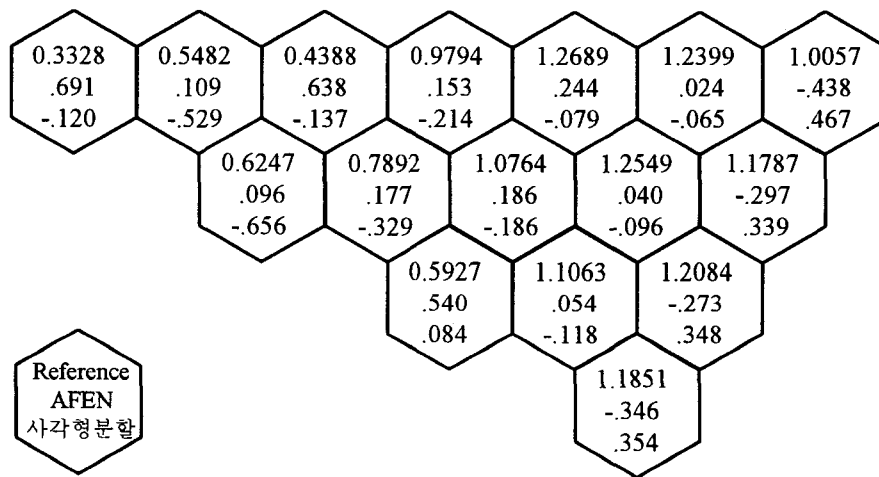


그림 4. 2차원 IAEA 벤치마크 문제 (반사체 있음, albedo=0.125)