

# 철도차량의 설계 민감도 해석을 위한 효율적인 알고리즘 개발

## An Efficient Algorithm for Design Sensitivity Analysis of Railway Vehicle Systems

배대성\*  
Bae, Dae Sung

조희재\*\*  
Cho, Heui Je

백성호\*\*  
Beak, Sung Ho

이관섭\*\*\*  
Lee, Kwan Sup

조연옥\*\*\*  
Cho, Yun Ok

---

### ABSTRACT

Design sensitivity analysis of a mechanical system is an essential tool for design optimization and trade-off studies. This paper presents an efficient algorithm for the design sensitivity analysis of railway vehicle systems, using the direct differentiation method. The cartesian coordinate is employed as the generalized coordinate. The governing equations of the design sensitivity analysis are formulated as the differential equations. Design sensitivity analysis of railway vehicle systems is performed to show the validity and efficiency of the proposed method.

---

### 1. 서론

기계적 시스템의 최적화를 위해서 많은 노력이 지금까지 이루어져 왔다. 그런 노력들 중에서 Edman[1]과 그의 연구진은 해석적 설계 방법을 제안하였는데, 이를 통해 함수 생성 및 궤적 생성, 강체의 유도문제를 다루었다. 해석적 설계방법들은 특수한 기계 시스템을 설계하는데 있어 매우 유용하지만, 일반적인 기계 시스템을 설계하는데 있어서는 한계를 가지고 있다. 그래서 일반적인 기계 시스템의 설계를 다루기 위해 수치적 기법이 제안되었다[2, 3, 4].

수치적 최적화는 구조 설계에 있어서 일상적인 절차가 되어왔다. 구조물의 설계에서 발전되었던 크기(size), 모양(shape), 배치(configuration) 및 토폴로지(topology) 최적화는 수치적 최적화 기법에 바탕을 두고 있다[5]. 이러한 구조 설계 분야와는 대조적으로 기계 시스템의 최적 설계를 가능하게 하는 일반적인 코드(code)는 거의 없다. 가장 어려운 점 중 하나는 일반 기계 시스템의 설계 변화에 따른 동적 거동의 설계 민감도에 대해 효율적이고 신뢰할 수 있는 해석을 하는 것이다. 그래서 철도 차량의 동적 거동을 해석할 수 있는 상용 코드가 존재함에도 불구하고 최적 설계가 가능한 프로그램이 전무한 것은 이러한 이유 때문이다. 이 논문의 목적은 일반적인 기계시스템의 효율적이고 신뢰할 수 있는 설계 민감도 해석 기법을 오픈(open) 시스템인 철도 차량에 적용하는 것이다.

설계 민감도에 대한 지배 방정식을 유도하는데는 두가지 방법이 있다. 운동 방정식을 미분하여

---

\* 한양대학교 부교수, 정회원

\*\* 한양대학교 석사과정

\*\*\* 한국 철도기술연구원, 정회원

지배 방정식을 얻는 직접 미분법(direct differentiation method) [4]과 최적 제어 분야[6]에서 비롯되었으며, 동적 거동 해석에는 forward 수치 적분을 민감도 해석에는 backward 수치 적분을 필요로 하는 인접 변수법(adjoint variable method)이 있다. backward 수치 적분법은 수치적 오차를 제어하는 어려움을 가질 수 있기 때문에 본 연구에서는 직접 미분법을 사용한다. 이 방법은 이전의 연구들을 통해 상당히 일반적인 지배 방정식을 유도해 냈지만, 복잡한 공식으로 인해 적용대상은 상대적으로 쉬운 것들이었다. Mani[7]가 처음으로 완전한 3차원 문제에 대해 적용을 했으며, 속도 변환법으로 설계 민감도의 지배 방정식을 유도하였다. 공식의 복잡성은 상징적 언어(symbolic language)를 사용함으로써 해결할 수 있었다.

본 연구는 먼저 일반적인 오픈 시스템의 설계 민감도 해석을 다룰 수 있는 지배 방정식과 수치적 알고리즘을 개발하고 두 번째로 알고리즘의 효율성과 연구의 검증에 대해 철도 차량 동적 거동 해석 알고리즘을 접목해 철도 차량의 설계 민감도 해석을 수행할 것이다.

논문의 2장에서는 오픈 시스템인 철도 차량의 운동 방정식을 생성하였고, 3장에서는 설계 민감도 해석의 지배 방정식을 생성하였다. 그리고 4장에서는 철도 차량의 설계 문제를 정의하였으며, 5장에서는 시뮬레이션 결과를 제시하였다. 마지막으로 6장에서는 결론을 이끌어 냈다.

## 2. 철도 차량의 일반적인 운동 방정식

구속조건이 없는 기계적 시스템인 철도 차량의 운동방정식을 변분형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\delta \mathbf{q}^T (\mathbf{M} \dot{\mathbf{v}} - \mathbf{Q}) = 0 \quad (2.1)$$

위 식에서  $\delta \mathbf{q}$ 는 유클리드공간  $\mathbf{R}^n$ 에서의 가상변위벡터이고,  $\dot{\mathbf{v}}$ 는 가속도 벡터이다. 질량 매트릭스  $\mathbf{M}$ 과 힘벡터  $\mathbf{Q}$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\mathbf{M} = \text{diag}(\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \dots, \mathbf{M}_{nbd}) \quad (2.2)$$

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{Q}_1^T, \mathbf{Q}_2^T, \dots, \mathbf{Q}_{nbd}^T) \quad (2.3)$$

식(2.2)과 식(2.3)에서 nbd는 시스템을 구성하는 몸체(body)의 개수이고,  $\delta \mathbf{q}$ 는 임의의 벡터이므로 다음과 같은 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}) = \mathbf{M} \dot{\mathbf{v}} - \mathbf{Q} = 0 \quad (2.4)$$

## 3. 설계 민감도 지배 방정식

### 3. 1. 운동방정식의 암시적 수치적분

철도차량의 운동방정식은 암시적으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{v} - \dot{\mathbf{q}} = 0 \quad (3.1.a)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}) = 0 \quad (3.1.b)$$

식(3.1)의 미분방정식을 풀기 위한 Backward Differentiation Formula(BDF)을 적용하면 다음과 같은 식을 구할 수 있다.

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \\ \frac{h}{b_0} \mathbf{R}_1 \\ \frac{h}{b_0} \mathbf{R}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}(\mathbf{q}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}, \lambda) \\ \frac{h}{b_0} \dot{\mathbf{v}} - \mathbf{v} - \zeta_1 \\ \frac{h}{b_0} \mathbf{v} - \mathbf{q} - \zeta_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.2)$$

여기에서  $\zeta_1 \equiv \frac{1}{b_0} \sum_{i=1}^k b_i \mathbf{v}_{n-i}$ ,  $\zeta_2 \equiv \frac{1}{b_0} \sum_{i=1}^k b_i \mathbf{q}_{n-i}$ 이고, 여기서  $k$ 는 적분차수,  $b_i$ 는 BDF 상수이다.

식(3.2)에서 방정식의 수와 미지수의 수가 같으므로 식(3.2)의 해는 구해질 수 있다. 이를 위해 Newton의 수치적 방법이 이 해  $\mathbf{x}$ 를 구하는 데 적용된다.

$$\mathbf{H}_x \Delta \mathbf{x} = -\mathbf{H} \quad (3.3.a)$$

$$\mathbf{x}^{i+1} = \mathbf{x}^i + \Delta \mathbf{x} \quad (3.3.b)$$

### 3. 2. 설계 민감도 방정식의 암시적 수치적분

기계적 시스템은 시스템을 구성하는 몸체들과 조인트, 작용하는 힘요소로 이루어진다. 이러한 요소들의 물리적 성질은 다양한 변수들로 묘사되어진다. 그러한 변수들을 설계변수로 정의하고 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{b} = [b_1, b_2, \dots, b_k]^T \quad (3.4)$$

설계변수를 예를 들면 조인트의 기하학적 성질, 몸체의 관성에 대한 성질, 힘요소의 스프링 강성 등이 될 수 있다.

설계변수 벡터  $\mathbf{b}$ 에 대해 식(3.2)를 미분하고 BDF적분공식을 적용하면 다음과 같은 설계 민감도 지배 방정식을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_b) = \begin{bmatrix} \frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{b}} \\ \mathbf{h}'\mathbf{R}_3 \\ \mathbf{h}'\mathbf{R}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_q \mathbf{q}_b + \mathbf{F}_v \mathbf{v}_b + \mathbf{F}_\dot{v} \dot{\mathbf{v}}_b + \mathbf{F}_b \\ \mathbf{h}' \dot{\mathbf{v}}_b - \mathbf{v}_b - \zeta_1 \\ \mathbf{h}' \mathbf{v}_b - \mathbf{q}_b - \zeta_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (3.5)$$

여기서  $\mathbf{h}' \equiv \frac{\mathbf{h}}{b_0}$ ,  $\mathbf{x}_b = [\lambda_b^T, \dot{\mathbf{v}}_b^T, \mathbf{v}_b^T, \mathbf{q}_b^T]^T$ 이다.

식 (3.5)은 미지수의 갯수와 같은 수의 방정식을 이룬다. 따라서  $\mathbf{x}_b$ 에 대해 Newton의 수치적 방법을 식(3.5)에 적용하면 다음과 같다.

$$\mathbf{G}_{x_b} \Delta \mathbf{x}_b = -\mathbf{G} \quad (3.6.a)$$

$$\mathbf{x}_b^{i+1} = \mathbf{x}_b^i + \Delta \mathbf{x}_b \quad (3.6.b)$$

식(3.6)을 자세히 쓰면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{F}_q \Delta \mathbf{q}_b + \mathbf{F}_v \Delta \mathbf{v}_b + \mathbf{F}_\dot{v} \Delta \dot{\mathbf{v}}_b + \mathbf{F}_b + \frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{b}} = \mathbf{0} \quad (3.7.a)$$

$$\mathbf{h}' \Delta \dot{\mathbf{v}}_b - \Delta \mathbf{v}_b + \mathbf{h}' \mathbf{R}_3(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (3.7.b)$$

$$\mathbf{h}' \Delta \mathbf{v}_b - \Delta \mathbf{q}_b + \mathbf{h}' \mathbf{R}_4(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (3.7.c)$$

식(3.7.b)와 식(3.7.c)에서  $\Delta \mathbf{v}_b$ 와  $\Delta \dot{\mathbf{v}}_b$ 는  $\Delta \mathbf{q}_b$ 의 함수로 나타내어 식(3.7.a)에 대입하면 다음과 같이 나타낼 수 있고, 이 식은  $\Delta \mathbf{q}_b$ 에 대해서 풀 수 있다.

$$\mathbf{K}^* \Delta \mathbf{q}_b = \mathbf{R}_5 \quad (3.8)$$

여기서  $\mathbf{R}_5 \equiv -\mathbf{h}'^2 \frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{b}} + \mathbf{h}'(\mathbf{h}'\mathbf{F}_v + \mathbf{F}_\dot{v})\mathbf{R}_4 + \mathbf{h}'^2 \mathbf{F}_\dot{v}\mathbf{R}_3$ 로 정의되고,  $\mathbf{K}^* \equiv \mathbf{h}'^2 \mathbf{F}_q + \mathbf{h}'\mathbf{F}_v + \mathbf{F}_\dot{v}$ 로 정의된다.

$\Delta \mathbf{v}_b$ 에 대해서 풀기 위해 식 (3.7.b)를 다시 쓰면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$h' \Delta v_b = \Delta q_b - h' R_4 \quad (3.9)$$

식(3.9)의 양변에  $K^*$ 를 곱하고  $h'$ 를 나누어주면  $\Delta v_b$ 에 대한 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$K^* \Delta v_b = K^*(c_j \Delta q_b - R_4) \quad (3.10)$$

여기서  $c_j = \frac{1}{h'}$ 이다.

$\Delta \dot{v}_b$ 에 대해서도 같은 과정으로 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$K^* \Delta \dot{v}_b = K^*(c_j \Delta v_b - R_3) \quad (3.11)$$

## 4. 철도 차량의 설계 문제의 정의

### 4. 1. 성능 지수의 정의

일반적인 차량의 설계 문제에 있어서 가장 우선시 되는 것은 승차감과 안전성이다. 철도 차량을 설계하는데 있어서도 승차감(ride comfort)과 주행안전성(safety)을 확보해야 하는 것은 매우 중요한 과제이다. 그 외에 철도 차량을 설계하는데 있어서 주행 안정성, 곡선 추종 성능 등을 고려하여야 한다. 세부적으로 주행 안전성은 탈선계수, 횡압, 그리고 윤중감소량으로 정의되고 승차감에서는 승차감 계수, 주행 안정성에는 대차 yaw감쇠량, 곡선 추종 성능에서는 대차 회전 저항을 성능 지수로 정의 할 수 있다.

본 연구에서는 주행 안전성과 승차감의 성능 지수에 한하여 설계 민감도 해석을 수행하였다. 특히 주행 안전성에 있어서 탈선계수에 대해 설계 민감도 해석을 수행하였다. 이는 횡압이나 윤중감소량이 탈선계수에 의존하기 때문이다.

현수장치(suspension)는 주행 안전성과 승차감에 민감한 설계 요소이다. 불규칙도(irregularity)가 심한 레일(rail)위를 철도 차량이 고속 주행할 때, 굴곡진 곳을 통과할 때 수직 또는 측면으로 느껴지는 큰 가속도에 기인해 승객은 혼란 불쾌감을 느끼게 된다. 이럴 때 승차감을 좋게 하기 위해서는 현수장치의 유연성(flexibility)을 증가시켜줘야 하는 것은 두 말할 나위 없다. 반대로 수직 방향의 불규칙도와 곡선 주행에 있어 안전성을 확보하기 위해서는 현수장치의 강성(stiffness)을 증가시켜줘야 한다. 이처럼 승차감과 안전성의 두 가지 측면에서 이들은 서로 이율 배반적인 관계에 있다고 볼 수 있다. 따라서 차량의 올바른 동적거동을 이해하기 위해서는 현수장치의 정확한 모델링은 매우 중요한 부분이다. 따라서 현수장치의 설계요소들에 대한 설계 민감도 해석을 수행하였다.

#### (1) 주행안전성

주행 안전성의 성능지수는 탈선계수, 윤중 감소량, 횡압으로 정의할 수 있다.

탈선계수는 휠의 측면 하중과 수직 하중의 비로 정의되며, 식(4.1)의 조건을 만족해야 한다.

$$L(t) / V(t) < 0.8 \text{ or } 1.1 \quad (4.1)$$

여기서  $L(t)$ 는 휠의 횡 방향 하중이고,  $V(t)$ 는 휠에 작용하는 수직 방향 하중을 의미한다. 탈선계수가 0.8이나 1.1보다 작아야 한다는 것은 아주 짧은 시간 영역에서는 0.8과 1.1사이의 값이 되어도 무관하다는 것을 의미한다.

윤중감소량은 동적 수직 하중에 대한 정적 평형 상태의 수직 하중의 비로 정의되며, 식(4.2)의 조건을 만족해야 한다.

$$V(t) / Q > 0.8 \quad (4.2)$$

여기에서  $V(t)$ 는 휠의 동적 수직 하중이고  $Q$ 는 정적 평형 상태의 수직 하중이다.

횡압은 휠의 측면 하중에 대한 상한치를 제공하는 것이다. 식(4.3)은 횡압을 정의했다.

$$L(t) \leq 5.3 \quad (4.3)$$

여기서  $L(t)$ 는 휠의 횡 방향 하중이고 5.3톤 보다 작아야 함을 의미한다.

## (2) 주행 안정성

주행 안정성은 직진 주행시 횡방향으로 충격을 가해 yaw 또는 휠의 y방향 변위가 10%이내에 들어와야 한다. 이때 주행 조건은 conicity가 0.05와 0.4일 때 차량의 임계속도는 각각 120km/h와 80km/h가 되어야 한다.

본 연구에서는 위의 경우가 포함되어 있지 않다. 왜냐하면 곡선 주행에서는 곡률 반경에 따라 휠의 yaw량이 발산되기도, 그리고 일정하게 유지되기도 하기 때문에 주행 안정성을 고려할 수가 없었기 때문이다.

## (3) 곡선 추종 성능

곡선 추종 성능 지수는 대차 회전 저항으로 마모를 판단하는 것이다. 식(4.4)는 대차 회전 저항과 그 조건을 나타낸다.

$$X(t) = M(t)/2QB \leq 0.5 \quad (4.4)$$

여기서  $M(t)$ 는 대차의 yaw방향의 회전력을 의미하며,  $Q$ 는 정적 평형 상태의 수직 하중,  $B$ 는 대차간 거리를 의미한다.

## (4) 승차감

승차감에 대한 평가 지수는 승차감 지수를 계산해서 구한다. 승차감 지수는 식(4.5)에 의해 정의된다.

$$W_z = 0.896 (a^3 f_f / f)^{0.1} \quad (4.5)$$

여기서  $a$  ( $\text{cm/s}^2$ )는 주파수 영역에서 측면, 수직 가속도이며,  $f$  (Hz)는 주파수를 의미한다. 또한  $f_f$ 는 각 주파수별 계수로 측면, 수직 방향에 대해 각각 아래와 같이 정의된다.

식(4.5)로 구한 승차감 지수는 철도 기술 연구소에서 제시한 평가 기준이며,  $W_z$ 가 3.0이상인 경우 주행에 불편을 주며, 이하인 경우에는 승차감이 우수한 것으로 판정할 수 있다.

## 4. 2. 설계 변수의 정의

철도 차량은 그림 4.와 같이 전·후대차와 각 휠셋을 연결하는 1차 현수장치와 객차와 전·후대차를 연결하는 2차 현수장치를 가지고 있다. 이들 중 트랙과 직접 접촉하는 휠셋에 장착된 1차 현수 장치는 2차 현수 장치에 비해 주행안전성에 더 큰 영향을 주는 인자(parameter)이고, 객차에 장착되어 있는 2차 현수장치는 승차감에 더 큰 영향을 주는 인자이다.

1차 현수장치에는 6가지의 설계 요소들을 가지고 있다. x, y, z세방향의 스프링 상수와 감쇠 계수를 가지고 있으며, 2차 현수 장치에는 공기 스프링을 포함해 8개의 설계 요소를 가지고 있는데 이 중 측면 버퍼의 스프링 상수와 감쇠 계수는 비선형성을 지닌 설계요소이다. 또한 철도 차량의 고정 축거와 대차 중심간 거리를 설계 요소로 정의 할 수도 있다.

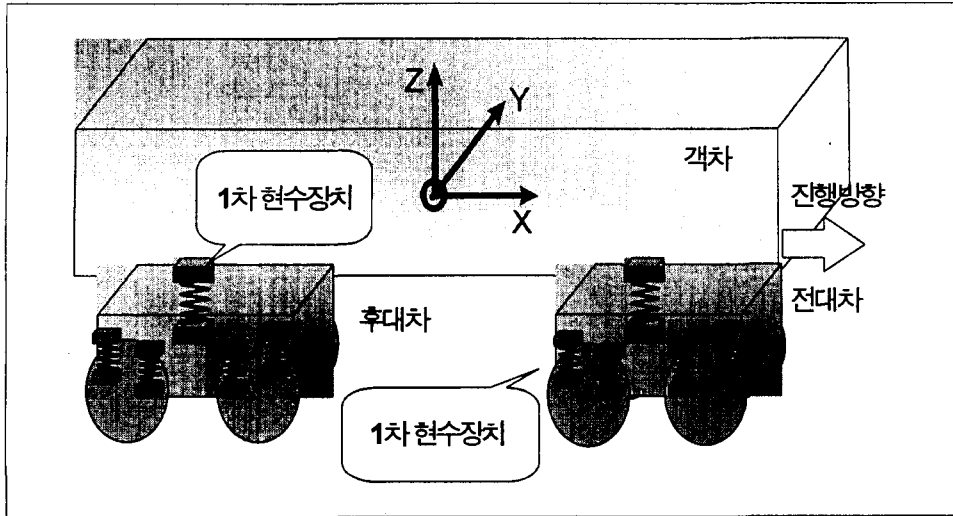


그림 4. 철도 차량의 1차 현수장치 및 2차 현수장치

## 5. 민감도 해석 결과

본 연구는 다음의 도표 1. 과 같은 주행 조건하에서 시뮬레이션을 실시하였다.

도표 1. 민감도 해석을 위한 주행조건

CASE	곡률반경 (1/km)	궤간 (mm)	슬래그 (mm)	완화 곡선 (m)	주행 속도 (m/s)	불규칙도	conicity (rad)
1	1/0.4	65	5.6	39.0	20.8	없음	0.1
2	직선 주행	0.0	0.0	0.0	22.2	있음	0.05

설계 민감도 해석은 주행안전성과 승차감에 대해 정의된 모든 설계 변수에 대해 민감도를 구하였다. 그리고 가장 민감한 설계 변수의 해석적 민감도와 FDM을 통해서 얻은 민감도를 비교 검증하였다.

### 5. 1. 주행조건 1에서의 해석 결과

그림 5. 1.은 성능지수인 탈선계수에 대하여 설계 변수로 정의된 1차 현수 장치의 x방향 스프링 상수의 해석적 민감도와 FDM을 통한 결과가 동일함을 보여 주고 있다.

### 5. 2 주행조건 2에서의 해석 결과

그림 5. 2.는 성능지수인 승차감을 위한 수직 가속도에 대해 설계 변수로 정의된 2차 현수 장치의 스프링 상수의 해석적 민감도와 FDM을 통한 결과 동일함을 보여 주고 있다.

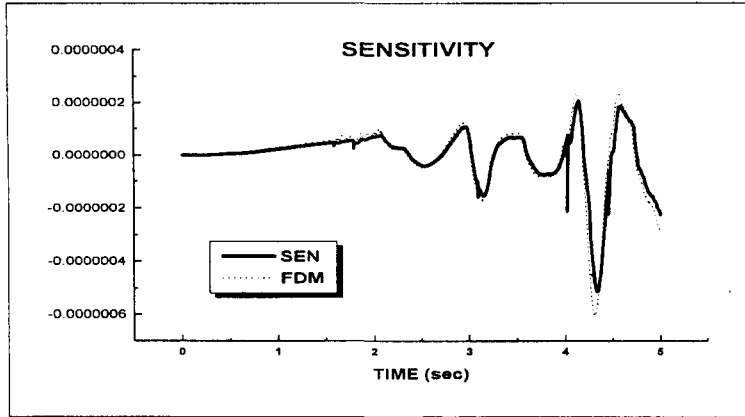


그림 5. 1. 탈선계수에 대한  $k1x$ 의 민감도

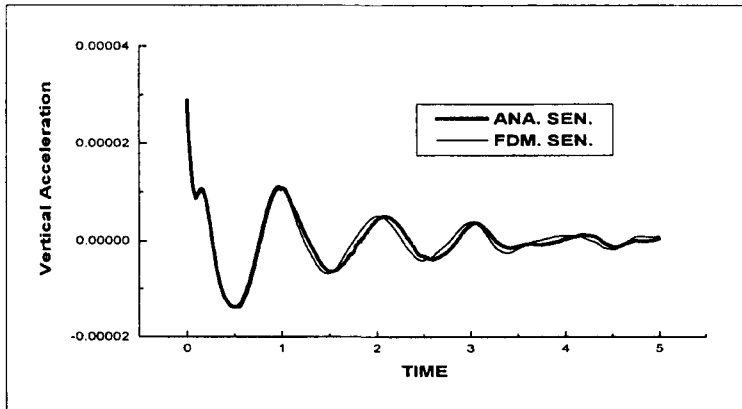


그림 5. 2. 수직 가속도에 대한 2차 현수장치  $k$ 의 민감도

## 6. 결론

본 연구를 통하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

철도차량에 대한 운동방정식과 설계 민감도 지배 방정식을 유도할 수 있었고, 그에 BDF 적분기를 이용한 효율적인 알고리즘을 개발하였다. 철도차량의 차량과 트랙을 모델링하여 설계문제를 정의하고, 설계변수를 설정하여 민감도 해석을 수행하였다. 그 결과를 동적거동해석 결과를 이용한 FDM결과와 비교하여 설계 민감도 해석의 타당성을 입증하였다. 추후 얻어진 민감도를 이용한 최적화가 이루어질 것이다.

## 참고문헌

1. Arthur G. Erdman, George N. Sandor, 1991, "Mechanism Design: Analysis and Synthesis, Volume I", Prentice-Hall.
2. Hong-Liu Zou, Karim Abdel-Malek, JiaYi Wang, 1996, "Kinematic Sensitivity Analysis of The Spatial Four-Bar Mechanism", ASME Design Engineering Technical Conferences and Computers in Engineering Conference, 96-DETC/DAC-1471, pp. 1-9
3. Javier Urruzola, Alejo Avello, 1996, "Optimization of Multibody Dynamics using Pointwise

- Constraints and Arbitrary Functions", ASME Design Engineering Technical Conferences and Computers in Engineering Conference, 96-DETC/MECH -1569, pp. 1-12
4. Radu Serban, Jeffery S. Freeman, 1996, "Direct Differentiation Methods for The Design Sensitivity of Multibody Dynamic Systems", ASME Design Engineering Technical Conferences and Computers in Engineering Conference, 96-DETC/DAC -1087, pp. 1-7
  5. Edward J. Haug, Kyung K. Choi, Vadim Komkov, 1986, "Design Sensitivity Analysis of Structural Systems", Mathematics in Science and Engineering Volume 177
  6. Arthur E. Bryson, Jr. Yu-Chi Ho, 1975, "Applied Optimal Control : Optimization, Estimation, and Control"
  7. H. Ashrafiuon, N. K. Mani, 1990, "Analysis and Optimal Design of Spatial Mechanical Systems", Journal of ASME, Vol. 112, pp. 200-207

본 연구는 철도연구원의 전동차 표준화 사업의 지원을 받아 연구되었음.