

# 섬유의 배향밀도함수를 이용한 실의 역학적 거동 예측

전 봉 수

성균관대학교 섬유공학과

## 1. 서 론

실의 역학적 특성은 실을 구성하고 있는 섬유의 역학적 특성은 물론 실의 구조적 특성에 의존한다. 실의 구조적 특성은 구성 섬유의 경로에 따라서 결정이 되는데 지금까지는 주로 이상 나선 구조 모델로 가정한 후 실의 역학적 특성을 고찰하여 왔다[1]. 그러나 실제로 꼬임이 있는 실을 방출할 경우 꼬임을 부여하는 과정에서 구성 섬유들 간에 걸리는 장력의 차이에 의하여 섬유들은 실의 외부에서 내부로 또는 내부에서 외부로 이동하게 된다. 이러한 섬유의 이주 현상 때문에 섬유는 복잡한 경로를 가지며 실을 구성하게 된다.

이러한 섬유의 이주 현상에 대한 연구 결과를 보면 Treloar와 Riding[2]은 실의 내부에 있는 섬유의 이주 피치를 측정하였고, 이러한 피치의 변동을 섬유의 이주 거동을 변수로서 사용하였다. 또한 구성섬유의 평균위치, 평균위치의 제곱의 평균의 제곱근, 평균 이주 세기, 이주 주기, 이주 빈도로서 이주 거동을 나타내려는 시도가 있었다. 그렇지만 이러한 섬유의 이주 거동에 대한 수학적인 모델을 제시하여 실의 역학적 거동에 미치는 영향에 대한 연구는 거의 없었다. 더욱이 이러한 마이그레이션에 대한 연구는 로우터 정방, 에어 젯 정방, 마찰 정방 등 새로운 정방 방식으로 방출된 실의 구조를 고찰하여 역학적인 거동을 예측하는 데는 필수적이다.

그동안 Jeon과 Kim[3]은 부직포의 탄성거동을 예측하기 위하여 부직포를 구성하는 섬유의 배향 밀도 함수를 정의하였으며 Jeon[4,5]은 섬유의 배향 밀도 함수를 정의하여 여러 가지 섬유의 마이그레이션 형태에 따라 실의 초기 탄성 계수를 예측한 바가 있지만 마이그레이션 형태를 특수한 형태로 가정을 하였었다. 그러므로 본 연구에서는 마이그레이션이 이상적인 마이그레이션 거동을 할 때 이를 수학적인 모델로 가정한 후 실의 역학적 거동을 예측하였다.

## 2. 이 론

### 2.1 배향 밀도 함수의 정의

이전의 논문[5]에서 배향 밀도 함수를 식(1)과 같이 정의 하였다.

$$P(\beta) d\beta = \frac{dA}{\int dA} \quad (1)$$

여기서  $dA$ 는 배향각  $\beta$ 가 동일한 섬유들이 실의 단면적에서 차지하고 있는 미소 면적이다.

그리고 상대적인 탄성계수  $E_R$  은 식(2)와 같이 유도하였다.

$$E_R = \frac{E_y}{E_f} = \frac{\int (\cos^2 \beta - \nu \sin^2 \beta) \cos^2 \beta dA}{\int dA} \quad (2)$$

여기서  $E_f$  는 섬유의 초기탄성계수이고,  $E_y$  는 실의 초기탄성계수이다.

## 2.2 배향 밀도 함수의 유도

### 2.2.1 이상 나선형 구조

이상 나선형의 구조는 식(3)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \phi &= \omega t \\ z &= ct \\ \frac{dr}{dz} &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

여기서  $t$  는 매개변수이며  $\omega$  와  $c$  는 상수이다.

식(3)과 식(1)을 이용하여 배향 밀도 함수를 구하면 식(4)와 같다.

$$P(\beta) = \frac{2}{\tan^2 \alpha} \tan \beta \sec^2 \beta \quad (4)$$

식(4)로부터 평균 배향각을 구하면 식(5)와 같다.

$$\beta_m = \int \beta P(\beta) d\beta = \frac{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \quad (5)$$

또한 식(4)를 식(2)에 대입하면 상대적인 탄성계수  $E_R$  은 식(6)과 같이 된다.

$$E_R = (1 + \nu) \cos^2 \alpha + \nu \frac{\ln \cos^2 \alpha}{\tan^2 \alpha} \quad (6)$$

### 2.2.2 이상적인 마이그레이션 구조

실의 단면에 있는 섬유의 충전 밀도가 균일하고 섬유가 이상적인 마이그레이션 거동을 따른다고 가정하면 단면 방향의 마이그레이션 거동은 식(7)로 표현할 수가 있다.

$$r = \frac{H \tan \alpha}{2\pi \sqrt{2\pi M_r}} \sqrt{\phi} \quad (7)$$

여기서  $M_r$  은 실의 단면 방향으로 마이그레이션 정도를 나타내는 변수이며,  $\phi$  는 실의 단면에서의 회전각,  $H$  는 피치,  $\alpha$  는 꼬임각이다.

또한 실의 길이 방향으로의 마이그레이션 거동은 식(8)로 나타낼 수 있다.

$$z = \frac{h}{2\pi M_r} \phi \quad (8)$$

여기서 무차원 변수  $M_h = h/H$  를 도입한 후 식(1)의 배향 밀도 함수를 구하면 식(9)와 같다.

$$P(\beta) = \frac{M_h^2}{M_r^2 \tan^2 \alpha} \tan \beta \sec^2 \beta \left( 1 \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{M_r^2 \tan^4 \alpha}{4\pi^2 M_h^4 \tan^4 \beta}}} \right) \quad (9)$$

### 3. 결과 및 고찰

Fig. 1은 이상 나선 구조를 갖는 실의 경우 꼬임각,  $\alpha$ 가 변화함에 따른 각각의 배향 밀도 함수를 나타낸 것이다. Fig. 2는 이상적인 마이그레이션 거동을 하는 실의 경우 길이 방향으로의 마이그레이션 정도에 따른 배향각의 변화를 보인 것이다. Fig. 3은 반지름 방향으로의 마이그레이션 정도에 따른 배향각의 변화를 보인 것이다. Fig. 4는  $M_h$ 의 변화에 따른 실의 상대적인 초기 탄성계수,  $E_R$ 을 구한 것이다. Fig. 5는  $M_r$ 의 변화에 따라  $E_R$ 을 구하여 이상 나선 구조와 비교한 것이다. Fig. 6은  $M_h$ 의 변화에 따른  $M_r$ 과  $E_R$ 의 관계를 나타낸 것이다. Fig. 7은 마이그레이션 변수가 일정할 때 Poisson 비의 변화에 따라 꼬임각이 초기 탄성계수에 미치는 영향을 고찰한 것이다.

### 4. 결 론

마이그레이션을 하는 섬유로 구성된 실의 역학적인 거동을 예측하기 위하여 배향 밀도 함수를 새로이 정의하였다. 정의된 배향 밀도 함수를 이용하여 이상 나선 구조를 갖는 경우에 적용해 본 결과 기존의 이론과 일치함을 확인하였다. 그리고 이 함수는 마이그레이션을 하는 실의 경우에도 적용할 수 있는 등 범용으로 사용할 수 있는 함수임을 알 수 있었다. 또한 실의 단면 방향과 길이 방향으로의 거동을 나타내는 두 개의 변수를 도입하여 섬유가 이상적인 마이그레이션 거동을 하는 형태를 수학적 식으로 모델화 하였다. 두 개의 변수를 배향 밀도 함수에 적용하여 relative 초기 탄성계수를 구한 결과, 길이 방향으로의 주기가 클수록 그리고 단면 방향의 주기가 작을수록 relative 초기 탄성계수는 감소한다는 것을 알 수 있었다. 그리고 감소량은 Poisson 비와 꼬임각의 크기에 따라 차이가 있었다.

### 참 고 문 헌

1. Hearle, J.W.S., Grosberg, P., and Backer S., "Structural Mechanics of Fibres, Yarns, and Fabrics", Vol. 1, Wiley Interscience, chap. 4, 1969
2. Treloar, L.R.G. and Riding, G., J. Text. Inst., 56, T 381 (1965)
3. B.S. Jeon and S.Y. Kim, J. Kor. Fib. Soc., 27, 289(1990)
4. B.S. Jeon, J. Kor. Fib. Soc., 28, 356(1991)
5. B.S. Jeon, J. Kor. Fib. Soc., 31, 904(1994)

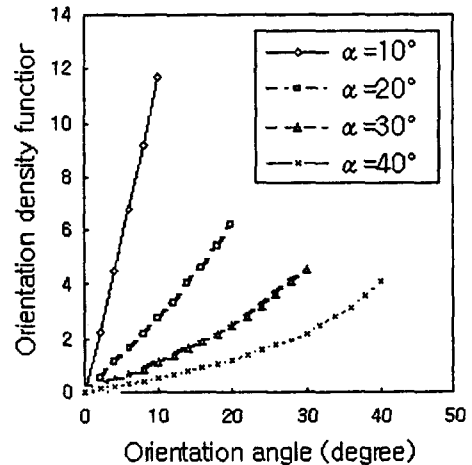


Figure 1.

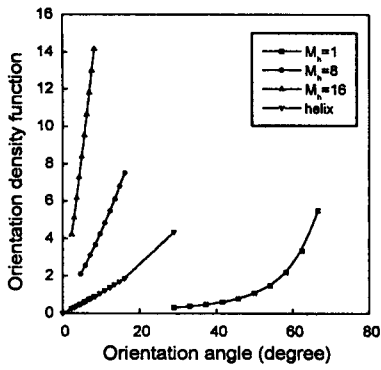


Figure 2.

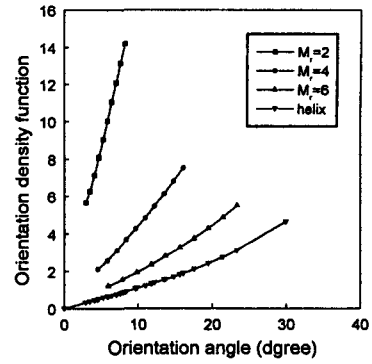


Figure 3.

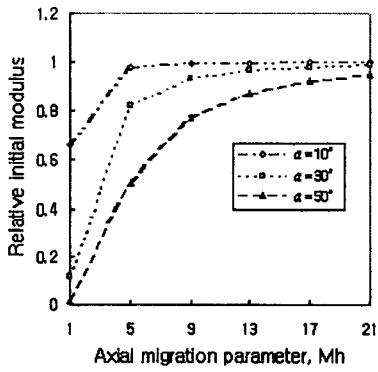


Figure 4.

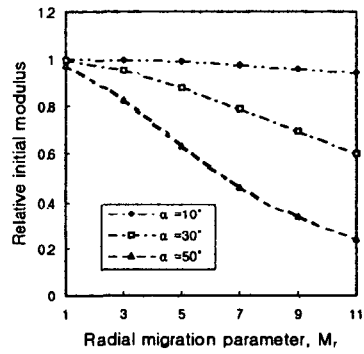


Figure 5.

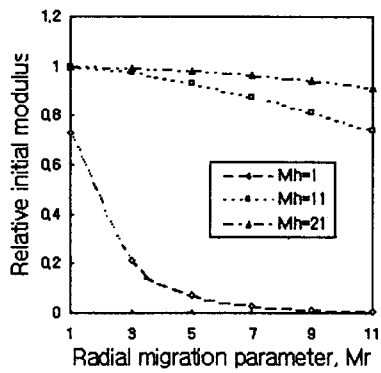


Figure 6.

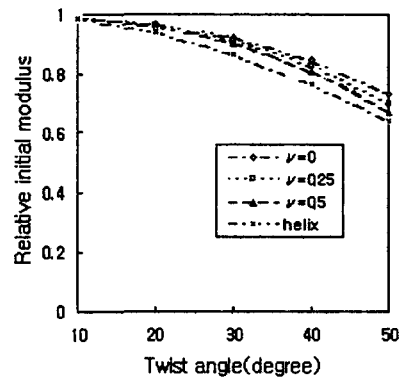


Figure 7.