1998년도 대한전기학회 정기총회 및 추계학술대회 논문집 1998. 11. 28

블럭펄스함수를 이용한 Singular 시스템 해석의 새로운 접근

안비오[§], 진준하[§], 김병기[§§]
§ 한국원자력연구소, §§ 성균관대학교

Analysis of singular systems via block pulse function : Some new results

P. Ahn[§], J. H. Jin[§], B. K. Kim[§§]
§ Korea Atomic Energy Research Institute, §§ Sungkyunkwan University

Abstract - Some resent papers deals with the solution of LTI singular systems described in state-space via orthogonal functions. There are some complexity to derive the solution because all the previous works[2]-[5] used orthogonal function's integral operation. Therefore, in this paper, some new results are introduced by using a differential operation of orthogonal function to solve the LTI singular systems.

1. 서 론

월쉬(Walsh)함수, 블럭펄스(Block-pulse)함수 등은 대표적인 직교함수로서 시스템의 해석(analysis), 최적화(optimization), 동정(identification)등의 분야에서 여러 가지 형태로 광범위한 적용이 이루어져 왔다. 여기서, 블럭펄스함수는 월쉬함수에 비해 정규직교(orthonormal)성을 필요로 하지 않기 때문에 전개 항수의 제한이나 time-scaling을 필요로 하지 않는 장점을 갖는다. 직교함수의 응용은 대부분이 1973년 M. S. Corrington(1973)[1]이 월쉬함수 적분 연산식을 제안하면서 가능해졌다.

최근들어 Campbell(1984)[2], Mayergotz(1987)[3], Palanisamy(1988)[4], Balachandran(1992)[5]등은 일반화된 상태 공간에서 모델링 된 Singular 시스템의 해석을 직교함수를 이용하여 할 수 있음을 보여왔다. 그러나 앞선 연구 결과는 직교함수의 적분 연산식을 이용한 접근 방법으로 반복적 연산 알고리즘을 유도하기에 까다롭다. 따라서, 본 연구에서는 블럭펄스함수 미분 연산식을 이용한 접근으로부터 반복적 연산 알고리즘을 보다 손쉽게 유도할 수 있음을 보이고자 한다. 여기서, 이용된 블럭펄스함수 미분 연산식은 단순한 변분법적 접근을 이용한 근사화[6],[7]가 아닌 블럭펄스함수의 직교성과 배타성을 이용하여 유도된 일반화된 형태이다. 또한 적용례에서 제안된 방법이 Singular 시스템 해석에 유효함을 보였다.

2. 블럭펄스함수를 이용한 Singular시스템 해석

2.1 블럭펄스함수[8]와 블럭펄스함수 미분연산식

블럭펄스함수 집합 $\Phi(t)$ 는 식(1)을 만족하는 구간 연속 함수의 집합이다.

$$\Phi(t)=[\phi_1(t)\ \phi_2(t)\ \cdots\ \phi_m(t)]^T$$

$$\phi_i(t)=\begin{cases}1\ , & (i-1)\frac{t_f}{m}\le t < i\frac{t_f}{m}\\ 0\ , & \text{그외구간}\end{cases}$$

$$\text{여기서, } i=1,2,\cdots,m \tag{1}$$

블럭펄스함수는 식(2)의 직교성(orthogonality)과 식(3)의 배타성(disjointness)를 갖는다.

$$\int_0^{t_f}\phi_i(t)\phi_j(t)dt = \begin{cases}\frac{t_f}{m}\ , & i=j\\ 0\ , & i\ne j\end{cases} \tag{2}$$

$$\phi_i(t)\phi_j(t) = \begin{cases}\phi_i(t)\ , & i=j\\ 0\ , & i\ne j\end{cases} \tag{3}$$

또한, 구간 $0\le t<t_f$ 에서 적분 가능한 임의의 실 유계 연속함수 $f(t)$는 m개의 블럭펄스함수로 다음과 같이 유한급수 전개된다. 여기서 F_i 는 블럭펄스함수 m항 전개시의 i 번째 계수벡터 값이다.

$$f(t)\cong\sum_{i=1}^{m}F_i\phi_i(t) \tag{4}$$

$$F_i=\frac{m}{t_f}\int_0^{t_f}f(t)\phi_i(t)dt=\frac{m}{t_f}\int_{(i-1)\frac{t_f}{m}}^{i\frac{t_f}{m}}f(t)dt$$

$$\cong\frac{1}{2}\left[f\left(i\frac{t_f}{m}\right)+f\left((i-1)\frac{t_f}{m}\right)\right]$$

$$\text{여기서, } i=1,2,\cdots,m \tag{5}$$

블럭펄스함수의 적분 역시 m개의 블럭펄스함수로 다음과 같이 표현된다.

$$\int_0^t\Phi(\tau)d\tau\cong P\Phi(t) \tag{6.a}$$

$$\int_0^t\phi_i(\tau)d\tau\cong\frac{t_f}{2m}\phi_i(t)+\frac{t_f}{m}\sum_{j=i+1}^{m}\phi_j(t) \tag{6.b}$$

또한, $f(t)$ 역시 실 유계 연속 함수라면 $f(t)$의 블럭펄스함수 근사식은 식(7)과 같이 표현 가능하고 블럭펄스함수 계수벡터는 식(8)로 유도할 수 있다.

식(8)의 유도는 <APPENDIX> 참조

$$\dot{f}(t) \simeq \sum_{i=1}^{m} \overline{F}_i \phi_i(t) = \overline{F}^T \Phi$$

여기서, $\overline{F}^T = [\ \overline{F}_1 \quad \overline{F}_2 \cdots \ \overline{F}_m]$ 이다. (7)

$$\overline{F}_1 = \frac{2m}{t_f}[\ \ F_1 - f(0)\ \ ] \tag{8.a}$$

$$\overline{F}_{i+1} = \frac{2m}{t_f}[\ \ F_{i+1} - F_i\ \ ] - \overline{F}_i \tag{8.b}$$

$i = 1, 2, \cdots, m-1$

2.2 Singular 시스템 해석을 위한 반복 연산 알고리즘의 유도

다음과 같은 상태공간에서 표현된 선형 시불변 Singular 시스템을 고려하자.

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{9}$$

$$x(0) = x_0$$

여기서, $E \in \Re^{n \times n}$, $x \in \Re^{n \times 1}$, $u \in \Re^{p \times 1}$ 이다.

식(9)에 포함된 $\dot{x}(t)$, $x(t)$, $u(t)$ 를 식(10)~(12)로 각각 블럭펄스함수 m 항 전개하여 다시 표현하면 식(13)과 같다.

$$\dot{x}(t) \simeq \sum_{i=1}^{m} \overline{X}_i \phi_i(t) = \overline{X}^T \Phi \tag{10}$$

$$x(t) \simeq \sum_{i=1}^{m} X_i \phi_i(t) = X^T \Phi \tag{11}$$

$$u(t) \simeq \sum_{i=1}^{m} U_i \phi_i(t) = U^T \Phi \tag{12}$$

$$E\sum_{i=1}^{m} \overline{X}_i \phi(t) = A\sum_{i=1}^{m} X_i \phi(t) + B\sum_{i=1}^{m} U_i \phi(t) \tag{13}$$

먼저, 첫 번째 블럭펄스 함수 계수벡터는 식(13)과 식(8.a)의 관계로부터 식(14), (15)를 통하여 식(16)으로 구할 수 있다.

$$E\ \overline{X}_1 \phi(t) = AX_1 \phi(t) + BU_1 \phi(t) \tag{14}$$

$$\overline{X}_1 = \frac{2m}{t_f}[\ \ X_1 - x(0)\ \ ] \tag{15}$$

$$X_1 = \left(E - \frac{t_f}{2m}A\right)^{-1} \cdot \left(E\ x(0) + \frac{t_f}{2m} B\ U_1\right) \tag{16}$$

마찬가지로 블럭펄스 함수의 $i+1$ 번째 계수벡터는 식(13)과 식(8.b)의 관계로부터 식(18), (19)를 통하여 식(2)과 같이 구할 수 있다.

$$E(\ \overline{X}_{i+1} + \overline{X}_i)\phi(t) = A(X_{i+1} + X_i)\phi(t) + B(U_{i+1} + U_i)\phi(t) \tag{18}$$

$$\overline{X}_{i+1} - \overline{X}_i = \frac{2m}{t_f}[\ \ X_{i+1} - X_i\ \ ] \tag{19}$$

$$X_{i+1} = \left(E - \frac{t_f}{2m}A\right)^{-1} \times \left[\left(E + \frac{t_f}{2m}A\right)X_i + \frac{t_f}{2m}B(U_{1+1} + U_i)\right] \tag{20}$$

여기서, $i = 1, 2, \cdots, m-1$

결국, 식(16), (20)과 식(5)의 관계로부터 샘플링 시간에서 근사적으로 구해진 식(9)의 해는 식(21)과 같다.

$$x\left(i \cdot \frac{t_f}{m}\right) = 2X_i - x\left((i-1) \cdot \frac{t_f}{m}\right) \tag{21}$$

여기서, $i = 1, 2, \cdots, m-1$

식(16), (20)에 포함된 $\left(E - \frac{t_f}{2m}A\right)^{-1}$ 의 존재성은 최종 시간 t_f 와 전개항수 m 의 적절한 선택으로 보장받을 수 있다.

3. 적용예제

다음과 같은 선형 시불변 Singular 시스템[3]을 대상으로 제안된 해석적 방법을 적용하여보자.

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$x(0) = x_0$$

여기서, $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 27 & 22 & 17 \\ -18 & -14 & -10 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x_0 = \begin{bmatrix} 0.4123 \\ 0.0769 \\ -1.2500 \end{bmatrix}$ 이다.

주어진 Singular 시스템의 exact 해는 다음과 같다.

$$x_1(t) = \frac{7}{52}\exp(2t/3) - t + \frac{5}{18}$$

$$x_2(t) = \frac{14}{13}\exp(2t/3) + 2t - 1$$

$$x_3(t) = -\frac{7}{4}\exp(2t/3) - t + 0.5$$

<표 1~3>은 각각 x_1, x_2, x_3 을 제안된 블럭펄스함수 전개식을 이용하여 전개항수 m 은 100으로 고정하고 최종 시간 t_f 를 1초~5초로 변화하여 구하였을 때 exact 해와의 오차를 각각 비교한 것이다. <표>에서 알 수 있는 것은 제안된 방법이 충분한 전개항수를 사용할 경우 Singular 시스템 해석에 유효하다는 것이다.

4. 결 론

본 논문에서는 블럭펄스함수 미분연산식을 이용한 Singular 시스템의 해석에 대하여 다루었다. 본 논문에서 유도된 식은 블럭펄스함수 적분연산식을 이용하여 반복 연산식을 유도한 경우[2] 보다 유도가 간명함을 알 수 있다. 제안된 연산 방법은 적용례에서 초기 값을 안다는 가정아래 적용하여 만족할 만한 결과를 얻을 수 있었다. 따라서, 본 연구 방법이 Singular 시스템 해석에 유효함을 알 수 있다.

<표 1> $x_1(t)$ 의 정확한 해와 BPF 근사 해의 비교

time (sec.)	x1(t) (exact solution)	x1(t) (via BPF: m=100)	error (exact-approx.)
1.0	-0.46002726	-0.46011856	-0.00009130
2.0	-1.21153616	-1.21161565	-0.00007949
3.0	-1.72754159	-1.72756025	-0.00001865
4.0	-1.78484890	-1.78461868	0.00023022
5.0	-0.94873426	-0.94762772	0.00110654

<표 2> $x_2(t)$ 의 정확한 해와 BPF 근사 해의 비교

time (sec.)	x2(t) (exact solution)	x2(t) (via BPF: m=100)	error (exact-approx.)
1.0	3.09755974	3.09755156	-0.00000818
2.0	7.08548850	7.08557478	0.00008628
3.0	12.95744503	12.95801803	0.00057300
4.0	22.49898656	22.50155054	0.00256398
5.0	39.18790373	39.19747824	0.00957451

<표 3> $x_3(t)$ 의 정확한 해와 BPF 근사 해의 비교

time (sec.)	x3(t) (exact solution)	x3(t) (via BPF: m=100)	error (exact-approx.)
1.0	-3.90853457	-3.90855878	-0.00002421
2.0	-8.13891882	-8.13909652	-0.00017771
3.0	-15.43084817	-15.43181680	-0.00096863
4.0	-28.68585317	-28.69005713	-0.00420396
5.0	-53.55534357	-53.57093964	-0.01559607

[참 고 문 헌]

[1] M. S. Corrington, "Solution of differential and integral equations with Walsh functions," IEEE Trans. Cir. Theory, Vol. 20, pp470-476, 1973

[2] S. L. Campbell, "On using orthogonal functions with singular systems," IEE Proc. vol. 131, Pt. D, no. 6, Nov. 1984

[3] I. D. Mayergoyz and F. P. Emad, "Computation of analytical expression for transfer functions," Int. J. of Cont. vol. 46, no. 6, pp 1935-1945, 1987

[4] K. R. Palanisamy and K. Balachandran, "Analysis of time-varying singular systems via single-term Walsh-series approach," IEE Proc. vol. 135, Pt. D, no.6, Nov. 1988

[5] K. Balachandran and K. Murugensan, "Note on single-term Walsh series method for singular systems," IEE Proc. vol. 139, no. 3, May. 1997

[6] F. Kraus and W. Schaufelberger, "Identification with block-pulse functions, modulation functions and differential operators," Int. J. Cont., vol. 51, pp 931-942, 1990.

[7] Pius Ahn, Min-Hyung Kim and Doo-Soo Ahn, "An Algebraic Method to Design of Unknown Input Observer," Fourth International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision, Singapore, Dec. 1996.

[8] Z. H. Jiang and W. Schaufelberger, "Block pulse functions and their applications in control systems," Springer-Verlag, 1992.

[9] P. Ahn, M. H. Kim and D. S. Ahn, "A novel approach to unknown input observer design via block pulse function's differential operation," 99' IFAC World Congress (in Beijing), to be appear.

<APPENDIX>

$$\int_0^t f(\tau)d\tau = f(t) - f(0) \tag{a.1}$$

양변을 블럭펄스함수 m 항 전개하고 식(6.b) 관계를 이용하면,

$$\sum_{i=1}^{m} \overline{F}_i \int_0^t \phi_i(\tau)d\tau = \sum_{i=1}^{m} F_i\phi_i(t) - \sum_{i=1}^{m} f(0)\phi_i(t) \tag{a.2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \overline{F}_i \left[\frac{t_f}{2m}\phi_i(t) + \frac{t_f}{m}\sum_{j=i+1}^{m}\phi_j(t)\right] = \sum_{i=1}^{m} F_i\phi_i(t) - \sum_{i=1}^{m} f(0)\phi_i(t) \tag{a.3}$$

식(a.3)의 양변을 전개하면,

$$\begin{aligned}
\frac{t_f}{m} \times \Big\{ & \overline{F}_1\left(\frac{1}{2}\phi_1(t) + \phi_2(t) + \phi_3(t) + \cdots + \phi_m(t)\right) \\
& + \overline{F}_2\left(\frac{1}{2}\phi_2(t) + \phi_3(t) + \phi_4(t) + \cdots + \phi_m(t)\right) \\
& \vdots \\
& + \overline{F}_i\left(\frac{1}{2}\phi_i(t) + \phi_{i+1}(t) + \phi_{i+2}(t) + \cdots + \phi_m(t)\right) \\
& + \overline{F}_{i+1}\left(\frac{1}{2}\phi_{i+1}(t) + \phi_{i+2}(t) + \phi_{i+3}(t) + \cdots + \phi_m(t)\right) \\
& \vdots \\
& + \overline{F}_m\left(\frac{1}{2}\phi_m(t)\right) \Big\} \\
= \{ & F_1\phi_1(t) + F_2\phi_2(t) + F_3\phi_3(t) + \cdots + F_m\phi_m(t) \} \\
& - f(0)\{ \phi_1(t) + \phi_2(t) + \phi_3(t) + \cdots + \phi_m(t) \}
\end{aligned} \tag{a.4}$$

식(a.4)의 양변에 $\phi_1(t), \phi_2(t), \cdots, \phi_m(t)$ 을 차례로 곱하고, 블럭펄스함수의 직교성을 이용하면 식(a.5)를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
& \frac{t_f}{2m}\overline{F}_1 = F_1 - f(0) \\
& \frac{t_f}{m}\left(\overline{F}_1 + \frac{1}{2}\overline{F}_2\right) = F_2 - f(0) \\
& \vdots \\
& \frac{t_f}{m}\left(\overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \cdots + \overline{F}_{i-1} + \frac{1}{2}\overline{F}_i\right) = F_i - f(0) \\
& \frac{t_f}{m}\left(\overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \cdots + \overline{F}_i + \frac{1}{2}\overline{F}_{i+1}\right) = F_{i+1} - f(0) \\
& \vdots \\
& \frac{t_f}{m}\left(\overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \cdots + \overline{F}_{m-1} + \frac{1}{2}\overline{F}_m\right) = F_m - f(0)
\end{aligned} \tag{a.5}$$

식(a.5)로부터 $\overline{F}_1$ 와 $\overline{F}_{i+1}$ 에 대하여 정리하면, 식(a.6)의 일반적 형태를 구할 수 있다.

$$\overline{F}_1 = \frac{2m}{t_f}[\ F_1 - f(0)\ ]$$

$$\overline{F}_{i+1} = \frac{2m}{t_f}[\ F_{i+1} - F_i\ ] - \overline{F}_i$$

여기서, $i = 1, 2, \cdots, m-1$ (a.6)