계수도를 이용한 특성다항식의 Hurwitz 안정조건에 관한 연구

강 환 일
명지대학교 전기정보제어공학부 Tel: 82-335-330-6476, Fax: 82-335-321-0271

STUDY ON HURWITZ STABILITY CONDITIONS OF THE CHARACTERISTIC POLYNOMIALS USING THE COEFFICIENT DIAGRAM

Kang, Hwan Il
Division of Electrical & Information Control Eng., Myongji Univ., hwan@wh.myongji.ac.l

Abstract -We investigate the Hurwitz stability condition using the coefficient diagram. The coefficient diagram consists of a plot of logarithmic values of the coefficients of the characteristic polynomial versus the degree of the coresponding coefficients. The logarithmic value of the coefficient of the characteristic polynomials are plotted in the descending order. Using the Bhattacharyya, Chapellat and Keel's algorithm, the sufficient and necessay condition for Hurwitz stability are reconstructed using the coefficient diagram. With the coefficient diagram we also present some necessary or sufficient conditions for Hurwitz stability of polynomials. In addition we obtain a lower bound for the Manabe parameter τ.

1. 서 론

최근 계수도(coefficient diagram)을 이용하여 제어기를 설계하려는 연구가 활발히 진행되고 있다.[1,5,8] 계수도란 계수의 로그(밑수가 10임)값을 y축에 표시하고 대응하는 차수를 x축에 표시하는 방식으로 내림차순으로 계수를 표시한다. 계수도를 이용하여 안정도를 구하는 방법은 5차까지 Manabe[1]에 의하여 알려졌으며 5차이상의 차수에서는 Lipatov 와 Sokolov[2]의 충분조건을 이용하여 다항식의 안정도를 구하였다. 이 논문에서는 우선 Bhattacharyya, Chapellat과 Keel[3]의 결과를 이용하여 계수도에서 다항식의 안정도를 판정하는 필요충분조건을 구한다. 따라서 우리들이 흔히보는 위로 볼록한 다항식만이 안정하다는 통념을 버릴 수 있으며 이 논문에서 Kempermann[4]에 의해 인접 계수의 크기의 변화와 안정한 다항식의 관계을 명백히 밝히고 있다. 계수도에서의 계수를 이용하여 안정한 다항식의 필요/충분조건을 기술한다. Hurwitz안정한 다항식을 안정한 다항식이라고 기술한다.

2.안정지수와 안정조건에 관한 예비결과

어떤 선형 시불변 시스템의 특성방정식 $\sum_{i=0}^{n} a_i s^i$ $(a_n>0)$이 주어질 때 안정지수 γ_i를 $\gamma_i=\frac{a_i^2}{a_{i-1}a_{i+1}}$ $(i=1,2,\cdots,n-1)$로 정의한다. 다음은 안정지수와 다항식의 안정도에 관한 사실을 기술한다. 사실1부터 정리11까지에 적용되는 다항식의 차수는 그렇지 않다고 하지 않으면 3차 이상으로 한다. 사실1, 사실3에서 사실6까지는 Lipatov와 Sokolov[2]에 의해 구해졌다.

사실 1: 특성 다항식이 좌반평면 안정할 충분조건은 모든 i에 대하여 부등식 $\gamma_i>1.4656$ $(i=1,2,\cdots,n-1)$성립하면 된다.

사실 2[4]: 특성 다항식이 좌반평면 안정할 필요조건은 모든 i에 대하여 부등식 $\gamma_i\gamma_{i+1}>1$ $(i=1,2,\cdots,n-2)$성립하면 된다.

사실 3; 특성 다항식에서 모든 근이 음의 실수이고 서로 다를 충분조건은 모든 i에 대하여 부등식 $\gamma_i\geq 4$ $(i=1,2,\cdots,n-1)$성립하면 된다.

사실 4: 특성 다항식이 좌반평면 안정할 충분조건은 모든 i에 대하여 부등식 $\gamma_i\gamma_{i+1}>(1.4656)^2$ $(i=1,2,\cdots,n-$ 이 성립하면 된다.

사실 5: 특성 다항식이 좌반평면 안정할 충분조건은 모든 i에 대하여 부등식 $\gamma_i>1.1237(1/\gamma_{i+1}+1/\gamma_{i-1})$ $(i=1,2,\cdots,n-2)$ $(\gamma_0=\gamma_n$ 이 성립하면 된다.

사실 6: 특성 다항식 $\sum_{i=0}^{n} a_{n-i}s^i$이 좌반평면 안정할 충분조건은 모든 부분 5차 다항식이 안정하고 양쪽끝 4차 다항식이 안정하면 된다. 부분 5차 다항식은 $\sum_{i=j}^{j+5} a_j s^{j-i}$ $(j=0,1,2,\cdots,n-5)$ 양쪽끝 4차다항식은 $\sum_{i=0}^{4} a_i s^{4-i}$, $\sum_{i=0}^{4} a_{n+i-4}s^i$이다.

사실 7[3]: 특성 다항식 $P(s)=\sum_{i=0}^{n} a_{n-i}s^i$에서 $\mu=\frac{a_0}{a_1}$이면 $Q(s)=a_1s^{n-1}+(a_2-\mu a_3)s^{n-2}+a_3s^{n-3}+(a_4-\mu a_5)s^{n-}$ 이다. 이 경우 $P(s)$가 안정할 필요충분조건은 $Q(s)$가 안정하면 된다.

사실 8[3]: 특성 다항식 $P(s)=\sum_{i=0}^{n} a_{n-i}s^i$이 안정할 필요충분조건은 다음 알고리즘으로 판정할 수 있다.

알고리즘: 순서1: 우선 $P^*(s)=P(s)$로 놓는다.

순서2: $P^*(s)$의 모든 계수가 양수인가 판정한다. 양수이면 순서3으로 가고 음수가 발견되면 $P(s)$가 불안정하다고 판정하고 끝난다.

순서3: 사실7에 따라 $P^*(s)$보다 한차수 작은 $Q(s)$를 작성하고 $P^*(s)=Q(s)$ 로 놓는다.

순서4: $P^*(s)$가 이차이고 $P^*(s)$의 계수가 양수이면 $P(s)$가 안정하다고 판정하고 끝나고 그렇지 않으면 순서2로 돌아 간다.

마지막으로 구간플랜트에 관한 예비결과를 나타낸다. 만약 P(s, q)가 독립적인 불확실성 구조를 갖는 다항식이라면 집합 **P**:={P(· , q) : q∈Q}를 구간 다항식 군(family)또는 구간다항식이라고 말한다. 구간 다항식은

$$P(s,q)=\sum_{i=0}^{n}[\ q_{n-i}^{-},\ q_{n-i}^{+}]s^i$$

표시하기로 한다. 구간다항식이 강인 안정하다는 것은 구간다항식에 속하는 모든 다항식이 안정하다는 것을 뜻한다.

사실9[6]: 위 구간다항식이 강인안정할 충분조건은

$$\gamma_i^*=\min[\frac{q_{i-1}^{-2}}{q_{i+1}^{+}q_{i-1}^{-}},\frac{q_{i-1}^{-2}}{q_{i+1}^{-}q_{i-1}^{+}}]>1.4656\quad(i=1,2,\cdots,n-1)$$

이 성립하면 된다.

3. 계수도와 안정조건

계수도는 특성방정식의 계수의 로그값을 y축에 표시하고 그와 대응되는 x축의 값은 계수의 차수로 표시한다. 이때 계수의 밑수(base)가 10인 로그값을 차수가 감소할수록 오른쪽에 표시하기로 한다. 이 계수도안에서 특성다항식의 충분조건과 필요조건을 표시하기로 한다. 만약 특성방정식이 $P(s)=\sum_{i=0}^{n}a_{n-i}s^i$이면 계수도에는 다음 집합 $\{(x,y)|(i,g_i),i=j,j+1,j+2,\cdots,j+n\}$의 두좌표 평면에 표시되는데 여기서 $g_i=\log_{10}(|a_i|)$이며 j는 임의의 음이 아닌 정수이다. a_i가 양수이면 o 으로 표시하고 음수이면 o 안에 *을 붙여 표시한다. 계수도에 표시된 계수가 안정하다는 것은 원래 다항식이 Hurwitz안정하다는 것을 뜻한다. 다음정리들은 계수도에서 성립된다.

정리1: 위 특성다항식이 안정할 충분조건은

$$g_{i-1}<2g_i-g_{i+1}-\log_{10}1.4656\ (i=1,\cdots,n-1)$$

이다. 그리고 모든 근이 음수이고 서로 다를 충분조건은

$$g_{i-1}<2g_i-g_{i+1}-\log_{10}4\ (i=1,\cdots,n-1)$$

이다.

증명:사실1과 사실3참조

작도법:두좌표 $(i,g_i),(i+1,g_{i+1})$을 연결하는 직선을 왼쪽으로 외삽(extrapolation)하여 x축의 값 $i-1$과 교차하는 점이 $A=(i-1,2g_i-g_{i+1})$이다. 따라서 이점 A에서 y축으로 $\log_{10}1.4656$만큼 작은 점보다 더 작은 점을 g_{i-1}로 취하면 위 부등식을 만족한다.

정리2: 위 특성다항식이 안정할 충분조건은

$$(g_{i+1}-g_i)>2\log_{10}(1.4656)+(g_{i+3}-g_{i+2})$$

이다.

증명:사실4참조

설명: 만약 g_{n-1},g_n이 주어지면 정리1또는 정리2를 이용하여 임의의 차수의 안정다항식을 구성할 수 있다.

정리3: 위 특성다항식이 안정할 필요조건은

$$g_{i+1}-g_i>g_{i+3}-g_{i+2}\ (i=0,1,\cdots,n-3)$$

이다.

증명: 사실2를참조

설명:정리2를 이용하면 $g_{n-2}-g_{n-3}>g_n-g_{n-1}$이 성립되며 Manabe 매개변수 τ를 이용하면 $\tau=10^{g_{n-1}-g_n}>10^{g_{n-2}-g_{n-3}}$로 표현되며 τ의 최저한계를 구할 수 있다.

설명:만약 $g_{i+1}-g_i$이 양수이면 u_i로 표시하고 $g_{i+1}-g_i$이 음수이면 d_i로 표시하면 안정다항식은 한 예로 $u_0d_1u_2d_3u_4d_5d_6d_7d_8$로 표시될 수 있다. 그러나 만약 $u_0d_1u_1d_2u_2d_3u_4u_5$에 대응하는 다항식은 안정하지 않다.

정리4: 만약 위의 u_i,d_i를 이용하여 특성다항식을 표시하면 왼쪽부터 조사하여 우선홀수번째 문자열에 주목하여 첫째번에 나오는 d_k를 구하면 $k+2$에서 끝까지 나오는 것은 반드시 $d_i(i=k+2,k+4,\text{가})$되어야 하고 다음 짝수번째 문자열에 주목하여 첫째번에 나오는 d_k를 구하면 $k+2$에서 끝까지 나오는 것은 반드시 $d_i(i=k+2,k+4,\text{가})$되어야 한다. 이것이 주어진 다항식이 안정할 필요조건이다.

증명:정리3참조

정리5: 특성 다항식 $R_1=\{(x,y)|(i,g_i)\}\ (i=0,1,\cdots,n)$에서 $\mu=g_0-g_1$이고 한 차수 낮은 다른 특성 다항식 $R_2=\{(x,y)|(i,\widehat{g_i})\}\ (i=1,\cdots,n)$, $\widehat{g_i}=g_i\ (i=1,3,5,\cdots,n-1)$, $\widehat{g_i}=\log_{10}(10^{g_i}-10^{g_{i+1}+\mu})\ (i=2,4,\cdots,n-1)$이때 R_1이 안정할 필요충분조건은 R_2가 안정하면 된다.

증명:사실7을 참조하면 $\log_{10}(a_i-\frac{a_0}{a_1}a_{i+1})=\widehat{g_i}$ 성립되는가를 보이면 된다. $a_i=10^{g_i}$, $\frac{a_0}{a_1}=10^{\mu}$ 이용하면 등식이 성립됨을 보일 수 있다. ■

작도법: $\widehat{g_i}=\log_{10}(10^{g_i}-10^{g_{i+1}+\mu})$에서 점C $(i,g_{i+1}+\mu)$의 작도법은 세점 $(0,g_0),(1,g_1),(i+1,g_{i+1})$평행사변형을 이루도록 작도하면 점C를 얻는다. 여기서 점C와 점 (i,g_i)를 이용하여 $\widehat{g_i}$를 얻는다.

정리6: 정리5의 R_1에서 R_2를 구하여 그 계수가 계수도에 표현되면 R_2을 다시 새로운 R_1으로 하여 또 다른 R_2즉 $\widehat{R_2}$를 구하여 계수도에 표시될 수 있는가를 판정한다. 이 판정을 계속하여 2차까지 축소한 다항식을 계수도에 표시되면 원래 다항식은 안정하다.

증명: 사실8참조

정리7: 특성 다항식 $R_1=\{(x,y)|(i,g_i)\}\ (i=0,1,\cdots,n)$에서 $\widehat{R_i}=\{(x,y)|(i,g_i)\}\ (i=j,j+1,\cdots,j+5)\ (i=0,1,2,\cdots$가 안정하고

$\widehat{R}_i = \{(x,y) | (i, g_i)\}$ $(i=0,1,\cdots,4)$ $(i=n-4, n-3, \cdots, n)$ 정하다고 하자 이조건하에서 R_1은 안정하다.

증명: 사실6참조

설명: 사실5와 관련한 계수도에서의 다항식 안정도 판별법은 [8]을 참조하기 바람.

4. 계수도와 구간플랜트

구간 다항식

$$P(s,q) = \sum_{i=0}^{n} [\ q_{n-i}^{-},\ q_{n-i}^{+}]s^i$$

을 계수도에 표현하면 x축에 대응하는 집합은 $\{(x,y) | (i, g_i^-)(i, g_i^+), i=0,1,2,\cdots\}$로 표시되고 여기서 $\log_{10}(q_{n-i}^+) = g_{n-i}^+$, $\log_{10}(q_{n-i}^-) = g_{n-i}^-$이다.

정리8: 위 구간다항식이 강인안정할 충분조건은

$$g_{i-1}^- < 2g_i^- - g_{i+1}^+ - \log_{10} 1.4656$$

$$g_{i-1}^+ < 2g_i^- - g_{i+1}^- - \log_{10} 1.4656 \ (i=1,\cdots,n-1)$$

이 동시에 성립하는 것이다.

증명:사실9참조

정리9: 위 구간다항식이 강인안정할 충분조건은

$$(g_{i+1}^- - g_i^+) > 2\log_{10}(1.4656) + (g_{i+3}^+ - g_{i+2}^-)(i=0,\cdots,n-3)$$

이다.

증명:정리2참조

설명: 만약 g_{n-1}^-, g_n^+이 주어지면 정리9을 이용하여 임의의 차수의 안정한 구간 다항식을 구성할 수 있다.

정리10: 위 구간다항식이 강인안정할 필요조건은

$$g_{i+1}^- - g_i^+ > g_{i+3}^+ - g_{i+2}^- \ (i=0,1,\cdots,n-3)$$

이다.

증명:정리3참조

정리11: 위 구간다항식이 강인안정할 필요충분조건은 다음 4개의 집합이 안정하면 된다. 4개의 다항식과 관련된 집합은

$\{(n, g_n^+), (n-1, g_{n-1}^+), (n-2, g_{n-2}^-), (n-3, g_{n-3}^-), (n-4, g_{n-4}^+), \cdots\}$

$\{(n, g_n^-), (n-1, g_{n-1}^-), (n-2, g_{n-2}^+), (n-3, g_{n-3}^+), (n-4, g_{n-4}^-), \cdots\}$

$\{(n, g_n^+), (n-1, g_{n-1}^-), (n-2, g_{n-2}^-), (n-3, g_{n-3}^+), (n-4, g_{n-4}^+), \cdots\}$

$\{(n, g_n^-), (n-1, g_{n-1}^+), (n-2, g_{n-2}^+), (n-3, g_{n-3}^-), (n-4, g_{n-4}^-), \cdots\}$

이 안정하면 된다.

증명:참고문헌[7]참조

5. 계수도를 이용한 다항식의 안정도판별방법

보기1: 안정한 4차다항식의 계수도를 이용하여 그 형태에 따라 구분하면 Λ, Γ, ㄱ, W와 M형등이 존재할 수 있다. 예를들면 Λ 형은 $s^4+4s^3+6s^2+4s+1$, Γ형은 $s^4+4s^3+14s^2+20s+25$, ㄱ형은 $s^4+2s^3+2s^2+s+0.25$, W형은 $9s^4+6s^3+19s^2+6s+9$, M형은 $2s^4+5s^3+2s^2+4s+0.1$이다.

보기2: 다항식 $c(s) = s^4+2s^3+11s^2+18s+18$ 안정도를 정리 6를 이용하여 판별하고자 한다. 우선 $c(s)$를 계수도에 그리면 $(0,0)$,$(1, \log_{10}2)$,$(2, \log_{10}11)$ $(3, \log_{10}18)$ $(4, \log_{10}18)$에 작은 원을 그리고 실선으로 연결한다. 여기서 점D$(2, \log_{10}18+0-\log_{10}2)$를 $(0,0)$,$(1, \log_{10}2)$, $(3, \log_{10}18)$과 평행사변형을 이루도록 그린다. 그리고 $(2, \log_{10}(11-10^{(D의\ y좌표)}))$을 형성하여 3차다항식 $(1, \log_{10}2)$,$(2, \log_{10}(11-\frac{1}{2}18)$ $(3, \log_{10}18)$ $(4, \log_{10}18)$를 얻는다. 다음으로 $(1, \log_{10}2)$,$(2, \log_{10}(11-\frac{1}{2}18)$ $(4, \log_{10}18)$과 평행사변형을 이루도록 점을 정하면 $(3, \log_{10}18)$이 되며 이를 원래점 $(3, \log_{10}18)$과 비교하면 차이가 없으므로 2차다항식을 얻을 수 없다. 따라서 정리5에 의해 안정하지 않다고 결론을 내릴 수 있다. 실제로 허수축에 근이 있으며 $\pm 3j$를 근으로 갖는다.

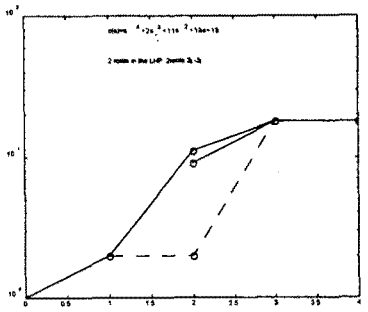

그림1: 4차다항식의 계수도와 안정도판정법

보기3:다항식 $c(s) = (3s^2+s+3)^2$ 안정도를 정리 6를 이용하여 판별하고자 한다. 다항식의 안정도를 조사하면 우선 4차에서 3차다항식을 얻는다. 그림2에 점선으로 표현되었다. 다시 등가 2차 다항식을 구하기 위해 x축값 3에있는 두점의 차이를 보면 등가 2차 다항식을 그릴 수 있으므로 원래 다항식은 안정하다고 할 수 있다. (그림2 참조)

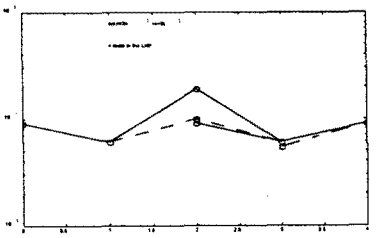

그림2: 4차다항식의 계수도와 안정도판정법

보기4:구간다항식

$$c(s) = s^4 + [4.9475, 5.0375]s^3 + [4.8125, 7.1875]s^2 + [2.$$

$$+ [0.3125, 0.6875]$$

의 강인안정도는 정리 11으로 판정할 수 있다. 4개의 고정다항식의 안정도판정이 필요하다. 각 고정다항식을 등가 이차다항식을 만들기 위해 x축값 3에있는 두점의 차이를 보면 등가 2차 다항식을 그릴 수 있으므로 고정4개

의 다항식은 각각 안정하다고 할 수 있다. (그림3 a,b,c,d 참조) 따라서 구간다항식은 강인안정하다고 판정한다.

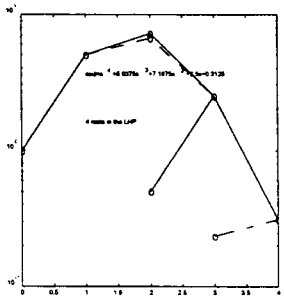

그림3a: 구간다항식의 강인안정판별

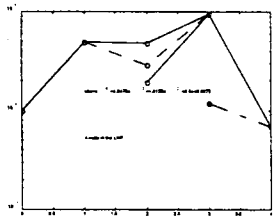

그림3b: 구간다항식의 강인안정판별

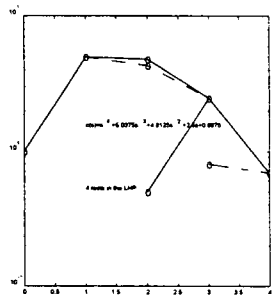

그림3c: 구간다항식의 강인안정판별

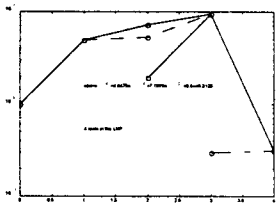

그림3d: 구간다항식의 강인안정판별

보기5:다항식

$c(s)=s^7+5.6s^6+12.09s^5+44.65s^4+42.65s^3+107.8s^2+44s+80$

의 안정도를 정리6로 조사하면 우선 7차에서 점차 차수를 줄여 제일밑의 실선으로 3차다항식을 얻는다. 등가 2차다항식은 $x=3$와 y축의 가장 밑에 있는점, $x=6$과 제일밑에 있는 점, $x=7$과 제일 밑에 있는 점으로 구성된다. 따라서 원래 다항식은 안정하다고 할 수 있다. (그림4참조)

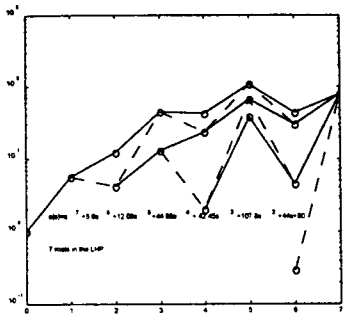

그림4: 7차다항식의 안정판별방법

6. 결 론

최근 계수도(coefficient diagram)을 이용하여 제어기를 설계하려는 연구가 활발히 진행되고 있으며 이 논문에서는 우선 계수도와 Bhattacharyya, Chapellat과 Keel[4]의 결과를 이용하여 다항식의 안정도를 구하는 필요충분조건을 구하였다. 따라서 우리들이 흔히보는 위로 볼록한 다항식만이 안정하다는 통념을 버릴 수 있었으며 이 논문에서 Kempermann[3]에 의해 인접 계수의 크기의 변화와 안정한 다항식의 관계을 명백히 밝혔다. 계수도에서의 계수를 이용하여 안정한 다항식의 필요/충분조건을 기술하였다. 또한 Manabe 매개변수 τ의 하한 한계를 정리3을 이용해 구했다. 앞으로 계수도를 이용하여 이산시간특성방정식의 Schur 안정도판별할 수 있는 방법에 대한 연구를 수행할 것이다.

본 연구는 과학기술부 특정연구개발사업과제 연구비에 의해 연구되었습니다. (과제제목: 고정밀 산업용 강인제어 설계 기술 개발, 연구기간: 97년9월-2000년8월, 과제번호: 97-I-01-03-A-101)

[참 고 문 헌]

[1] S. Manabe, "Coefficient Diagram Methods," 14th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace, pp. 199-210, Aug., 1998.

[2] A. V. Lipatov & N. I. Sokolov, "Some sufficient conditions for stability and instability of continuous linear stationary systems", *Avtomatika I Telemekhanika*, no. 9, pp. 30--37, 1978; in *Automat. Remote Control*, 39, pp.1285--1291, 1979.

[3] S. P. Bhattacharyya, H. Chapellat & L. H. Keel, Robust control: The parametric approach, pp.58--60, Prentice Hall, 1995.

[4] J. H. B. Kemperman. "A Hurwitz matrix is totally positive," *Siam J. Math. Anal.* , Vol. 13, no. 2, pp. 331--341, 1982.

[5]김영철,강환일,허명준,김한실,주성준, "계수도법: 개설," Proceedings of the KACC, 1998, pp.772--775.

[6] 주성준,박영배,"라파토프 정리를 이용한 강인한 제어기설계," Proceedings of the KACC, 1998, pp.784--787.

[7] R. C. Dorf & R. H. Bishop, *Modern Control Systems*, 7th ed., p. 655, Addison Wesley, MA, 1995.

[8] S. Manabe, "Lecture Notes on an Algebraic Approach to Control System Design: Coefficient Diagram Methods," 충북대학교, Workshop on Control Theory, Dec., 1997.