

CDM을 이용한 다변수 시스템의 제어기 설계

• 정동근, 송정화, 김영철
충북대 전자공학과

A Multivariable control design using CDM

Dong-Keun Jung, Jeong-Hwa Song, Young-Chol Kim
Department of Electronic Engineering, Chungbuk National University

Abstract: The ICD(Individual-Channel-Design) is a multivariable control design method based on the classical frequency response, in which the channel decomposition and the loop shaping on frequency domain are introduced. However, in this manner, it is difficult to satisfy time domain specifications such as overshoot, rise time, settling time. To solve the problem, we propose a new design method using CDM(Coefficient Diagram Method). And a new feedforward compensator is introduced for reducing interconnections.

1. 서 론

고전적 주파수응답을 이용한 다변수 제어시스템에 대한 제어기 설계법 중 하나인 ICD[2],[3],[4],[5]는 다변수 시스템을 같은 수의 단일 입, 출력문제로 분리시키고 주파수 영역 상에서 loop shaping에 근거하여 플랜트의 안정도와 상호간섭문제를 고려하는 설계법들이다. 그런데 고전적 주파수 응답의 설계기법이 갖는 구조적 한계로서, 이 방식들은 이득/위상여유, 대역폭등 주파수 영역 설계사양을 만족하도록 제어기를 구성하는 문제에는 가능한 해를 제시해 줄 수 있으나, 시간영역에서 주어지는 설계사양 즉, 오버슈트, 상승시간, 정정시간 등을 만족시키는데는 적절하지 않다. 본 논문에서는 시간영역특성에 대해 시스템의 계수 관계를 이용한 설계법인 계수도법(Coefficient Diagram Method)을 이용하여 (2×2) 다변수시스템에 대한 피드백 제어기를 설계하고 상호간섭을 제거하기 위한 전향보상기의 설계방법을 제시한다. 논문의 구성은 2절에서는 채널분할법과 CDM을 이용한 제어기 설계법, 전향보상기를 기술하고 3절에서는 시뮬레이션을 통해 제안된 설계방식에 대해 검증한다.

2. 채널분해법 및 제어기 설계

본 논문에서는 가장 흔히 나타나는 2×2 다변수계를 고려하기로 한다. 다변수 시스템에 대해 단일 입, 출력 시스템에 대한 제어기 설계법인 CDM을 적용하기 위해서는 시스템을 상호간섭부분을 포함하는 각 채널로 분리를 해야 한다. 분리된 채널에 대해 CDM을 적용하여 설계사양을 만족하는 제어기를 설계하며, 마지막으로 설계된 전체 시스템에 대해 상호간섭부분을 제거하기 위한 전향보상기를 설계한다.

2.1 채널분해법

그림 1과 같이 CDM구조의 분산 제어기를 갖는 2×2 시스템을 고려하기로 한다. 입력과 출력의 관계에 따라 채널을 그림 2와 같이 분리할 수 있으며 각 채널의 전달함수식은 식(1)과 (2)로 나타내어진다.

$$C_1(s) = k_1 g_{11} (1 - \gamma h_1) \quad (1)$$

$$C_2(s) = k_2 g_{22} (1 - \gamma h_2) \quad (2)$$

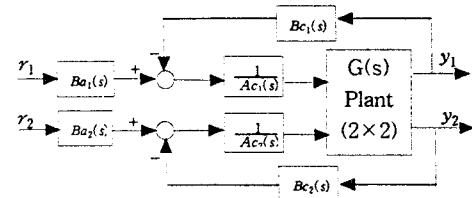


그림 1. 2×2 분산 제어시스템

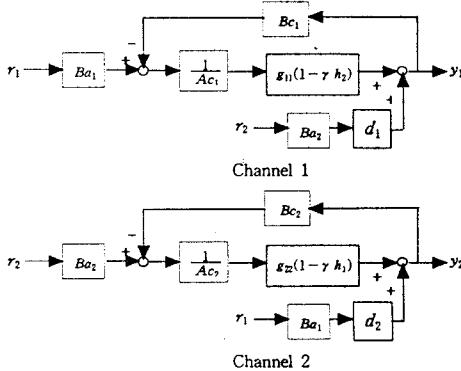


그림 2. 분해된 각 채널

여기서 $\gamma(s)$ 는 입력-출력간의 상호결합정도를 나타내주는 전달함수이며 채널 이득교차주파수(gain crossover freq) 이하나 근처에서 1보다 매우 작으면 input-output pairing은 적절하여 각 채널의 제어기를 바로 설계할 수 있다. 또한 $\gamma(s)$ 가 채널 이득교차주파수 이하나 근처에서 1보다 매우 큰 경우 각 채널의 제어기는 입력 쌍을 바꾸어주기(swapping)를 함으로써 설계될 수 있다. $\gamma(s)$ 가 채널 이득교차주파수 이하나 근처에서 1에 근접할 경우 시스템의 구조는 설계하기가 어려우며, 제어기 설계에 앞서 시스템의 구조를 변형시킬 필요가 있으며 일반적으로 전향보상기를 사용하여 시스템의 비결합정도나 강인성을 개선할 수 있다. $h_i(s)$ 는 서브시스템의 전달함수이다.

$$\gamma(s) = \frac{g_{12}g_{21}}{g_{11}g_{22}}, \quad k_i = \frac{Bc_i}{Ac_i} \quad (3)$$

$$h_1(s) = \frac{k_1 g_{11}}{1 + k_1 g_{11}}, \quad h_2(s) = \frac{k_2 g_{22}}{1 + k_2 g_{22}} \quad (4)$$

$$d_1(s) = \frac{1}{Bc_2} \frac{g_{12}}{g_{22}} h_2 r_2(s) \quad (5)$$

$$d_2(s) = \frac{1}{Bc_1} \frac{g_{21}}{g_{11}} h_1 r_1(s) \quad (6)$$

각 채널의 상호간섭부분인 $(1 - \gamma h_i)$ 를 살펴보면 채널1의 $h_2(s)$ 에는 채널2의 제어기 $k_2(s)$ 가 포함되고, 마찬가지로

채널2의 $h_1(s)$ 에는 채널1의 제어기 $k_1(s)$ 가 포함되어 각 채널의 제어기는 독립적으로 설계될 수가 없다. 즉, 한 채널에 대해 제어기를 설계하고자 할 때 그 채널에는 설계되어지지 않은 미지의 제어기를 포함하고 있다. 따라서 이를 해결하기 위한 한 방법은 설계대상 채널의 서브시스템을 1로 근사화 하는 것이다.

$$|h_i| = \left| \frac{k_i g_{ii}}{1 + k_i g_{ii}} \right| \approx 1, \quad i=1,2 \quad (7)$$

채널2가 설계대상 채널로 결정되었다면 채널2의 서브시스템 $h_1(s) \approx 1$ 으로 $k_1 g_{11}$ 의 대역폭이 $k_2 g_{22}(1-\gamma)$ 의 대역폭에 상응하는 크기이거나 그보다 클 경우 식(7)을 만족한다. 이 조건이 만족되면 각 채널의 대역폭이 각각 크기에 있어서 차이를 보이게 되는데 이를 대역폭분리라 하며 이는 각 채널의 응답속도와 관계가 깊다. 따라서 상대적으로 느린 채널에 대해 먼저 제어기를 설계하는 것이 설계사양을 만족시키기 쉽다. 한 채널에 대한 제어기가 설계되면 다른 쪽 채널의 서브시스템이 결정이 되므로 자연스럽게 제어기를 설계할 수 있으며 이때 식(7)의 조건을 만족하게끔 제어기를 설계한다.

2.2 CDM을 이용한 제어기 설계법

위절에서는 분리된 채널과 특징에 대해 설명을 하였다. 분리된 채널은 단일 입출력 시스템과 같기 때문에 CDM을 적용하여 제어기를 설계할 수 있다. 우선 CDM의 기본 설계를 위한 피드백 형태의 표준형은 그림 3과 같다.

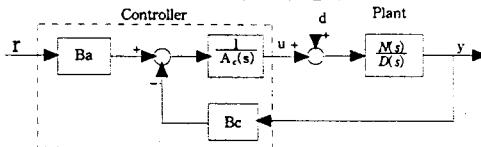


그림 3. Standard block diagram for CDM

페루프 시스템은

$$\Delta(s)y = Ba(s)N(s)r \quad (8)$$

$$u = \frac{Ba(s)}{Ac(s)}r - \frac{Bc(s)}{A(s)}y \quad (9)$$

여기서,

$$\Delta(s) = Ac(s)D(s) + Bc(s)N(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 \quad (10)$$

특성다항식의 각 계수에는 시스템의 응답속도, 과도응답 특성, 특성근의 위치에 대한 정보가 있는데 CDM은 이 관계를 특정한 계수비로 정의하고 이를 계수에 근거하여 제어기를 대수적 관계나 계수도를 통해 제어기를 설계하는 방식이다. 특성다항식(10)으로부터 다음을 정의한다.

$$\text{안정도 지수 } \gamma_i := \frac{a_i^2}{(a_{i-1}a_{i+1})}, \quad i=1, \dots, (n-1) \quad (11)$$

$$\text{동가시정수 } \tau := \frac{a_1}{a_0} \quad (12)$$

$$\text{안정도 한계지수 } \gamma_i^* := \frac{1}{\gamma_{i+1}} + \frac{1}{\gamma_{i-1}}, \quad \gamma_n = \gamma_0 = \infty \quad (13)$$

이 정의를 a_i 에 대해 다시 쓰면

$$a_i = \frac{a_0 \tau^i}{(\gamma_{i-1} \gamma_{i-2}^2 \dots \gamma_2^i \gamma_1^{-1})} \quad (14)$$

CDM은 근본적으로 시간영역의 설계 명세인 오버슈트와 정착시간(settling time) t_s 를 고려하기 위한 방식이다.

CDM 설계에 적용되는 설계 명세는 다음과 같다.

(i) 동가시정수 τ ($t_s = (2.5 \sim 3)\tau$)

(ii) 안정도 지수 γ ,

위의 정의된 관계를 이용하여 제어기 $Ac(s)$ 와 $Bc(s)$ 를 설계하게 되는데 시스템이 갖는 고유의 특성으로 인해 설계조건을 만족하는 제어기의 계수를 찾는 것이 불가능한

경우 B_a 를 사용하여 설계조건을 충족시키게 된다. (i)과 (ii)는 식(16)에 의해 원하는 특성방정식 계수를 규정하게 되며, (ii)의 γ , 값은 CDM 표준형 또는 Manabe 표준형이라 하는 식(15)에 의해 개선된 제어성능을 결정해주나, Manabe 표준형이 절대적인 것은 아니다.

$$\gamma_i = [\gamma_1 \ \gamma_2 \ \gamma_3 \ \dots \ \gamma_n] = [2.5 \ 2 \ 2 \ \dots \ 2] \quad (15)$$

2.3 전향보상기 설계

분리된 채널에 대해 설계된 피드백 제어기는 상호 강결 합된 시스템의 경우에는 취약한 성능을 나타내게 된다. 본 절에서는 이를 피하기 위한 전향보상기의 설계방법을 제시한다. 그림 4에서처럼 다른 입력으로 부터의 외란형태의 상호간섭부분을 보상하기 위해 전향보상기를 고려하면 다음과 같이 유도된다.

$$\text{채널1: } r_2 B_{a2} P_{21} C_1 + r_2 B_{a2} d_1 = 0 \quad (16)$$

$$\text{채널2: } r_1 B_{a1} P_{12} C_2 + r_1 B_{a1} d_2 = 0 \quad (17)$$

따라서 C_1 과 C_2 가 안정이면 전향보상기는 식(18)로 구해진다. 전향보상기의 전달함수가 정확히 도출되므로 전달함수의 저차화가 이루어진다면 크게 설계에 어려움은 없게된다.

$$P_{21} = -\frac{d_1}{C_1}, \quad P_{12} = -\frac{d_2}{C_2} \quad (18)$$

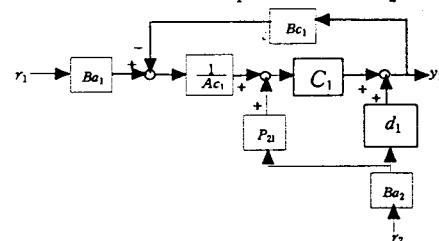


그림 4. 분리된 채널에 전향보상기를 적용한 예

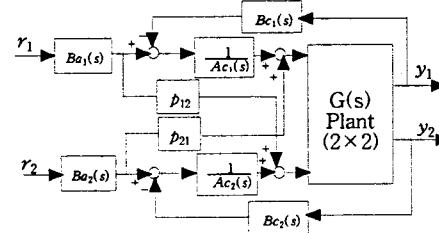


그림 5. 전향보상기를 적용한 예

설계절차를 요약하면, 다음과 같다.

- (i) 채널을 분리한다.
- (ii) 분리된 채널에 대해 CDM을 이용하여 제어기를 설계한다.
- (iii) 전향보상기를 적용하여 외란형태의 상호간섭부분을 보상해준다.

3. 적용예

제안된 설계방법에 대한 적용 예로서 Automotive gas turbine에 적용하여 보았다. 플랜트의 전달함수식은 식(19)이다.

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{(1.3 \times 10^6 s + 3.36 \times 10^5)}{(s^2 + 392s + 13900)} & \frac{-(5.6s^2 + 246s + 744)}{(s^2 + 28.9s + 24.6)} \\ \frac{(9.04 \times 10^6 s + 2.84 \times 10^5)}{(s^2 + 233s^2 + 8610s + 11900)} & \frac{(83.4s + 6300)}{(s^2 + 115s + 195)} \end{bmatrix} \quad (19)$$

설계요구조건은 다음과 같다.

- r_1 이 단위스텝입력일 때 출력 y_1 의 응답속도는 0.01초보다 작아야 한다($r_1 = 1, r_2 = 0$).
- r_2 가 단위스텝입력일 때 출력 y_2 의 응답속도는 0.02초보다 작아야 한다($r_1 = 0, r_2 = 1$).

• r_1, r_2 가 단위스텝입력일 때 출력 y_1 과 y_2 의 응답속도는 모두 0.03초보다 작아야하며 정상상태 오차는 6%이내이다.

우선 채널을 분리하여 다음과 같이 채널2부터 제어기를 설계한다. 식(23)과 같이 h_1 을 1로 가정하고 구해진 채널에 대해 제어기를 설계한다. Ba_2 를 이용하여 시스템이 갖는 고유 특성보다 빠른 응답특성의 설계조건을 만족시킨다. 설계된 제어기 $Ac_2(s)$ 와 $Bc_2(s)$ 로 인해 h_2 를 포함하는 채널1이 식(24)로 나타내어지고 채널2의 제어기를 설계한다. 마찬가지로 설계요구조건을 Ba_1 을 이용하여 만족시킨다. 그림 6은 설계된 결과에 대한 계단응답이다.

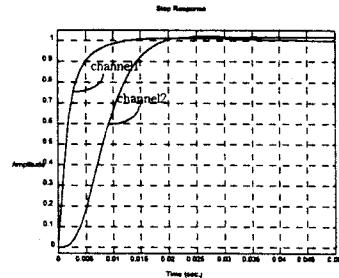


그림 6. CDM을 이용한 제어기 설계결과

$$C_2(s) = g_{22}(1 - \gamma * h_1) \mid_{h_1 \approx 1} = g_{22}(1 - \gamma) = \frac{p_{n2}(s)}{p_{d2}(s)} \quad (20)$$

$$C_1 = g_{11}(1 - \gamma h_2) = \frac{p_{n1}(s)}{p_{d1}(s)} \quad (21)$$

다음 식(22)~(29)는 각 제어기의 설계결과이다.

$$Bc_1 = 4.3000e-005 s + 1.7000e-003 \quad (22)$$

$$Ac_1 = 2.0000e-005 s^2 + 1.0000e-001 s \quad (23)$$

$$Bc_2 = 1.6086e-004 s + 4.8257e-001 \quad (24)$$

$$Ac_2 = 1.0000e-005 s^2 + 1.0000e-002 s \quad (25)$$

$$\begin{aligned} & 5.75e-9 s^5 + 3.255e-7 s^4 + 2.711e-5 s^3 \\ & + 0.0009167 s^2 + 0.002397 s + 0.0017 \end{aligned}$$

$$Ba_1 = \frac{1.551e-8 s^5 + 1.296e-4 s^4 + 2.877e-3 s^3}{6.064e-31 s^{15} + 6.947e-27 s^{14} + 2.7e-23 s^{13} + 4.335e-20 s^{12} + 3.379e-17 s^{11} + 1.467e-14 s^{10} + 3.833e-12 s^9 + 6.299e-10 s^8 + 6.669e-8 s^7 + 4.596e-6 s^6 + 2.047e-4 s^5 + 5.71e-3 s^4 + 0.09242 s^3 + 0.7248 s^2 + 1.538 s + 1} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} & 1.125e-19 s^{12} + 8.848e-17 s^{11} + 2.716e-14 s^{10} + 4.601e-12 s^9 + 5.033e-10 s^8 + 3.896e-8 s^7 + 2.222e-6 s^6 + 9.164e-5 s^5 + 0.002547 s^4 + 0.04245 s^3 + 0.3437 s^2 + 0.7377 s + 0.4826 \end{aligned}$$

$$Ba_2 = \frac{5.42e9 s^8 + 3.289e12 s^7 + 6.131e14 s^6 + 5.043e16 s^5 + 2.089e18 s^4 + 4.374e19 s^3 + 4.003e20 s^2 + 8.305e20 s + 4.49e20}{s^{11} + 5769 s^{10} + 8.155e6 s^9 + 3.828e9 s^8 + 8.065e11 s^7 + 8.879e13 s^6 + 5.502e15 s^5 + 1.949e17 s^4 + 3.76e18 s^3 + 3.335e19 s^2 + 7.296e19 s + 4.806e19} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} & 5.42e9 s^8 + 3.289e12 s^7 + 6.131e14 s^6 + 5.043e16 s^5 + 2.089e18 s^4 + 4.374e19 s^3 + 4.003e20 s^2 + 8.305e20 s + 4.49e20 \end{aligned}$$

$$P_{12} = \frac{-0.4308 s^9 - 337.7 s^8 - 9.415e4 s^7 - 1.211e7 s^6 - 7.774e8 s^5 - 2.511e10 s^4 - 3.688e11 s^3 - 1.734e12 s^2 - 3.087e12 s - 1.846e12}{s^{10} + 1635 s^9 + 7.804e5 s^8 + 1.641e8 s^7 + 1.818e10 s^6 + 1.279e12 s^5 + 6.493e13 s^4 + 2.022e15 s^3 + 2.735e16 s^2 + 6.493e16 s + 4.426e16} \quad (28)$$

$$P_{21} = \frac{-0.4308 s^9 - 337.7 s^8 - 9.415e4 s^7 - 1.211e7 s^6 - 7.774e8 s^5 - 2.511e10 s^4 - 3.688e11 s^3 - 1.734e12 s^2 - 3.087e12 s - 1.846e12}{s^{10} + 1635 s^9 + 7.804e5 s^8 + 1.641e8 s^7 + 1.818e10 s^6 + 1.279e12 s^5 + 6.493e13 s^4 + 2.022e15 s^3 + 2.735e16 s^2 + 6.493e16 s + 4.426e16} \quad (29)$$

r_1 은 2초에 단일계단입력이, r_2 에는 1초에 단일 계단입력이 가해질경우 그림 7은 전향보상기를 적용하지 않았을 경우이며 1초의 시간 때 상호간섭에 의한 영향을 보이고 있다. 그림 8은 식(18),(19)의 전향보상기를 적용하여 이러한 상호간섭에 의한 영향을 제거시켜주고 있다.

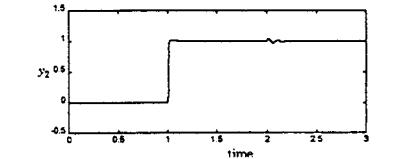
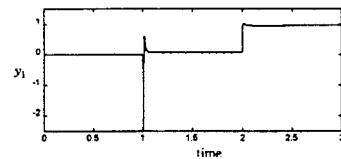


그림 7. 전향보상기를 적용하지 않은 경우

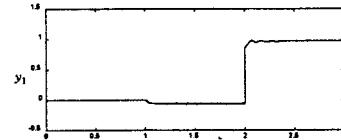


그림 8. 전향보상기를 적용한 경우

4. 결 론

본 논문에서는 (2×2) 다변수 시스템에 대해서 채널 분리법과 분리된 채널의 성질에 대해서 설명하였다. 분리된 채널에 시간영역 설계조건 충족에 유리한 CDM을 이용한 제어기의 설계법과 외란 형태의 상호간섭 제거를 위한 전향보상기를 이용한 제어기 설계절차를 제시하고 그 예를 가스터빈 모델에 적용하여 유용성을 보였다. 설계된 제어기의 차수가 높은 것을 해결하는 것에 대한 연구가 필요하다.

[참 고 문 헌]

- [1] S. Manabe,"Coefficient Diagram Method," 14th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace, pp.199-210, Aug. 1998.
- [2] Leithhead, W.E. and O'Reilly, J., 1991, Multivariable control by 'Individual Channel Design', *International Journal of Control*, 54, 1-46.
- [3] Leithhead, W.E. and O'Reilly, J., 1991, Performance issues in the individual channel design of 2-input 2-output systems. Part 1:Structural Issues. *International Journal of Control*, 54, 47-82
- [4] Leithhead, W.E. and O'Reilly, J., 1992, Performance issues in the individual channel design of 2-input 2-output systems. Part 2:Robustness issues. *International Journal of Control*, 55, 3-47
- [5] Leithhead, W.E. and O'Reilly, J., 1992, Performance issues in the individual channel design of 2-input 2-output systems. Part 3:Non-diagonal control and related issues. *International Journal of Control*, 55, 265-312.
- [6] 송정화, 정동근, 김영철, "비결합 전향 보상기를 갖는 선형다변수 시스템의 퍼지제어기 설계", 98년도 대한전기학회 학계 학술대회 논문집 B권, pp.407-409, 1998. 7.