# 시변 시간지연을 갖는 대규모 불확정성 선형 시스템의 강인 안정성

김재성[†], 조현철[†], 이희송[††], 김진훈[†]
충북대학교 제어계측공학과[†], 충북대학교 전기공학과[††].

# Robust Stability of Large-Scale Uncertain Linear Systems with Time-Varying Delays

Jae-Sung Kim[†], Hyun-Chul Cho[†], Hee-Song Lee[††], Jin-Hoon Kim[†]
Dept. of Control and Instrumentation Engineering. Chungbuk National Univ.[†]
Dept. of Electrical Engineering. Chungbuk National Univ.[††]

**Abstract** - In this paper, we consider the problem of robust stability of large-scale uncertain linear systems with time-varying delays. The considered uncertainties are both unstructured uncertainty which is only known its norm bound and structured uncertainty which is known its structure. Based on Lyapunov stability theorem and $H_\infty$ theory, we present uncertainty upper bound that guarantee the robust stability of systems. Especially, robustness bound are obtained directly without solving the Lyapunov equation. Finally, we show the usefulness of our results by numerical example.

## 1. 서 론

일반적으로 제어기를 설계할 때, 수학적 모델과 실제 시스템간의 피할 수 없는 차이가 발생한다. 이런 차이의 대표적인 것으로 불확정성(uncertainty)과 시간지연(time-delay)이 있다. 시스템 모델링 과정에서의 오차 및 근사화, 시스템의 변화 또는 외부 노이즈, 외란 등에서 오는 불확정성과 흔히 산업공정에서 발생하는 수송지연, 센서의 측정시간 또는 컴퓨터상의 계산시간 등에서 기인된 시간지연은 시스템의 성능저하 뿐만 아니라 시스템의 안정성까지도 보장하지 못하는 경우가 발생한다 [1]. 특히 불확정성이나 시간지연이 시변인 경우에는 시스템의 해석이 더욱더 어려운 것이 일반적이다.

화학공정이나 전력, 네트워크, 교통망 분야 등에서 볼 수 있는 대규모 시스템의 경우, 일반적으로 내부 구조가 크고 복잡하며 변수가 많은 시스템이다. 또한 연관된(interconnected) 보조시스템(subsystems)들로 이루어져 있기 때문에 이들 간의 데이터 교환 시에 시간지연이 발생하는 경우가 생긴다. 이는 대규모 시스템 해석 시에 중요한 요소이며 이를 고려하지 않을 경우, 시스템의 불안정을 초래할 수 있다[2,3].

대규모 시간지연 시스템의 안정성에 관해서는 Mori[2]의 논문을 효시로 많은 연구가 되어 왔다. Mori는 comparision 이론과 M-행렬을 이용하여 안정성 조건을 제시하였고, Lyau[3]는 complex Lypaunov 방정식을 이용해 안정성을 보장하는 결과를 얻었다. 근래에 와서는 대규모 시간지연 불확정성 시스템의 강인 안정성 문제에 대해 다루기 시작했다. Wang[4]은 M-행렬이나 quasi-diagonal dominance 기법 대신에 Lyapunov 안정성 이론과 matrix measure를 바탕으로 시스템의 강인 안정성을 보장하는 불확정성의 바운드를 제시하였고, Xu[5]는 Razumi-khin 이론과 M-행렬을 이용해 강인 안정성을 위한 충분조건을 제시하였다. 그러나 이전 논문들은 주로 시불변(time-invariant) 시간지연에 관한 결과들이고 또한 M-행렬이나 matrix measure를 이용하여 얻어진 결과들이 대부분이다.

본 논문에서는 시변 시간지연을 갖는 대규모 불확정성 선형시스템의 강인 안정성을 다룬다. 고려된 불확정성은 흔히 다루어지는 노옴 바운드만이 알려진 비구조적 불확정성과 불확정성의 구조가 알려진 구조적 불확정성을 다룬다. 또한 시간지연은 지연에 대한 정보를 포함하지 않는 시간지연 독립을 대상으로 한다. 주요 결과에서는 Lyapunov 안정성 이론과 $H_\infty$ 이론을 바탕으로 시변 시간지연을 갖는 대규모 불확정성 선형 시스템의 강인 안정성을 보장하는 불확정성의 상한을 구하는 조건을 제시한다. 그리고 마지막으로 수치예제를 통하여 제시된 결과의 유용성을 보인다.

이 논문에서는, $(\cdot)^T$는 벡터 또는 행렬의 전치(transpose)를 의미하고 대칭행렬 $X$에 대하여 $X>0$ 또는 $X\geq 0$은 각각 행렬 $X$가 양확정(positive definite), 반양확정(positive semidefinite)행렬임을 나타낸다. 그리고 $\|\cdot\|_i$ 는 $i=1,2,\infty$에 대한 벡터 노옴(norm) 또는 이의 유사(induced)행렬을 말하며 $\|G(s)\|_\infty = sup_{\omega\in R}\,\sigma_{\max}[G(j\omega)]$이다. 끝으로 $I_n$은 $n\times n$ 항등 행렬(identity)이다.

## 2. 본 론

### 2.1 문제 기술

다음 $N$개의 연관된 보조 시스템 $S_i(i=1,2,\cdots,N)$로 구성되어있는 불확정성 대규모 시변 시간지연 시스템 $S$을 고려하자. 각 보조 시스템은 다음과 같이 기술된다.

$$S_i:\ \dot{x}_i(t) = (A_i+E_i(t))x_i(t)+\sum_{j=1}^{N}A_{ij}x_j(t-\tau_{ij}(t)) \qquad i=1,2,\cdots,N \tag{1}$$

여기서 $x_i(t)\in R^{n_i}$는 보조시스템 $S_i$의 상태이고 $A_i$는 안정한 행렬이며 $A_{ij}\in R^{n_i\times n_j}$는 상수행렬이다. 그리고 $\tau_{ij}(t)$는 다음을 만족하는 임의의 알려지지 않은 시변 시간지연을 나타낸다.

$$\begin{aligned} &0\leq \tau_{ij}(t)<\infty, \quad h_{ij}=\max(\dot{\tau}_{ij}(t)) \\ &\dot{\tau}_{ij}(t)\leq h_{ij}<1, \quad \forall i=1,2,\cdots,N, \end{aligned} \tag{2}$$

그리고 $E_i(t)\in R^{n_i\times n_i}$은 시변 불확정성 행렬로 다음에 오는 비구조적 불확정성과

$$\|E_i(t)\|\leq \eta_i, \quad i=1,2,\cdots,\infty. \tag{3}$$

다음의 구조적 불확정성을

$$E_i(t)=\sum_{p=1}^{M}k_{ip}(t)E_{ip},\quad i=1,2,\cdots N. \tag{4}$$

대상으로 한다. 여기서 $\eta_i$는 양의 상수이고, $E_{ip}\in R^{n_i\times n_i}$는 알려진 상수 행렬이며 $k_{ip}(t)$는 불확정성을 나타내는 시변 함수이다.

이 논문에서는 조건식(2)와 같은 시간지연과 조건식(3)과 (4)로 기술되는 불확정성을 갖는 대규모 불확정성 시스템(1)의 강인 안정성을 보장하는 조건을 구하는 것이다.

다음의 보조정리들은 앞으로 제시되는 주요 결과들의 증명에 이용된다.

<u>보조정리1</u>[6] : 임의의 행렬 $X, Y$에 대하여 다음이 성립한다.

$$\|XY\|_i\le\|X\|_i\cdot\|Y\|_i\ ,\ i=1,2,\infty\ . \tag{5}$$

<u>보조정리2</u>[6] : 임의의 두 행렬 $X, Y$와 양의 스칼라 $\varepsilon$에 대하여 다음이 성립한다.

$$X^TY+Y^TX\le\varepsilon X^TX+\frac{1}{\varepsilon}Y^TY \tag{6}$$

<u>보조정리3</u>[7] : 행렬 $A$가 안정할 때, 다음의 Riccati 방정식

$$A^TP+PA+PBB^TP+C^TC=0 \tag{7}$$

의 해 대칭 행렬 $P\in R^{n\times n}>0$가 존재 할 필요충분 조건은 다음의 부등식

$$\|C(jwI_n-A)^{-1}B\|_\infty<1 \tag{8}$$

을 만족하는 것이다. 여기서 $rank[C^TC]=n$이다.

### 2.2 강인 안정성 해석

다음의 정리1은 비구조적 불확정성(3)를 갖는 대규모 시스템(1)의 강인 안정성 조건이다.

<u>정리1</u> : 불확정성(3)을 갖는 대규모 시스템(1)에서 $A_i$는 안정하다고 하자. 만약 다음을 만족하면

$$\eta_i^2<\frac{1-h_{ij}}{\|(sI_n-A_i)^{-1}(\sum_{j=1}^{N}A_{ij}A_{ij}^T+I_n)^{\frac{1}{2}}\|_\infty^2}-N$$
$$i=1,2,\cdots,N. \tag{9}$$

시스템(1)은 점근적으로 안정하다.

<u>증명</u> : 조건식(9)으로부터

$$\|(\eta_i^2I_n+NI_n)^{\frac{1}{2}}(sI_n-A_i)^{-1}$$
$$(\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{(1-h_{ij})}A_{ij}A_{ij}^T+I_n)^{\frac{1}{2}}\|_\infty<1,$$
$$\forall i=1,2,\cdots,N,$$

이므로 보조정리3으로부터 다음을 만족하는 대칭 양확정행렬 $P_i$가 항상 존재한다.

$$A_i^TP_i+P_iA_i+P_i(\sum_{j=1}^{N}(\frac{1}{1-h_{ij}})A_{ij}^TA_{ij}+I_n)P_i$$
$$+\eta_i^2I_n+NI_n<0\quad\forall i=1,2,\cdots,N, \tag{10}$$

그리고 주어진 시스템(1)의 Lyapunov 후보함수를 다음과 같이 정의한다.

$$V(x)=\sum_{i=1}^{N}\Big(x_i^T(t)P_ix_i(t)+\sum_{j=1}^{N}\int_{t-\tau_{ij}(t)}^{t}x_i^T(s)x_i(s)\,ds\Big)$$

여기서 양의 대칭인 행렬 $P_i$는 식(10)의 해이다.

시스템(1)의 시간에 따른 시간 미분을 구하면 다음과 같다.

$$\dot V(x)=\sum_{i=1}^{N}[x_i^T(t)\{A_i^TP_i+P_iA_i+E_i^T(t)P_i+P_iE_i(t)\}x_i(t)$$
$$+\sum_{j=1}^{N}\{x_j^T(t-\tau_{ij}(t))A_{ij}^TP_ix_i(t)$$
$$+x_i^T(t)P_iA_{ij}x_j(t-\tau_{ij}(t))\}$$
$$+\sum_{j=1}^{N}\{x_j^T(t)x_j(t)$$
$$-(1-\dot\tau_{ij}(t))x_j^T(t-\tau_{ij}(t))x_j(t-\tau_{ij})\}]$$

다음으로 보조정리2를 이용하여 위의 식을 정리하면 다음과 같다.

$$\dot V(x)\le\sum_{i=1}^{N}[x_i^T(t)\{A_i^TP_i+P_iA_i+E_i^T(t)E_i(t)+P_iP_i\}x_i(t)$$
$$+\sum_{j=1}^{N}\{(1-\dot\tau_{ij}(t))x_j^T(t-\tau_{ij}(t))x_j(t-\tau_{ij}(t))$$
$$+\frac{1}{(1-\dot\tau_{ij}(t))}x_i^T(t)P_iA_{ij}A_{ij}^TP_ix_i(t)\Big\}$$
$$+\sum_{j=1}^{N}\{x_j^T(t)x_j(t)$$
$$-(1-\dot\tau_{ij}(t))x_j^T(t-\tau_{ij}(t))x_j(t-\tau_{ij})\}]$$

조건식(2)와(3), 그리고 조건식(10)을 이용해 정리하면 다음과 같다.

$$\dot V(x)\le\sum_{i=1}^{N}\Big[x_i^T(t)\Big\{A_i^TP_i+P_iA_i+P_i(\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{(1-h_{ij})}A_{ij}^TA_{ij}$$
$$+I_n)P_i+\eta_i^2I_n\}x_i(t)+\sum_{j=1}^{N}x_j^T(t)x_j(t)\Big]$$
$$\le\sum_{i=1}^{N}\Big[x_i^T(t)\Big\{A_i^TP_i+P_iA_i+P_i(\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{(1-h_{ij})}A_{ij}^TA_{ij}$$
$$+I_n)P_i+\eta_i^2I_n+NI_n\}x_i(t)\Big]$$
$$<0,\quad\forall x_i(t)\ne0.$$

따라서, Lyapunov 안정성 이론에 의해 정리1의 조건식(9)를 만족하면 비구조적 불확정성(3)과 시변 시간지연을 갖는 대규모 시스템(1)은 점근적으로 안정하다. □

다음에 오는 정리2는 구조적 불확정성(4)를 갖는 대규모 시스템(1)의 강인 안정성을 보장하는 조건이다.

<u>정리2</u> : 불확정성(4)를 갖는 대규모 시스템(1)에서 $A_i$는 안정하다고 하자. 만약 다음을 만족하면

$$\|(\sum_{p=1}^{M}k_{ip}^2(t)\sum_{p=1}^{M}(E_{ip}^TE_{ip})+NI_n)^{\frac{1}{2}}(sI_n-A_i)^{-1}$$
$$(\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{(1-h_{ij})}A_{ij}^TA_{ij}+I_n)^{\frac{1}{2}}\|_\infty<1 \tag{11}$$

시스템(1)은 점근적으로 안정하다.

여기서 $i=1,2,\cdots,N$, 이다.

<u>증명</u> : 다음에 오는 구조적 불확정성 부등식 관계를 이용하여 증명을 한다.

$$E_i^T(t)E_i(t)\le\sum_{p=1}^{M}k_{ip}^2(t)\sum_{p=1}^{M}(E_{ip}^TE_{ip})$$

정리1의 증명과 같은 방법으로 하면 쉽게 되므로 생략하기로 한다. □

다음에 오는 따름정리1은 $\tau_{ij}(t)$가 상수가 되는 즉, 시간지연이 시불변일 때의 강인 안정성 조건을 나타내는 정리이다.

**따름정리1** : 비구조적 불확정성(3)을 갖는 대규모 시간지연 시스템(1)에서 $A_i$는 안정하다고 가정하자. 다음에 오는 식을 만족한다면 시스템(1)은 점근적으로 안정하다.

$$\eta_i^2 < \frac{1}{\|(sI_n - A_i)^{-1}(\sum_{j=1}^{N} A_{ij}A_{ij}^T + I_n)^{\frac{1}{2}}\|_\infty^2} - N \qquad i=1,2,\cdots,N. \qquad (12)$$

### 2.3 수치 예제

위의 제시된 결과들의 유용성을 보이기 위해 다음과 같은 대규모 시간지연 시스템을 고려한다[4]. 고려된 불확정성은 비구조적 불확정성과 구조적 불확정성 모두를 다루고 시간지연은 임의의 시불변 시간지연을 고려한다.

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= \left(\begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 2 & -7 \end{bmatrix} + E_1(t)\right)x_1(t) + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x_1(t-\tau_{11}) \\
&\quad + \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix} x_2(t-\tau_{12}) + \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 \end{bmatrix} x_3(t-\tau_{13}) \\
\dot{x}_2(t) &= \left(\begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 1 & -6 \end{bmatrix} + E_2(t)\right)x_2(t) \\
&\quad + \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 \end{bmatrix} x_1(t-\tau_{21}) \\
&\quad + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x_2(t-\tau_{22}) + \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 \\ 0.4 & 0.2 \end{bmatrix} x_3(t-\tau_{23}) \\
\dot{x}_3(t) &= \left(\begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} + E_3(t)\right)x_3(t) \\
&\quad + \begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 \\ 0.4 & 0.3 \end{bmatrix} x_1(t-\tau_{31}) \\
&\quad + \begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 \\ 0.2 & 0.5 \end{bmatrix} x_2(t-\tau_{32}) + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x_3(t-\tau_{33})
\end{aligned} \qquad (13)$$

먼저 불확정성 $E_i(t)$가 노옴 바운드만이 알려진 비구조적 불확정성(3)이라 하자. 제시된 따름정리1에서의 조건식(12)를 만족시키는 최대 $\eta_i$값을 MATLAB™을 이용하여 이를 구하면 다음 표 1과 같은 결과 값을 얻을 수 있다.

표 1. 비구조적 불확정성에 대한 결과

| | $\eta_1$ | $\eta_2$ | $\eta_3$ |
|---|---|---|---|
| Wang *et al.*[4] | 0.3117 | 0.5833 | 0.3117 |
| Our results | 0.7453 | 0.7838 | 0.3727 |

표 1에서 보면 본 논문에서 얻어진 비구조적 불확정성을 갖는 대규모 시간지연 시스템(13)의 강인 안정성을 보장하는 불확정성의 상한이 Wang 등[4]의 논문 결과보다 우수함을 알 수 있다.

다음으로 불확정성 $E_i(t)$가 다음과 같이 기술되는 구조적 불확정성이라 하자.

$$\begin{aligned}
E_1(t) &= \sum_{p=1}^{3} k_{1p}(t)E_{1p} \\
&= k_{11}(t)\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + k_{12}(t)\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + k_{13}(t)\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\
E_2(t) &= \sum_{p=1}^{3} k_{2p}(t)E_{2p} \\
&= k_{21}(t)\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + k_{22}(t)\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + k_{23}(t)\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \\
E_3(t) &= \sum_{p=1}^{3} k_{3p}(t)E_{3p} \\
&= k_{31}(t)\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + k_{32}(t)\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + k_{33}(t)\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned} \qquad (14)$$

제시된 정리2에서, $h_{ij}=0$일 때 조건식(11)을 만족시키는 최대 불확정성의 상한값을 MATLAB™을 이용하여 구하면 다음에 오는 표 2와 같다.

표 2. 구조적 불확정성에 대한 결과

| | $\sum_{p=1}^{M} k_{1p}^2$ | $\sum_{p=1}^{M} k_{2p}^2$ | $\sum_{p=1}^{M} k_{3p}^2$ |
|---|---|---|---|
| Wang *et al.*[4] | 0.0091 | 0.0432 | 0.0092 |
| Our results | 0.0367 | 0.0659 | 0.0105 |

표 2에서 보면 본 논문에서 얻어진 구조적 불확정성(14)를 갖는 대규모 시간지연 시스템(13)의 강인 안정성을 보장하는 불확정성의 상한값이 이전 논문의 결과값보다 우수함을 알 수 있다.

## 3.결론

이 논문에서는 Lyapunov 안정성 이론과 $H_\infty$이론을 바탕으로 시변 시간지연을 갖는 대규모 불확정성 선형 시스템의 강인 안정성 문제를 다루었다. 고려된 불확정성은 비구조적 불확정성과 구조적 불확정성을 다루었고 시간지연은 시간지연 독립판별을 대상으로 하였다. 마지막으로 수치예제를 통해 얻어진 결과의 유용성을 보였다.

### [참 고 문 헌]


[1]S. S. Wang, B. S. Chen and T. P. Lin, "Robust stability of uncertain time-delay systems", *Int. J. Control*, vol.46, no.3, pp.963-976, 1987

[2]T. Mori, N. Fukuma and M. Kuwahar, "Simple stability criteria for single and composite linear systems with time delays", *Int. J. Control*, vol.32, no.6, pp.1175-1184, 1981.

[3]J. Lyau, Y. S. Kim, Z. Bien, "A note on the stability of a class of interconnected dynamic systems", *Int. J. Control*, vol.39, no.4,pp.743-747, 1984

[4]W. J. Wang, C. C. Song and C. C. Kao, "Robustness bounds for large-scale time-delay systems with structured and unstructured uncertainties", *Int. J. Systems Science*, vol. 22, no.1, pp.209-216, 1991.

[5]B. Xu, "On delay-independent stability of large-scale systems with time delay", *IEEE Trans. Auto. Contr.* vol.40, pp.930-933, 1995.

[6]A. Wienmann, *"Uncertain Models and Robust Control"*, Springer-Verlag, 1991.

[7]M. Green, D. Limebeer, *"Linear Robust Control"*, Prentice Hall, 1995.