제한적 시스템을 위한 강인한 일단계 이동구간 제어

박병건, 권욱현 이재원
서울대학교 전기공학부 삼성종합기술원

Robust One-step Receding Horizon Control for Constrained Systems

Byung-Gun Park, Wook Hyun Kwon Jae-Won Lee
Seoul National University Samsung Advanced Institute of Technology

Abstract - 이논문은 입력과 상태변수에 제한조건이 있는 이산형 불확실 선형 시스템을 위한 강인한 이동구간 제어기를 제시한다. 모델 변수는 콘벡스 집합에 속하는 불확실성 성질을 갖는다. 제안된 이동구간 제어기는 터미널 가중치 행렬들과 입력과 상태변수의 제한조건을 가지는 최악의 일단계 목적함수의 최소화에 기초한다. 제안된 이동구간 제어기는 위의 불확실한 시스템을 일정한 터미널 가중치 행렬에 대한 행렬 부등식 조건하에서 안정화 시킬수 있다는 것을 보인다. 이 강인 이동구간 제어기는 기존의 무한 구간 강인 이동구간 제어기보다 같은 설계 조건하에서 보다 더 일반적인 구조와 더 큰 간으한 초기 상태 영역을 갖는다. 이 제시된 이동구간 제어기는 반한정 프로그래밍을 이용하여 얻어진다.

1. 서 론

이동구간 제어기(RHC)는 모델 예측 제어(MPC)와 같은 개념으로 산업 프로세스 시스템의 제어의 강력한 도구로 많은 관심을 받아왔다. 이 방법은 기존의 무한 구간 제어에 대해 많은 장점을 보여왔는데, 특히 제어의 설계와 인가과정에서 체계적인 방법으로 입력과 상태변수에 있는 제한조건을 다룰수 있다 [1,2,3,4]. 또한 시변시스템에도 적합한 방식이다 [14]. 이동구간 제어기의 강인성에 관한 분석에 많은 연구가 있어 왔다 [5,6,7,8]. 하지만, 합성 문제에 있어서는 FIR 모델의 제한적인 구조하에서 결과들이 있어왔다 [9,10,11]. 이와 같은 제한성을 극복하기 위해서, Kothare등이 상태변수 모델을 통한 강인제어기 설계 방법을 제시했다 [1]. 이 방법은 입력과 출력 제한 조건도 다루고 있는데, 선형 상태 궤환 방식으로 문제를 접근한다. 이 방법은 실제의 시스템이 비선형시스템이기 때문에 가능한 초기 상태 집합의 제한과 보수적인 상한 문제를 가져온다. 이것은 비선형 방식으로 개선될 수 있는데, 비선형 방식을 쓸 경우, 상한을 더작게 할 수 있으며, 가능한 초기 상태 집합을 더 크게 할 수 있다. 일단계 비용함수를 사용하게 되면, 위의 문제의 한 해답이 될 수 있다.

위의 사실을 고려하여 본 논문에서는 매 샘플링 시간마다 입력과 상태변수의 제한조건하에서 일단계 비용함수의 최악조건을 최소화하는 제어 방식을 제안한다. 이것은 기존의 방식이 시스템 차수나 [12] 시스템의 불안정한 모드 [2]보다 큰 이동구간을 채택하는데 비해서 일단계 이동구간으로도 제어 가능함을 보인다. 본 제어기를 위한 안정성 조건은 LMI 형태 [13]로 주어진다. 그리고, 안정성을 보이기 위해서 비용함수의 monotonicity가 이용된다. 그리고, 본제어기를 구하는 알고리즘은 SDP(Semidefinite Programming) [14]로 구해질 수 있다.

본 제어 방식은 Kothare가 제안한 강인 제어기보다 더 큰 가능한 초기 상태 집합을 가지며, 많은 경우에 있어서 좋은 성능이 기대된다. 이와 같은 결론은 본 제어방식이 일단계 비용함수에 기초하여 비선형 제어방식으로 제한이 있는 불확실성 시스템을 다루기 때문이다.

2. 본 론

2.1 도입

이 논문을 통해서 다음과 같은 시변형 이산 시스템이 고려된다.

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k, \quad (1)$$
$$(A_k \quad B_k) \in \Omega,$$

이 시스템의 다음의 제한 조건을 가진다.

$$\begin{aligned} -u_{\lim} \le u_k \le u_{\lim}, \quad k=0,1,\cdots,\infty \\ -g_{\lim} \le Gx_k \le g_{\lim}, \quad k=0,1,\cdots,\text{infty} \end{aligned} \quad (2)$$
$$\Omega = Co\{[A_1 \quad B_1],\cdots,[A_L B_L]\}, \quad (3)$$

여기서 Co는 콘베스헐을 의미한다.

매 샘플링 구간마다 최소화해야 하는 일단계 이동구간 제어기의 비용함수는 다음과 같이 정의된다.

$$J(x_k, u_k, \Psi_k, k) = J_1(x_k, u_k, k) + J_2(x_k, \Psi_k, k), \quad (4)$$
$$where$$
$$J_1(x_k, u_k, k) = x'_k Q x_k + u'_k R u_k,$$
$$J_2(x_k, \Psi_k, k) = x'_{k+1|k} \Psi_k x_{k+1|k},$$
$$Q \ge 0, R > 0, \text{and} \infty > \Psi_k > 0.$$

(4)식에서 Ψ_k는 폐구간 안정성을 보장하기 위해서 결정되어지고, 가중치 Q와 R은 주어진다. $x_{k+1|k}$는 x_k와 u_k로부터 $x_{k+1|k}$의 예측치로 구해진다. 비용함수 (4)를 매샘플링 순간마다 최소화하고 폐루프 안정성을 보장하는 최적해를 u^*_k라 하자. 그러면, k시간의 이동구간 제어기는 다음과 같이 주어진다.

$$u_k = u^*_k \quad (5)$$

제한조건을 다루기 위해, 소위 불변 타원 성질을 도입한다. 이 성질은 제한적 시스템을 위한 강인한 일단계 이동구간 제어기를 구성하는데 이용될 것이다. 다음이 성립한다고 가정하자.

$$(A_k + B_k K)' P (A_k + B_k K) - P \le 0. \quad (6)$$

그리고, 원점에 중심을 둔 타원 E_P를 다음과 같이 정의한다.

$$E_P = \{x_0 | x_0' P x_0 \le 1\}.$$

그러면, 모든 초기조건에 대하여, $u_k = Kx_k$의 상태귀환 제어를 가지는 상태변수의 궤적은 타원에 속한다. 이 성질에 기초하여 다음의 Lemma를 도입한다.

Lemma 1.
식 (6)과 다음의 LMI를 일정한 대칭행렬 Z,V에 대하여 만족하는 P와 K가 존재한다고 하자. 그리고, $\Gamma = P^{-1}, Y = K\Gamma$ 가 성립한다고 하자.

$$\begin{bmatrix} Z & Y \\ Y' & \Gamma \end{bmatrix} \ge 0, \quad with \ Z_{jj} \le u^2_{\lim,j} \quad j=1,\cdots,n_u \quad (7)$$
$$G\Gamma G' \le V, \quad with \ V_{jj} \le g^2_{\lim,j} \quad j=1,\cdots,n_g \quad (8)$$

그러면, $u_k = Kx_k$의 상태궤환 제어기는 타원에 속하는 모든 초기 조건에 대해서 제한조건 (2)를 만족하면서 주어진 시스템을 안정화 시킨다. 이것으로부터 나오는 상태궤적은 타원에 항상 남게 된다.

2.2 강인한 일단계 이동구간 제어

이 단락에서는 입력과 상태변수에 제한조건을 가지는 이산형 불확실 시스템에 대한 이동구간 제어기를 제안한다. 우선, 폐루프 안정성을 위해서 다음의 전제조건을 도입한다.

Assumption 1.
모든 l에 대해서, 터미널 가중치 행렬은 다음식을 만족한다.

$$\Psi_k \geq Q + H'_k R H_k + (A_l + B_l H_k)' \Psi_k (A_l + B_l H_k) \quad (9)$$

이제, 다음의 min-max최적화 문제를 매 샘플링시간마다 시스템 (1)에 대해서, Assumption1과 제한조건 (2)를 족하도록 푼다. 즉, 모든 l에 대해서,

$$Minimize_{u_k, \Psi_k, H_k} Maximize J(x_k, u_k, \Psi_k, k) \quad (10)$$

subject to (9) and

$$-u_{\lim} \leq u_k \leq u_{\lim},$$
$$-u_{\lim} \leq u_{k+n|k} (= H_k x_{k+n|k}) \leq u_{\lim}, \quad n = 1, \cdots, \infty \quad (11)$$
$$-g_{\lim} \leq G x_{k+n|k} \leq g_{\lim}, \quad n = 0, 1, \cdots, \infty$$

위의 최적화 문제는 입력과 상태변수에 대한 제한조건이 무한 구간에 대해서 조사되어야 한다. 왜냐하면, 모든 시간에 대한 최적화 문제 (10)의 feasibility가 보장되어야 하기 때문이다. QP에 대한 일반적인 알고리즘이 위의 QCQP를 풀수없기 때문에, 이 QCQP를 다음의 min-max 최적화 문제로 바꾼다. 다음의 최적화 문제는 많은 유용한 알고리즘이 알려져 있는 SDP 문제로 바꿀 수 있다.

$$Minimize_{\gamma_1, \gamma_2, u_k, \Psi_k, H_k} \quad \gamma_1 + \gamma_2 \quad (12)$$

subject to (9), (11), and

$$Maximize \quad J_1(x_k, u_k, k) \leq \gamma_1, \quad (13)$$

$$Maximize \quad J_2(x_k, \Psi_k, k) \leq \gamma_2 \quad (14)$$

어떤 제한조건이 주어진 시스템에 인가되었을 때, 형성된 최적화 문제가 모든 시간에 대해서 가능한 해를 갖는가 하는 문제는 중요한 이슈가 된다. 다음 Lemma3가 이문제에 대한 해답을 준다.

Lemma 3.
최적화 문제 (12)가 초기시간 k=0에 가능하면, 이 문는 모든 시간에 대해서 가능하다.

이제, 입력과 상태변수에 제한조건이 있는 이산형 불확실 선형 시스템의 이동구간 제어를 위한 다음 Theorem을 말할 준비가 되었다.

Theorem 1.
시간 k에 측정된 불확실 제한조건이 있는 이산형 시스템 (1)의 상태변수를 x_k라 하자. 그러면, 최적화 문제 (12)를 통해 구해지는 (5)의 이동구간 제어법칙은 불확실 제한조건이 있는 이산형 시스템 (1)을 안정화 시킨다.

이제, 최적화 문제 (12)를 풀 알고리즘을 제안한다. 이것을 위해서, 부등식 (13), (14), (9)는 one-shot 형태로 환되고, 입력과 상태변수 제한조건 (11)은 계산이 가능한 선형 행렬 부등식으로 전환된다. 입력과 상태변수 제한조건 (11)은 크게 n=0의 구간과 n>0의 구간으로 나누서 다룬다. 먼저, n=0인 구간은 다음의 LMI형태로 구진다.

$$-u_{\lim} \leq u_k \leq u_{\lim}$$
$$-g_{\lim} \leq G x_k \leq g_{\lim} \quad (22)$$

반면에, n>0보다 큰 구간에 대해서는 다른 방법이 적용되어야 한다. 왜냐하면, 검사되어야 할 그 구간이 무한구간이기 때문이다. Lemma 1으로부터, 부등식 (7), (8), (9)가 만족이 되면, 구간 n>0에서 입력과 상태변수에 대한 부등식이 만족된다는 것을 알 수 있다.
따라서, 위의 방식으로 LMI를 구해서 최적화 문제 (12의 제한조건으로 사용하면, 계산 가능하고 능률적인 SDP문제로 전환할 수 있다.

Remark 1.
주어진 설계 계수 Q와 R에 대해서, 최적화 문제 (12)의 가능한 초기 상태변수의 집합은 Kothare[1]가 제안한 인 이동구간 제어기의 가능한 초기 상태변수의 집합을 포함한다.

Remark 2.
제안된 일단계 이동구간 제어기가 Kothare의 강인 이동구간 제어기 보다 더 일반적인 형태임을 보여준다. 왜냐하면, 일단계 이동구간 제어기는 제어 시퀀스에 대해서 2자유도를 가지고 있는 반면에 Kothare의 강인 이동구간 제어기는 하나의 자유도를 보여준다.
$f(x_k) = K_k x_k, H_k = K_k (n = 1, \cdots, \infty)$ 이면, 일단계 이동구간 제어기는 강인 이동구간 제어기를 나타나게 된다.

Remark 3.
다음의 부등식이 성립함을 알 수 있다.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x'_{k+n|k} Q x_{k+n|k} + u'_{k+n|k} R u_{k+n|k}) \quad (29)$$
$$\leq V(x_{k+1|k}) + (x'_k Q x_k + u'_k R u_k) \leq V(x_k).$$

부등식 (29)는 같은 무한 구간 비용함수에 대해서, 측정된 상태변수가 동일하다면, 일단계 이동구간 제어기 비용함수의 상한이 강인 이동구간 제어기[1]의 비용함수의 상한보다 작다라는 것을 보인다. 이 논문과 [1]의 논문의 두 개의 최적화 문제는 같은 무한 구간 비용함수의 위의 상한들을 최소화 시키는 문제로 볼 수 있으므로, 제안된 방식이 강인한 이동구간 제어기보다 더 작은 상한을 가진다고 볼 수 있다. 따라서, 이 사실로부터 많은 경우에 있어서, 제안된 방식이 더 빠른 반응을 가져 온다는 것을 알 수 있다.

3. 결 론

이 논문에서는, 입력과 상태변수에 제한조건을 가지는 이산형 불확실 선형 시스템을 위한 새로운 이동구간 제어 방식이 제안되었다. 제안된 방식에서, 터미널 가중치 행렬을 가지는 일단계 구간 비용함수가 채택되었다. 이 이동구간 제어기는 SDP를 이용하여 구해진다. 폐루프 시스템의 안정성을 위해서, 충분조건이 구해지는데 이것은 LMI 형태로 나타난다. 불변 타원 성질이 입력과 상태변수의 제한조건을 다루기 위해 이용되었다. 제안된 방식의 가능한 초기 상태 집합은 강인 이동구간 제어기 [1]의 초기 상태 집합보다 크다. 더욱이, 제안된 방식은 강인 이동구간 제어기보다 일반적인 구조를 가지고 있음이 보여졌다. 따라서, 이 방식은 대부분의 불확실 제한조건이 있는 시스템에서 더 좋은 성능을 기대할 수 있다. 제안된 방식은 추종문제, 외란제거문제, 그리고 지연시스템에 대한 응용으로 확장할 수 있다.

[참 고 문 헌]

[1] M. V. Kothare, V. Balakrishnan and M. Morari, "Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities," Automatica, vol. 32, No. 10, pp. 1361-1379, 1996.

[2] J. B. Rawlings and K. R. Muske, "The stability of constrained receding horizon control," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 38, No. 10, pp. 1512-1516, 1993.
[3] A. Zheng and M. Morari, "Stability of model predictive control with mixed constraints," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 40, No. 10, pp. 1818-1823, 1995.
[4] J. W. Lee, W. H. Kwon and J. Choi, "On stability of constrained receding horizon control with finite terminal weighting matrix," Proceedings of 1997 European Control Conference, Brussels, Belgium, 1997.
[5] C. E. Garcia and M. Morari, "Internal model control 1. A unifying review and some new results," Ind. Eng. Chem. Process Des. and Dev.}, vol. 21, pp. 208-232, 1985.
[6] E. Zafiriou and A. Marchal, "Stability of SISO Quadratic Dynamic Matrix Control," AIChE Journal, vol. 37, No. 10, pp. 1550-1560, 1991.
[7] H. Genceli and M. Nikolaou, "Robust stability analysis of constrained l_1-norm model predictive control," AIChE Journal, vol. 39, No. 12, pp. 1954-1965, 1993.
[8] E. Polak and T. H. Yang, "Moving horizon control of linear systems with input saturation and plant uncertainty-1: Robustness," Int. J. Control, vol. 53, No. 3, pp. 613-638, 1993.
[9] P. J. Campo and M. Morari, "Robust model predictive control," Proceedings of 1989 American Control Conference, pp. 1021-1026, 1987.
[10] J. C. Allwright and G. C. Papavasiliou, "On linear programming and robust model-predictive control using impulse-response," Systems and Control Letters, vol. 18, pp. 159-164, 1992.
[11] Z. Q. Zheng and M. Morari, "Robust stability of constrained model predictive control," Proceedings of 1993 American Control Conference, pp. 379-383, 1993.
[12] W. H. Kwon and A. E. Pearson, "On feedback stabilization of time-varying discrete linear systems," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 23, No. 3, pp. 479-481, 1978.
[13] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan, it Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory, vol. 15, SIAM, Philadelphia, PA., 1994.
[14] L. Vandenberghe and S. Boyd, Semidefinite Programming, SIAM Review, vol. 38, pp. 49-95, 1996.