# 정합조건을 만족하지 않는 슬라이딩 모드 제어에서의 채터링 제거에 관한 연구

박 승 규, 진 미 정, 안 호 균, 곽 군 평
창원대학교 전기공학과

# A Study on the Chattering Elimination in the SMC without Matching Condition

Seung Kyu Park, Mi Jung Jin, Ho Kyun Ahn, Gun Pyong Kwak
Department of Electrical Engineering, Changwon National University

**Abstract** - In this paper, new sliding mode control method is proposed to reduce the input chattering. In this procedure, virtual state is defined and augmented system is constructed based on it. For the augmented system, new SMC is designed and low pass filtered. The actual input to the system is the filtered SMC. The reaching phase problem is solved by setting the virtual state to make the initial value of sliding function equal to zero.

## 1. 서 론

슬라이딩 모드 제어(Sliding Mode Control:SMC)는 강인제어기법으로서 많은 연구결과와 실제 적용 예를 가지고 있지만 근본적으로 도달기간(Reaching Phase) 문제와 입력떨림(Chattering)현상을 가지고 있다[1][2][3]. 이에 떨림현상을 없애는 연구 결과가 있으나 관측기를 사용해야 하는 등 제어기 구성이 복잡하다[4][5]. 본 연구에서는 떨림현상과 도달기간 문제를 해결하기 위하여 새로운 가상의 상태를 정의한다. 가상의 상태는 제어계통에 인가되는 입력이고 이 입력은 SMC기법에 의해서 구해진 입력이 저주파 필터를 통과함으로써 얻어진다. SMC기법은 가상상태가 더해진 차수가 증가된 계통에 대해서 적용되며 결국 실제 계통에 인가되는 제어입력은 확장된 계통에 대한 SMC입력이 저주파 필터를 통과한 형태로 됨으로써 떨림현상이 제거될 수 있다. 또한 가상상태의 초기치를 슬라이딩 함수의 초기값이 영으로 되도록 결정하여 줌으로써 도달기간도 제거할 수 있다.

## 2. 문제설정

아래와 같은 n차 시스템을 고려하기로 한다.

$$\dot{X}=[A+\Delta A(\beta)]X+[B+\Delta B(\beta)]u \qquad (1)$$

여기서 $X\in R^n$, $u\in R$, $\Delta A(\beta)\in R^{n\times n}$, $\Delta B(\beta)\in R^{n\times 1}$이고 노옴유계(norm bounded)를 가지는 불확실한 행렬 $\Delta A(\beta)$와 $\Delta B(\beta)$는 식(2)의 정합조건을 만족시키는 행렬함수 $D(\beta)\in R^{1\times n}$와 $e(\beta)\in R$이 존재한다고 하자.

$$\begin{aligned}\Delta A(\beta)&=BD(\beta)\\ \Delta B(\beta)&=Be(\beta)\end{aligned} \qquad (2)$$

그러면 기존의 슬라이딩 평면은 일반적으로 다음과 같은 형태로 표현될 수 있다.

$$s(x,t)=c_n(t)x_n+c_{(n-1)}(t)x_{(n-1)}+\cdots c_1(t)x_1+c_0(t)=0 \qquad (3)$$

여기서 $c_0(t), c_1(t)\cdots c_n(t)$은 슬라이딩 모드의 동특성이 안정하도록 주어진다.

슬라이딩 모드가 일어나도록 하는 조건은 다음과 같다[1].

$$s(x,t)\,\dot{s}(x,t)<0 \qquad (4)$$

위의 조건은 $s(x,t)$에 의해서 정의되는 평면상에서 불연속적인 다음과 같은 궤환입력 $u^+(\cdot)$, $u^-(\cdot)$에 의해서 만족될 수 있다[2].

$$u(\cdot)=\begin{cases}u^+(\cdot), & \text{for } s>0\\ u^-(\cdot), & \text{for } s<0\end{cases} \qquad (5)$$

SMC입력은 식(5)와 같은 형태를 가짐으로써 떨림현상이 필연적으로 나타나게 되어있다. 그러므로 이러한 떨림현상을 근본적으로 제거한다는 것은 슬라이딩 모드 제어를 하지 않는 것이나 마찬가지이므로 본 논문에서는 떨림현상이 일어나는 SMC입력은 인정하되 저주파 필터를 통과시킴으로써 떨림현상을 제거하고자 한다. 즉, 저주파 필터를 포함한 차수가 증가된 계통에 대하여 SMC입력을 구함으로써 실제 계통에 인가되는 제어입력은 SMC입력이 저주파 필터를 통과한 형태가 되는 것이다.

그러나 이러한 방법을 적용시키는데 있어서의 문제점은 원래의 계통이 정합조건을 만족시킨다 하더라도 가상의 상태가 추가된 차수가 증가된 계통에 대한 슬라이딩 모드 제어 입장에서 보면 절대로 정합조건이 만족될 수 없다는 것이다. 다음과 같은 정합조건을 만족하는 이차시스템을 고려하자.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=x_1+x_2\\ \dot{x}_2&=-\beta x_2+u\end{aligned} \qquad (6)$$

위의 시스템에 대하여 입력을 저주파 필터를 통과시켜 다시 나타내면 다음과 같은 차수가 증가된 시스템을 구성할 수 있고 새로이 구성되어진 이 시스템은 정합조건을 만족하지 않음을 알 수 있다.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=x_1+x_2\\ \dot{x}_2&=-\beta x_2+x_3\\ \dot{x}_3&=u_{smc}\end{aligned} \qquad (7)$$

여기서 $x_3=u$ 이다.

그러므로 정합조건을 만족하지 않을 때 사용될 수 있는 SMC기법을 고찰해야 한다.

## 3. 정합조건을 만족하지 않는 계통에 대한 SMC의 구성

이 장에서는 정합조건을 만족하지 않는 불확실한 계통에 대하여 SMC입력을 구하는 방법을 제시하고 있다.

채터링 제거를 위해 저주파 필터가 포함된 차수가 증가된 n차 시스템인 식(8)을 고려할 때, 앞의 문제를 해결하기에 앞서 먼저 계통의 불확실성에 대해 $A(\beta)$, $B(\beta)$ 행렬이 다음의 가정 1을 만족한다고 하자.

$$\dot{X}=A(\beta)X+B(\beta)u_{smc} \qquad (8)$$

여기서 $x_n$ 은 실제계통에 대한 제어입력 $u$이다.

가정 1. ( $A(\beta)$, $B(\beta)$)쌍은 모든 불확실성 $\beta$에 대해 항상 가제어하다.

그러면 가제어 표준형 변환행렬 $T(\beta)$에 의해서 식(8)의 계통은 다음 식과 같이 변환가능하다.

$$\dot{Z}=\overline{A}(\beta)Z+\overline{B}(\beta)u_{smc} \tag{9}$$

여기서

$$\overline{A}(\beta)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 1 \\ x(\beta) & \cdots & x(\beta) \cdots & x(\beta) \end{bmatrix}, \quad \overline{B}(\beta)=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ x(\beta) \end{bmatrix}.$$

식(9)는 제어기 계수에 불확실성 $\beta$가 포함되어 정확한 입력값을 결정할 수가 없으므로 여기서는 Lyapunov min-max 기법에 의한 제어기 설계에 관해 기술한다.

행렬 $\overline{A}(\beta)$는 불확실성 $\beta$를 포함하고 있기 때문에 안정한지를 판단할 수 없다. 따라서 식(10)과 같이 $\overline{A}(\beta)$를 $\beta$에 상관없이 고유치가 좌반면에 존재하는 $\widehat{A}(\beta)$로 안정화시킬 수 있는 궤환이득행렬 $G(\beta)$가 존재한다.

$$\widehat{A}(\beta)=\overline{A}(\beta)-\overline{B}(\beta)G(\beta) \tag{10}$$

식(10)을 이용하여 식(9)을 다시 나타내면 다음과 같다.

$$\dot{Z}=\widehat{A}(\beta)Z+\overline{B}(\beta)(u_{smc}+G(\beta)Z) \tag{11}$$

위 식의 폐루프 계통에 대한 Lyapunov 후보함수를 다음과 같이 정의한다.

$$V=Z^TP(\beta)Z \tag{12}$$

여기서 $P(\beta)$는 계통의 불확실성 $\beta$에 대하여 식(13)과 같이 표현되는 Lyapunov 방정식을 만족하는 Positive definite 행렬이다.

$$P(\beta)\widehat{A}(\beta)+\widehat{A}^T(\beta)P(\beta)+Q(\beta)=0 \tag{13}$$

여기서 $Q(\beta)$는 불확실성 $\beta$의 함수인 Positive definite 행렬이다.

식(12)을 시간에 대해 미분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\dot{V}&=Z^T\dot{P}(\beta)Z+Z^TP(\beta)\dot{Z}\\&=-Z^TQ(\beta)Z+2[\overline{B}^T(\beta)P(\beta)Z]^T[u_{smc}+G(\beta)Z]\end{aligned} \tag{14}$$

식(14)의 $\dot{V}$를 항상 음의 값이 되도록 하는 제어입력 $u_{smc}$를 SMC를 적용하여 구성하기 위해서는 먼저 슬라이딩 평면의 설정이 필요하다.

일반적으로 Lyapunov min-max 기법에 따르면 슬라이딩 평면은 다음과 같이 선정한다.

$$\begin{aligned}S&=\overline{B}^T(\beta)P(\beta)Z\\&=\overline{B}^T(\beta)P(\beta)T(\beta)X=0\end{aligned} \tag{15}$$

그런데 위의 슬라이딩 평면은 불확실성 $\beta$의 함수이기 때문에 슬라이딩 평면의 위치가 $\beta$의 값에 따라 변할 뿐만 아니라 정확한 값 역시 알 수 없으므로 불확실성 $\beta$를 상쇄할 수 있도록 $P(\beta)$를 다음과 같이 선정해야만 한다.

$$\overline{B}^T(\beta)P(\beta)=\overline{B}^T(\beta_o)P(\beta_o)T(\beta_o)T^{-1}(\beta) \tag{16}$$

위의 식을 만족하도록 하는 $P(\beta)$를 결정하게 되면 슬라이딩 평면 $S$는 다시 다음과 같이 표현되어진다.

$$S=\overline{B}^T(\beta_o)P(\beta_o)T(\beta_o)X \tag{17}$$

그리고 식(17)을 이용하여 식(14)를 다시 표현하면 다음과 같다.

$$\dot{V}=-Z^TQ(\beta)Z+2S^T[u_{smc}+G(\beta)Z] \tag{18}$$

식(18)에서 첫 번째 항은 항상 음의 값을 가지므로 두 번째 항만 음이 되도록 입력 $u_{smc}$를 결정해 주면 되고 그 값은 다음과 같다.

$$u_{smc}=-(\max_{\beta}\|(G(\beta)T(\beta))\|)\|X\|sgn(S) \tag{19}$$

이제부터는 식(10)을 만족하는 궤환이득행렬 $G(\beta)$를 결정하는 방법에 대해 기술한다.

식(9)에서의 $\overline{A}(\beta)$는 앞에서 언급했듯이 불확실성 $\beta$를 포함하고 있기 때문에 정확한 극점의 위치를 구할 수는 없고 대신 식(16)을 만족시키는 $P(\beta)$로부터 식(13)으로 주어진 Lyapunov 방정식을 풀어 정확한 위치는 모르나 좌반면에 극점이 존재하는 $\widehat{A}(\beta)$를 결정할 수 있다. 이렇게 해서 결정되어진 $\widehat{A}(\beta)$을 이용하여 식(10)을 만족시키는 궤환이득행렬 $G(\beta)$를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$G(\beta)=\overline{B}^{LG}(\beta)[\overline{A}(\beta)-\widehat{A}(\beta)] \tag{20}$$

여기서 $\overline{B}^{LG}(\beta)$는 좌측 의사 역행렬(left pseudo inverse)이다.

$$\overline{B}^{LG}(\beta)=[\overline{B}^T(\beta)\overline{B}(\beta)]^{-1}\overline{B}^T(\beta)$$

## 4. 채터링 제거를 위한 SMC의 구성

본 장에서는 3장에서 설명한 Lyapunov min-max 기법을 이용하여 얻은 제어기를 사용하여 채터링 현상이 제거된 SMC를 구성하고자 한다. 이해를 돕기 위해 다음과 같은 1차 계통에 대해서 다루게 되며 이 결과는 쉽게 n차 계통으로 확장될 수 있다.

$$\dot{x}_1=-\beta x_1+u \tag{21}$$

여기서 $0.1\le\beta<1$.

채터링 현상을 제거하기 위해 3장에서 설명된 Lyapunov min-max 기법은 저주파 필터(적분기)를 포함한 다음과 같은 계통에 적용된다.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=-\beta x_1+x_2\\\dot{x}_2&=u_{smc}\end{aligned} \tag{22}$$

여기서 $x_2$는 실제계통에 인가되는 입력 $u$이며 이것은 Lyapunov min-max 기법에 의해서 설계된 채터링 입력인 $u_{smc}$의 적분형태로써 채터링이 감소된 입력임을 알 수 있다.

위 식의 차수가 증가된 시스템은 정합조건을 만족하지 않음을 쉽게 알 수 있다. 이 시스템은 $X=T(\beta)Z=\begin{bmatrix}1 & 0\\ \beta & 1\end{bmatrix}Z$ 의 변환에 의하여 다음의 가제어 표준형으로 변환 가능하다.

$$\begin{aligned}\dot{Z}&=\overline{A}(\beta)Z+\overline{B}(\beta)u_{smc}\\&=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -\beta\end{bmatrix}Z+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u_{smc}\end{aligned} \tag{23}$$

식(16)을 만족하는 Positive definite 행렬 $P(\beta)$를 구하면 다음과 같다.

$$P(\beta)=\begin{bmatrix}1.5-\beta & 1\\ 1-2\beta & 2\end{bmatrix} \tag{24}$$

단, $\beta_o=0.5$, $P(\beta_o)=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$, $T(\beta_o)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0.5 & 1\end{bmatrix}$로

선정하였다.

식(17)로부터 스위칭 평면 $S$는 다음과 같이 결정된다.

$$S = x_1 + 2x_2 \tag{25}$$

식(13)의 Lyapunov 방정식을 풀어 $\widehat{A}(\beta)$를 결정하면 다음과 같다.

$$\widehat{A}(\beta) = \begin{bmatrix} \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} \\ \hat{a}_{21} & \hat{a}_{22} \end{bmatrix} \tag{26}$$

여기서 $\hat{a}_{11} = \dfrac{-16\beta^5 + 144\beta^4 - 448\beta^3 + 578\beta^2 - 267\beta + 6.5}{(2\beta-3)(2\beta-4)(-4\beta^2+4\beta+3)}$

$$\hat{a}_{12} = \frac{4(8\beta^4 - 52\beta^3 + 100\beta^2 - 63\beta + 6.5)}{(2\beta-2)(2\beta-3)(-4\beta^2+4\beta+3)}$$

$$\hat{a}_{21} = \frac{16\beta^5 - 144\beta^4 + 448\beta^3 - 578\beta^2 + 267\beta - 6.5}{(2\beta-2)(2\beta-4)(-4\beta^2+4\beta+3)}$$

$$\hat{a}_{22} = \frac{8\beta^4 - 52\beta^3 + 100\beta^2 - 63\beta + 6.5}{(2\beta-3)(-4\beta^2+4\beta+3)}$$

식(23)과 식(26)으로부터 궤환이득행렬 $G(\beta)$를 결정하면 다음과 같다.

$$G(\beta) = [\ -\hat{a}_{21} \quad -\beta - \hat{a}_{22}] \tag{27}$$

가제어 표준형 변환행렬 $T(\beta)$와 식(26)을 이용하여 SMC입력을 구하면 다음과 같다.

$$u_{smc} = -\max(\sqrt{(\hat{a}_{21} + \beta\hat{a}_{22} + \beta^2)^2 + (\hat{a}_{22} + \beta)^2}) \times \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\ sgn(S) \tag{28}$$

이렇게 해서 구해진 제어입력을 가지고 시뮬레이션을 수행한 결과는 다음과 같다. 그림 1은 시간에 따른 상태 $x_1$의 궤적을 나타내었고, 그림 2는 차수가 증가된 계통에 대한 슬라이딩 모드 제어입력을 나타내고 있다. 그림 3은 실제계통에 대한 제어입력을 나타내고 있으며 채터링이 감소한 것을 알 수 있다. 그림 4는 슬라이딩 함수의 값을 나타내고 있다.

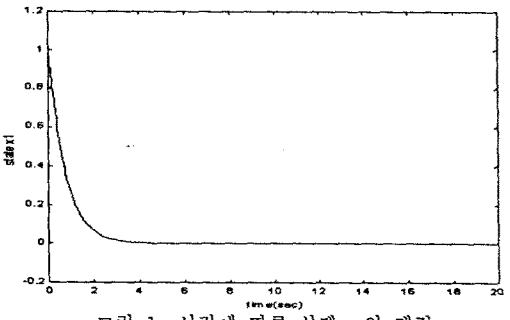


그림 1. 시간에 따른 상태 $x_1$의 궤적

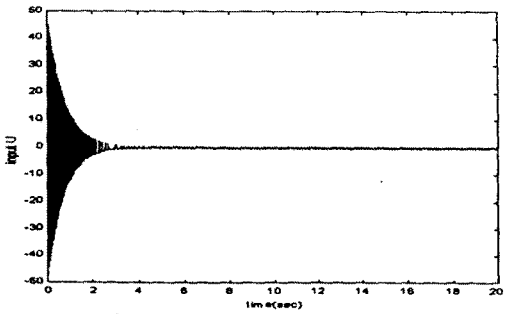


그림 2. 슬라이딩 모드 제어입력 $u_{smc}$

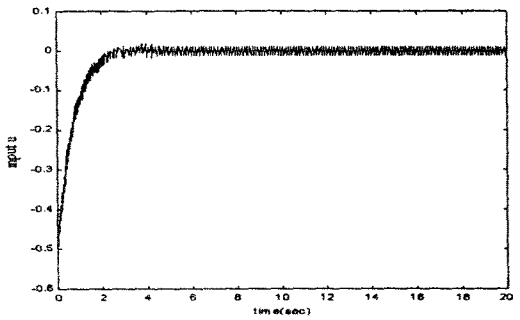


그림 3. 실제 계통에 대한 제어입력 $u$

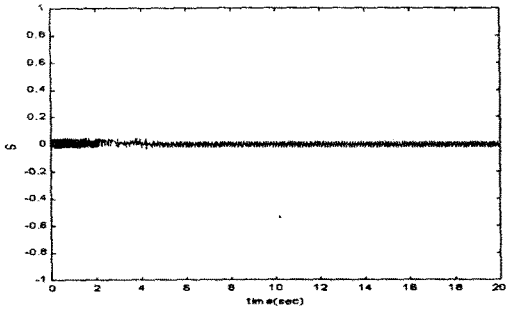


그림 4. 슬라이딩 함수 $S$

## 5. 결 론

본 논문에서는 가상의 상태를 정의하여 채터링 현상을 제거한 새로운 슬라이딩 모드 제어기를 제안한다. 가상의 상태는 SMC입력이 저주파 필터를 통과한 효과를 얻기 위하여 실제 계통에 인가되는 입력을 포함한 저주파 필터의 상태들이 된다. 원래 계통에 가상의 상태방정식을 포함시켜 차수가 증가된 계통을 구성하고 이 확장된 계통에 대하여 SMC기법을 적용시킴으로써 불확실성에 대한 강인성을 보장하는 SMC의 장점을 얻음과 동시에 채터링이 없는 제어입력을 얻을 수가 있게 된다. 가상상태의 초기치를 슬라이딩 함수의 초기치가 영이 되도록 설정하여 줌으로써 도달기간을 제거하는 효과도 얻을 수 있다.

### [참 고 문 헌]


[1] J.Y. Hung, W. Gao, J.C. Hung, "Variable structure control : A survey," IEEE Trans. on Industrial Electronics, Vol. 40, No.1 pp.2-22, 1993

[2] V.I Utkin, Sliding modes and their application in variable structure systems, Moscow, Mir Publishers, 1978

[3] U. Itkis, Control systems of variable structure, JOHNWILLY & SONS, New York, 1976

[4] Bartolini G. Ferrara A, Uasi E. "Chattering avoidance by second-order sliding mode control," IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 43, No.2 pp.241-246, 1998