

TLM법을 이용한 3차원 비선형 정자계 해석

임창환, 김홍규, 정현교
서울대학교 전기공학부

3D Finite Element Analysis of Nonlinear Magnetostatic Problem Using the Transmission Line Modeling(TLM) Method

Chang-Hwan Im, Hong-Kyu Kim, Hyun-Kyo Jung
School of Electrical Engineering, Seoul National University

Abstract - 일반적으로 비선형 정자계 문제를 해석하기 위해서 뉴턴-랩슨(Newton-Raphson: NR)법이 이용된다. 하지만 뉴턴-랩슨법의 경우 각 반복계산 때마다 새로운 선형 시스템의 해를 구하기 위해서 LU-decomposition과 같은 과정을 매 반복계산 때마다 시행해야 하므로 절점(node)의 수가 증가할 경우 계산시간이 증가한다는 단점이 있다. 이러한 단점을 보완하기 위해서 최근 TLM (Transmission Line Modeling)법이 새로운 반복계산법으로 비선형 유한 요소 해석에 적용되었으며 뉴턴-랩슨법에 비해 훨씬 우수한 특성을 보여주었다. 하지만 지금까지의 TLM법은 2차원의 정식화만 이루어졌고 3차원에는 적용되지 못한 것이 사실이다. 본 논문에서는 3차원의 비선형 정자계 문제에 TLM법을 적용할 수 있는 수식을 최초로 제안하며 3차원 코어(core)모델에 대해 TLM법을 적용하여 그 타당성을 검증하기로 한다. 또한 3차원 비선형 TLM법을 이용한 해석 결과가 뉴턴-랩슨법에 의한 결과와 완전히 일치하며 수렴 속도에 있어서도 훨씬 향상된 결과를 나타냄을 보이도록 하겠다.

1. 서 론

3차원 자기 벡터 포텐셜을 이용하여 비선형 정자계 문제를 풀기 위해서 일반적으로 뉴턴-랩슨법이 이용된다. 뉴턴-랩슨법이 물론 우수한 수렴 특성을 지니기는 하지만 매 반복 계산 때마다 새로운 시스템 방정식의 해를 구해야 하기 때문에 절점의 수가 증가할 경우 계산시간이 크게 증가한다는 단점이 있다. 이러한 뉴턴-랩슨법의 단점을 보완하기 위해서 주로 전파공학에서 응용되는 TLM(Transmission Line Modeling)법이 최근 2차원 비선형 해석에 도입되었다.[1,2]. TLM법을 사용할 경우 반복 계산이 진행되어도 시스템 행렬은 변하지 않고 단지 방정식의 우변(forcing term)만 변하기 때문에 뉴턴-랩슨법보다 훨씬 빠른 특성을 보인다. 이는 TLM법을 사용할 경우 뉴턴-랩슨 법에서 매 반복 계산 때마다 계산해 주어야 하는 LU-factorization이나 preconditioning 과정을 생략할 수 있기 때문이다. 특히 3차원 정자계 문제의 경우 자기 벡터 포텐셜의 x,y,z 성분을 모두 고려함으로써 시스템 행렬의 크기가 2차원이나 자기 스칼라 포텐셜을 사용하는 경우보다 훨씬 커지게 되므로 TLM법의 효용이 더욱 커지게 된다. TLM법의 또 다른 장점은 대칭성을 이용한 Domain decomposition방법을 비선형 해석에 적용할 때 물질의 비선형성 때문에 대칭성이 깨어지는 현상을 해결할 수 있는 유일한 대안이 된다는 점에 있다. 이러한 테크닉은 전기 기기의 해석, 특히 유도기의 해석에 적용되어 우수한 특성을 보여주고 있다[3,4].

이러한 TLM법의 우수한 특성에도 불구하고 지금까지의 TLM법은 3차원 해석에 대한 정식화가 이루어지지 않아서 그 적용에 한계를 가지고 있었다. 따라서 본 논문에서는 TLM법을 3차원 비선형 해석에 적용할 수 있

는 수식을 최초로 제안하며 그 타당성을 검증하기 위해 코어 모델에 대해 이 방법을 적용시키도록 한다. 또한 뉴턴-랩슨법을 이용한 해석 결과와의 비교를 통해 본 방법의 정확도와 함께 빠른 수렴 특성을 검증해 보이기로 한다.

2. TLM법의 개요

기존의 TLM법에 대한 상세한 설명은 본 논문의 범위를 벗어나므로 본 장에서는 TLM법에 대한 개요만을 싣도록 한다.

2.1. TLM법을 이용한 비선형 저항 회로의 모델링

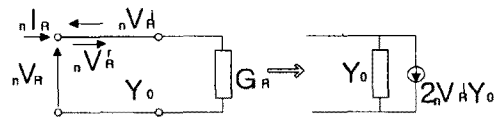


그림 1. TLM법을 이용한 비선형 저항 회로 해석
Fig 1 Nonlinear Resistive Circuit Analysis Using TLM

그림 1은 TLM법을 이용한 비선형 저항 회로 해석을 나타내고 있다. 그림 1에서 GR은 비선형 컨덕턴스(conductance)를 나타내며, nVr'는 n번째 입사 전압(incident voltage), nVr'는 n번째 반사 전압(reflected voltage)을 나타낸다. 임의의 값으로 선의 특성 어드미턴스(characteristic admittance) Y0를 정의하면 왼쪽의 회로를 오른쪽과 같은 노턴(Norton) 등가 회로로 변환할 수 있다. 이 때, Transmission line 이론에 의하면 식(1)이 회로의 송신 단(sending end)에서 성립한다.

$$nVr = nVr' + nVr \quad (1)$$

다시 회로의 수신 단(receiving end)에서 transmission line 이론에 의해 식 (2)가 주어진다.

$$Y0(nVr - n+1Vr') = GR(nVr + n+1Vr') \quad (2)$$

식 (1)과 (2)를 이용한 반복 계산에 의해 회로 양단의 전압을 결정할 수 있다.[1,2]

2.2. TLM법의 유한 요소 해석에의 적용

앞에서 살펴 본 TLM법을 유한 요소 해석에 적용시키기 위해서는 일단 FEM의 각 요소를 비선형 저항 회로로 변환시키는 과정이 우선되어야 한다. 2차원 FEM 해석에서 요소 행렬식은 식 (3)과 같이 표현된다.

$$[K]_{3 \times 3} [A]_{3 \times 1} = [\Delta J]_{3 \times 1} \quad (3)$$

여기서 정의 (4)에 의해 FEM요소를 그림 2와 같은 비선형 저항회로로 변환할 수 있다.

$$A_i = V_i \Delta J/3 \equiv I_i \quad G_{ij} \equiv -K_{ij} \quad (4)$$

여기서 I_i 는 각 절점에 들어가는 모든 전류의 합을 나타내며 일정한 특성 어드미턴스 Y_0 를 가정하면 FEM요소를 2.1절에서와 같이 노턴 등가회로로 변환할 수 있다.

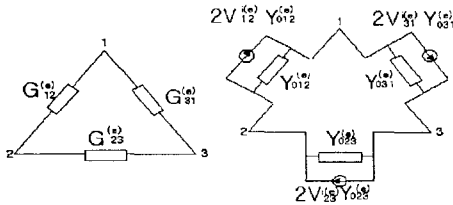


그림 2. FEM 요소의 비선형 저항 회로로의 변환
Fig. 2 Conversion of a FEM Mesh to a Nonlinear Resistive Circuit

이 때, 각 절점에 들어가는 가상전류의 합을 $\{I_i\}$ 라고 하면 요소 행렬 방정식은 식 (5)와 같이 된다.

$$[K_0][A] = [I] + [I_j] \quad (5)$$

이 때 K_0 는 초기 자기 저항률 ν 에 의해 정해지고 모든 반복 계산 과정에서 일정하게 유지된다. 따라서 단지 한 번의 역행렬 계산만이 필요하기 때문에 절점의 개수가 많을 경우 TLM법의 계산 시간은 뉴턴-랩슨의 경우보다 N_{NR} (뉴턴-랩슨 법의 반복 계산 회수) 배 빠르게 된다(2).

3. 3차원 TLM법

자기 벡터 포텐셜을 이용한 3차원 정자계 해석 문제에서 요소 행렬식(element matrix equation)은 식 (6) 과 같이 주어진다.

$$\begin{bmatrix} S_{1,1} & S_{1,2} & \dots & S_{1,j} & \dots & S_{1,12} \\ S_{2,1} & S_{2,2} & \dots & S_{2,j} & \dots & S_{2,12} \\ S_{3,1} & S_{3,2} & \dots & S_{3,j} & \dots & S_{3,12} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{12,1} & S_{12,2} & \dots & S_{12,j} & \dots & S_{12,12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{x1} \\ A_{y1} \\ A_{z1} \\ \vdots \\ A_{x12} \\ A_{y12} \\ A_{z12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{z1} \\ \vdots \\ f_{x12} \\ f_{y12} \\ f_{z12} \end{bmatrix} \quad (6)$$

비선형 정자계 문제를 풀기 위해서는 두 가지 조건이 필요하다. 첫 번째 조건은 FEM요소를 비선형 저항회로로 변환할 수 있어야 한다는 것이고 두 번째 조건은 비선형 컨덕턴스의 값이 각 절점의 포텐셜 차로 나타낼 수 있어야 한다는 것이다.

우선 정의식 (7)에 의해 일반적인 사면체 요소(tetrahedral element)를 그림 3과 같은 비선형 저항회로로 변환할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} A_{x1} & A_{y1} & A_{z1} & \dots & A_{x12} \\ f_{x1} & f_{y1} & f_{z1} & \dots & f_{x12} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} I_{x1} & I_{y1} & I_{z1} & \dots & I_{x12} \\ G_{ij} \equiv -S_{ij} \end{bmatrix} \quad (7)$$

다시 B^2 을 식 (8)과 (9)에 의해 유도된 식 (10)에 의해 각 절점의 포텐셜 차로 나타낼 수 있다. 이렇게 유도된 B^2 에서부터 자기 저항률 ν 의 값을 구하고 이 값은 식 (7)에서의 비선형 컨덕턴스에 포함되므로 비선형 컨

덕턴스를 각 절점 양단의 포텐셜 차로 나타낼 수 있게 된다.

$$N_i = a_i + b_i x + c_i y + d_i z \quad (\text{형상 함수}) \quad (8)$$

$$\sum_{i=1}^4 b_i = \sum_{i=1}^4 c_i = \sum_{i=1}^4 d_i = 0 \quad (9)$$

$$\begin{aligned} B^2 &= |\nabla A|^2 \\ &= - \sum_{i,j \in \Omega_i} (d_i d_j + c_i c_j) (V_{x_i} - V_{x_j})^2 \\ &\quad - \sum_{i,j \in \Omega_i} (b_i b_j + d_i d_j) (V_{y_i} - V_{y_j})^2 \\ &\quad - \sum_{i,j \in \Omega_i} (b_i b_j + c_i c_j) (V_{z_i} - V_{z_j})^2 \\ &\quad + \sum_{i,j \in \Omega_i} (c_i d_j) (V_{z_i} - V_{z_j})^2 \\ &\quad + \sum_{i,j \in \Omega_i} (d_i b_j) (V_{x_i} - V_{x_j})^2 \\ &\quad + \sum_{i,j \in \Omega_i} (b_i c_j) (V_{y_i} - V_{y_j})^2 \end{aligned} \quad (10)$$

2차원 TLM법에서와 마찬가지로 각 절점의 송신 단에서 식(11)이 주어지고 각 절점의 수신 단에서 식(12),(13)이 주어진다. 이 때 식(12)는 식(10)의 각 절점 양단의 포텐셜 값으로 들어간다.

$$n V_{ij} = n V_{ij}^r + n V_{ij}^t \quad (11)$$

$$n V_{Gi} = n V_{ij}^r + n_{i+1} V_{ij}^t \quad (12)$$

$$\begin{aligned} Y_{0ij} (n V_{ij}^r - n_{i+1} V_{ij}^t) \\ = G_{ij} (n V_{G12}, n V_{G13}, \dots, n V_{G11,12}) \cdot (n V_{ij}^r + n_{i+1} V_{ij}^t) \end{aligned} \quad (13)$$

한편 3차원 TLM법에서 생성되는 요소 행렬 방정식은 식(5)와 동일하다. 66 개의 비선형 방정식(13)은 뉴턴-랩슨법과 같은 반복계산에 의해 풀이할 수 있다.

계산 과정을 살펴보면 다음과 같다. 처음 $0V$ 를 0으로 가정하면 가상 전류원 $\{I_i\}$ 가 $\{0\}$ 이 되므로 선형 유한 요소 해석을 하는 것과 같다. 여기서 얻어진 초기 해 $\{A\}$ 에서부터 $0V$ 를 계산하고 식(11)에서부터 $0V$ 를 계산하면 식(13)으로부터 $1V$ 를 구할 수 있다. 따라서 2차원 TLM법에서와 같이 $2Y_{0ij} V_{ij}^r$ 를 계산하여 가상 전류원 $\{I_i\}$ 의 값을 구할 수 있게 된다. 다시 식(5)를 풀면 2회제의 값을 얻을 수 있게 된다. 이와 같은 방법으로 반복 계산을 계속하여 수렴 조건을 만족하는 해를 얻을 수 있다.

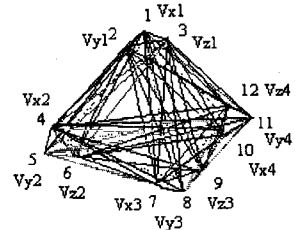


그림 3. 3차원 비선형 저항 회로(66개의 컨덕턴스로 구성, 선 1 개가 하나의 비선형 저항을 나타냄)
Fig. 3 3-D Nonlinear Resistive Circuit

뉴턴-랩슨법의 경우 매 반복 계산 때마다 계 행렬의 역행렬 계산을 위해 LU-decomposition(또는 preconditioning)과정이 필요하지만 TLM법의 경우 일단 한 번의 계산 이후에는 forward, backward substitution (또는 CG iteration)만을 취해주면 되므로 수렴 속도가 훨씬 빨라지게 된다. 식 (10)이나 (13) 등의 계산은 절점의 수가 매우 커질 경우 계 행렬을 계산하는데 걸리는 시간에 비해 크게 문제되지 않기 때문에 3차원 TLM법의 경우에도 2차원 TLM법의 경우

에서와 같이 TLM법이 뉴턴-랩슨 법에 비해 빠른 특성을 가지게 될 것임을 예상할 수 있다.

4. 해석 및 결과

그림 4는 해석에 사용된 코어 모델의 요소 분할을 나타내고 있으며 그림 5는 모델의 단면에서 본 자속의 분포를 보여준다. 수렴 조건은 전 요소에 대해 $|\Delta A| / |A| < 0.01$ 의 조건을 사용하였으며 TLM법을 이용한 해석 결과와 뉴턴-랩슨 법을 이용한 해석 결과는 1% 범위 내에서 완전히 일치하였다. 표 1은 그림 4의 점 A에서의 자속 밀도의 값을 비교한 결과이다. 비선형 물질은 rm14의 데이터를 사용하였다.

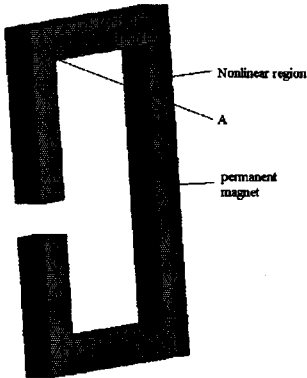
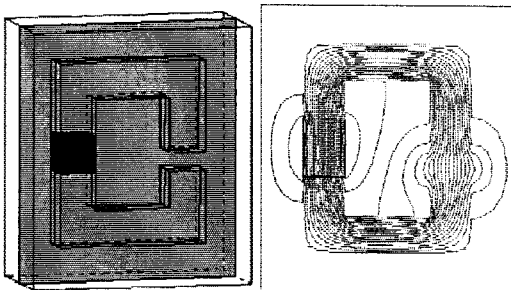


그림 4. 해석 모델(영구자석을 포함함 코어모델)
Fig. 4 Analysis Model



(a) 해석 모델의 단면 (b) 자속 밀도 분포
그림 5. 해석 모델의 단면에 대한 자속밀도 분포
Fig. 5 Cross-Sectional Flux Distribution

표 1. A점에서의 자속 밀도의 값
Table 1 Flux density of a point A

	TLM법	뉴턴-랩슨법
자속 밀도[T]	1.725	1.732

표 1의 결과에서, TLM법을 이용한 해석 결과와 뉴턴-랩슨법에 의한 해석 결과가 거의 일치한 값을 보이며 포화가 일어나는 경우에도 우수한 수렴 특성을 나타냄을 알 수 있다.

TLM법과 뉴턴-랩슨법의 수렴 속도는 절점의 수가 매우 크지 않을 경우에는 역행렬의 계산 이외에도 프로그래밍의 기법이나 데이터 입출력 등에 의해 영향을 받을 수 있으므로 각 부분별 속도 비교를 통해서 TLM법의 수렴 특성을 보이도록 한다. 수렴 속도 비교에는 절점 수가 2630개, 요소 수가 10230개인 모델을 이용하였다. 결과는 표 2에 나타나 있다.

표 2. TLM법과 NR법의 계산 부분별 소요 시간
Table 2. CPU time for both methods

	TLM법	NR법
반복 계산 회수	18회	5회
TLM - 요소별 (13) 식 계산 시간	22초	16초
NR - 요소별 jacobi 행렬 구성 시간		
계 행렬식 풀이 시간 (처음의 반복 계산 이후 과정 - 첫 번째 반복 계산은 공통된 부분임)	15초	38초
계	37초	54초

표 2는 처음의 반복 계산 이후 과정에서 계산 시간이 가장 많이 소요되는 두 부분에 대한 수렴 속도 비교를 나타내었다. 표 2에서 제외된 부분의 계산 시간은 두 방법에서 공통되는 부분이며 표에 나타난 부분에 비해 계산 시간이 상당히 짧기 때문에 비교에서 제외하였다. 표 2로부터 TLM법이 뉴턴-랩슨법에 비해 향상된 수렴 속도를 보임을 알 수 있다.

5. 결 론

본 논문에서는 3차원 비선형 정자계 문제를 해석하는 새로운 방법으로서 3차원 TLM법을 제시하였다. 새로이 제안된 이 방법을 이용함으로써 기존의 뉴턴-랩슨법보다 향상된 수렴 특성을 보장받을 수 있게 되었다. 실제적으로 간단한 모델에 대해 이 방법을 적용하고 뉴턴-랩슨법과의 비교를 통해 방법의 정확성과 빠른 수렴 특성을 보였다.

TLM법을 동특성 해석에 적용하는 것이나 3차원 와전류 문제에 TLM법을 적용하는 것 등이 향후 연구되어야 할 과제이다.

(참 고 문 헌)

- [1] C.Christopoulos, "The Transmission Line Modeling Method: TLM," *IEEE Press*, 1995
- [2] J. Lobry, J. Trecat, and C. Broche, "The Transmission Line Modeling(TLM) Method as a New Iterative Technique in Nonlinear 2D Magnetostatics," *IEEE Trans. on Magn.*, Vol.32, No.2, pp.559 - 566, 1996
- [3] R E Knight and T J Flack, " Exploitation of Symmetry in 2-Dimensional, Finite-Element, Time-Domain Modeling of Induction Motors," *Proceedings of ICEM*, pp1413 - 1416, 1998
- [4] J. Lobry, J. Trecat, and C. Broche, "Symmetry and TLM Method in Nonlinear Magnetostatics," *IEEE Trans. on Magn.*, Vol.32, No.3, pp.702 - 705, 1996
- [5] O.A.Mohammed, "Magnetic Vector Potential Based Formulation and Computation of Nonlinear Three Dimensional Magnetostatic Field and Forces in Electrical Devices by Finite Elements," Ph.D. Thesis in Virginia Polytechnic Institute and State University, 1983
- [6] 임창환, 김홍규, 이창환, 정영교, '이방성과 비선형성을 고려한 삼상 변압기의 TLM-FEM해석', 제 3회 전력기기 symposium 논문집, pp.119 - pp.122, 1999년 4월
- [7] 임달호, '유한요소법', 명성출판사