

운동자계문제의 해석을 위한 유한요소법에 관한 연구

*한필완, 이 주
 한양대학교 전기공학과 에너지 변환연구실.

Travelling Magnetic Field Problem Analyses by Finite Element Method

*Pil-Wan Han and Ju Lee
 Dept. of Electrical Engineering, Hanyang University, Seoul, 133-791, Korea

Abstract- This paper presents Galerkin- and Upwind-finite element analyses solution in the travelling magnetic field problem. The travelling magnetic field problem is subject to convective-diffusion equation. Therefore, the solution derived from Galerkin-FEM with linear interpolation function may oscillate between the adjacent nodes. A simple model with Dirichlet, Neumann and periodic boundary condition respectively, have been analyzed to investigate stabilities of solutions. It is concluded that the solution of Galerkin-FEM may oscillate according to boundary condition and element type, but that of Upwind-FEM is stable regardless boundary condition.

1. 서 론

전자계를 이용하여 에너지 변환을 하는 기계에서는 상대운동에 의해 속도기전력이 발생하는 장이 존재하며 이러한 속도기전력문제는 1계미분(속도기전력항)과 2계미분 항을 포함하는 지배방정식을 가진다. 특히 고속회전을 하는 회전기 및 철도분야의 와전류 브레이크등의 설계를 위해서는 속도기전력 문제를 정확히 해석하여 기기의 성능을 예측하는 기술이 요구된다.

1계미분항으로 표현되는 속도기전력항을 포함하는 문제를 Galerkin법으로 해석할 경우 도전을, 투자율, 속도 및 요소의 크기에 따라 결정되는 pecllet number에 따라 해가 오실레이션할 수 있으므로 해의 안정성이 떨어지게 된다. 이러한 해의 불안정성을 해결하기 위하여 유체역학 분야에서는 여러 가지의 up-wind기법이 제안되어 유체해석에 이용되고 있다.

본 논문에서는 속도기전력문제에서 요소형상, 요소의 크기 및 경계조건에 따른 Galerkin법과 up-wind법의 해의 안정성에 관하여 고찰하였다. 요소형상으로는 직사각형 요소와 삼각형 요소를 사용하여 각각의 경우에 대한 해의 안정성을 검토하였으며, 또한 고정경계조건, 자연경계조건, 주기경계조건에 대한 해의 안정성을 포텐셜 및 힘의 크기를 검토하였다.

2. 지배방정식 및 해석모델

2.1 지배방정식

상대운동을 수반하는 계에 대하여 2차원 지배방정식을 유도하면 식 (1)과 같다.

$$\frac{1}{\mu} \left[\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} \right] = -J_0 + \sigma v_x \frac{\partial A_z}{\partial x} \quad (1)$$

여기서, A는 자기벡터 포텐셜을 나타내고, J₀는 계자 전류밀도, σ는 도전율, μ는 투자율, v_x는 자계의 x방향

으로의 운동속도이다.

식 (1)에 1차 삼각형 요소를 사용하여 Galerkin법에 의해 정식화하면 식 (2)와 같다.

$$\frac{1}{\mu} \int_{\Omega'} \sum_{j=1}^3 \left\{ \frac{\partial N_{ie}}{\partial x} \frac{\partial N_{je}}{\partial x} + \frac{\partial N_{ie}}{\partial y} \frac{\partial N_{je}}{\partial y} \right\} A_{je} ds + \sigma v_x \int_{\Omega'} \sum_{j=1}^3 N_{ie} \frac{\partial N_{je}}{\partial x} A_{je} ds - J_0 \int_{\Omega'} N_{ie} ds = 0 \quad (2)$$

여기서, N_{ie}는 삼각형 요소의 선형 1차 보간함수이고, N_{je}는 형상함수이다.

또한 식 (1)을 1차 직사각형요소를 사용하여 up-wind 기법에 의해 정식화하면 식 (3)과 같다.

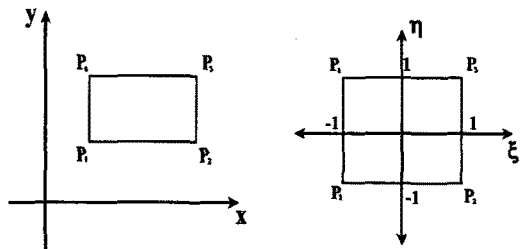
$$\frac{1}{\mu} \int_{\Omega'} \sum_{j=1}^4 \left\{ \frac{\partial R_{ie}}{\partial x} \frac{\partial L_{je}}{\partial x} + \frac{\partial R_{ie}}{\partial y} \frac{\partial L_{je}}{\partial y} \right\} A_{je} ds + \sigma v_x \int_{\Omega'} \sum_{j=1}^4 R_{ie} \frac{\partial L_{je}}{\partial x} A_{je} ds - J_0 \int_{\Omega'} R_{ie} ds = 0 \quad (3)$$

여기서, R_{ie}는 직사각형 요소의 up-wind 보간함수이고, L_{je}는 형상함수이다. 직사각형 요소를 그림 1에서와 같이 x-y 좌표계에서 ξ-η의 무차원 좌표계로 변환하면 그 값은 식 (4), (5)와 같다.

$$R_{ie} = \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi - 2\alpha F(\xi)) (1 + \eta_j \eta) \quad (4)$$

$$L_{je} = \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_j \eta) \quad (5)$$

여기서, F(ξ)와 pecllet number에 의해 결정되 up-wind factor α는 J. C. Heinrich[1]에 의해 제안된 값을 사용하였고 각각 식 (6), (7)과 같다.



(a) x-y 좌표계 (b) 무차원 좌표계

그림 1. 요소의 좌표 변환

해석모델로서 x방향의 속도만을 갖는 모델을 사용할 경우 식(4)에서와 같이 x방향(ξ 방향)으로만 up-wind를 적용시키면 된다.

식(4)에서 α 를 0으로 두면 직사각형 요소에 대한 선형 일차보간함수가 되어 식(3)의 Galerkin법에 의한 정식 결과와 같게 된다.

식(8)은 Peclet number를 구하는 식이다. 여기서 σ 레일의 도전율, μ 는 투자율, v_x 는 전자석의 운동속도, 그리고 h 는 x방향(운동방향)으로의 요소의 크기를 나타낸다.

$$F(\xi) = 3(1 - \xi^2)/4 \quad (6)$$

$$\alpha = \coth\left(\frac{Pe}{2}\right) - \frac{2}{Pe} \quad (7)$$

$$Pe = \sigma \mu v_x h \quad (8)$$

2.2 해석모델

그림 2는 요소의 형태 및 경계조건에 대한 해의 안정성을 검토하기 위한 모델로서 전자석이 x방향으로 일정한 속도로 운동하고 레일에 속도기전력에 의한 와류가 발생한다.

그림 3은 해석모델의 요소분할 그림이다. (a),(b)는 각 삼각형요소 및 직사각형요소로 분할된 요소분할도이다. 이때 Pe 는 $5637(\sigma = 0.157 \times 10^7, \mu = 1000 \times 4\pi, v_x = 100\text{m/s}, h = 0.028\text{m})$ 이다.

3. 해석결과 및 검토

본연구에서는 그림 2의 모델에 대하여 고정경계조건, 자연경계조건, 주기경계조건에 대한 다음의 3가지방법에 의해 유한요소해석을 수행하였다.

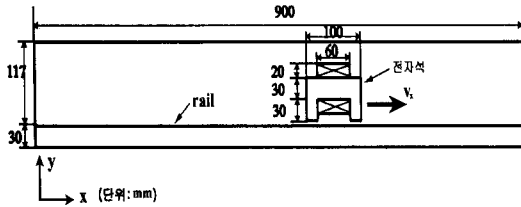
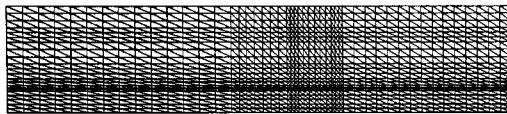
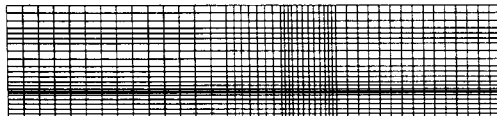


그림 2. 해석모델



(a) 삼각형요소



(b) 직사각형요소

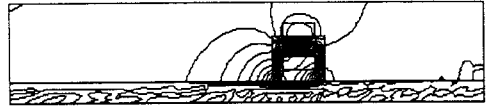
그림 3. 요소분할 모델

◆방법 1: 삼각형요소, Galerkin법

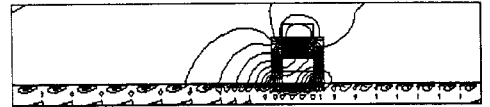
◆방법 2: 직사각형요소, Galerkin법

◆방법 3: 직사각형요소, Up-wind법

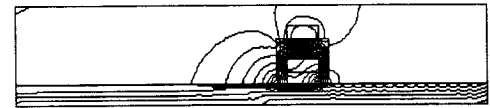
그림 4,5,6은 경계조건에 따른 각방법에 의해 해석된 자속분포도이다. 그림 4는 해석모델의 4개의 경계면에 고정경계조건을 적용시켜 위의 세 가지 방법으로 해석했을 때 자속분포도이다. 그림(a)와 (b)는 각각 방법 1과 2를 적용시킨 결과 자속분포도에 비정상적인 맴돌이가 발생하는 것을 알 수 있다. 이것은 인접한 절점사이에서 자기벡터 포텐셜이 오실레이션하기 때문에 일어나는 현상이다. 그림(c)는 방법 3에 의한 해석결과로써 레일부분의 포텐셜의 오실레이션이 억제되어 해가 안정함을 알 수 있다.



(a) 방법 1

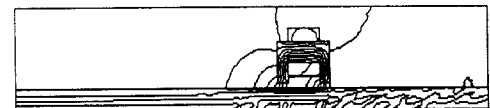


(b) 방법 2

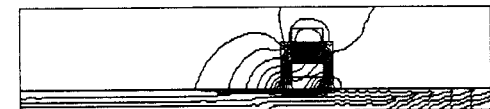


(c) 방법 3

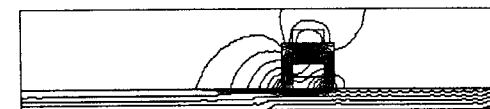
그림 4. 고정경계조건 문제



(a) 방법 1

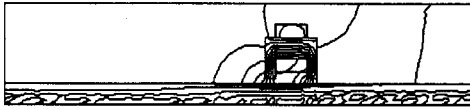


(b) 방법 2



(c) 방법 3

그림 5. 자연경계조건 문제



(a) 방법 1



(b) 방법 2

그림 6. 주기경계조건 문제

그림 5는 전자석의 운동방향과 반대 쪽의 면에 자연 경계조건을 적용시키고 나머지 면에는 고정경계조건을 적용시켜 3가지의 방법으로 해석한 결과이다. (a)와 (b)에서 자연경계조건을 적용시킴으로써 자속의 맴돌이 현상이 줄어들 것을 알 수 있다. (c)는 up-wind법을 적용시킨 결과로써 고정경계조건을 준 경계면 쪽에서도 자속의 맴돌이가 없어지는 것을 볼 수 있다.

그림 6은 해석모델의 양 옆면에 주기경계조건을 적용하였을 경우이다. (a),(b) 모두 Galerkin법으로 해석한결이지만 (a)의 경우 비정상적인 자속분포가 발생하지만 (b)의 경우는 이러한 비정상적인 자속분포가 없어지는 것을 볼 수 있다.

그림 7은 고정경계조건을 적용하여 해석한 경우 rail 중앙에서의 자기벡터 포텐셜 그래프이다. 방법 1과 2를 적용한 경우 해의 오실레이션이 발생하지만 방법 3을 적용한 경우 해의 오실레이션이 없어지는 것을 알 수 있다. 그림 8과 9는 자연경계조건과 주기경계조건을 적용하였을 경우 레일 중앙에서의 자기벡터 포텐셜의 그래프이다. 삼각형요소를 사용한 경우가 직사각형요소를 사용한 경우보다 오실레이션이 심하게 일어나는 것을 볼 수 있다.

그림 10은 고정경계조건을 적용하였을 때 속도에 따른 힘특성이다. 방법 1을 적용시킨 경우는 방법 3을 적용시킨 경우보다 힘이 최대 14%정도 크게 계산되며 방법 2의 힘이 최대18%정도 크게 계산됨을 알 수 있다.

4. 결론

본 논문에서는 속도기전력을 포함하는 운동자계문제를 Galerkin법과 up-wind법을 적용시켜 해석하였다. 그 결과 Galerkin법으로 해석할 경우 경계조건과 요소형상에 따라 해가 오실레이션하지만 Up-wind법으로 해석할 경우 경계조건에 관계없이 오실레이션이 억제되어 안정한 해를 얻을 수 있음을 확인하였다.

(참고문헌)

- [1] J. C. Heinrich, P. S. Huyakorn and O.C Zienkiew "up-wind finite element scheme for two-dimen convective transport equation", International Jour Numerical Methods in Engineering, vol. 11, pp.131-14
- [2] T. Furukawa, K. Kbmiya, I. Muta, "An U Galerkin Finite Element Analysis of Linear Ind Motor", IEEE Trans on Magn, vol.26, No.2,pp.662-66
- [3] M. Ito, T.Takahashi, M. Odamura, "Up-wind element solution of travelling magnetic field problems Trans on magn, vol.28, No.2, 1992

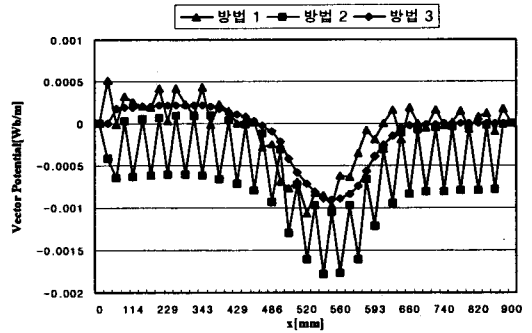


그림 7. 벡터포텐셜 분포(고정경계조건)

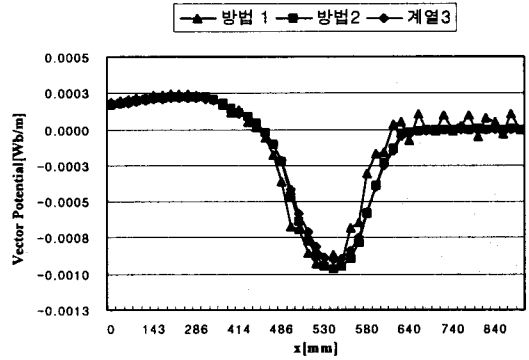


그림 8. 벡터포텐셜 분포(자연경계조건)

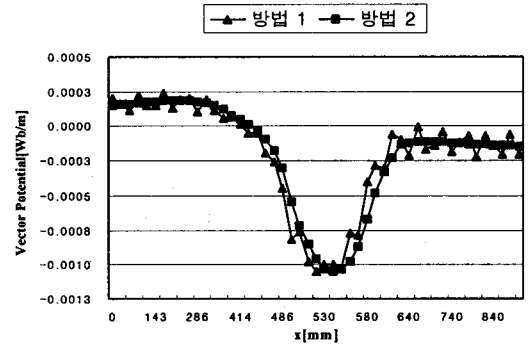


그림 9. 벡터포텐셜 분포(주기경계조건)

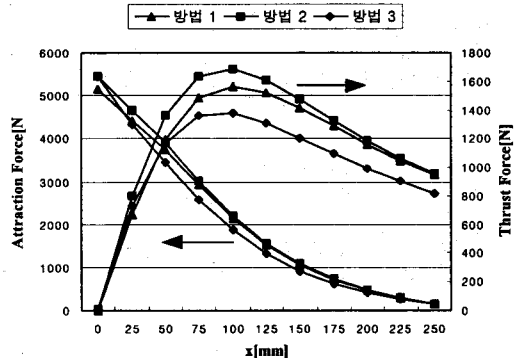


그림 10. 속도에 따른 힘특성