

Wavelet의 다중 분해능 특성을 응용한 DC 탐침 전기 비저항 역산 기법 연구

박 승배, 이 창환, 정 현교
서울대학교 전기공학부

Electric Resistivity Reconstruction
Using Multi-Resolution Property of Wavelet

Seung-Bae Park, Chang-Hwan Lee, Hyun-Kyo Jung
Seoul National University

Abstract - So far, The methods for identifying the parameters of some region or material have been developed. This paper describes a new method for electric resistivity reconstruction using multi-resolution property of wavelet. The outputs of the potential electrodes are computed using two dimensional FEM in the wave number space by Fourier transforming the governing equation. The resistance distribution in the region of interests, which makes the computed potential distribution coincide with the measured potential, is found by minimizing the objective function using an optimization method. Multi-resolution analysis introduced in this paper will be proved to be the proper method in the viewpoint of effectivity and time-consuming by the numerical results.

1. 서 론

지하 공간에서 존재하는 균열대의 분포 상황을 규명하기 위해서 여러 가지 탐사기술이 연구되어 왔다. 특히 정밀한 수준의 예측 기술이 요구되는 곳에는 최근 많이 연구되고 있는 전자파 분산 기법[1]이 있고, 근래에까지 많이 연구되고 있는 직류 탐침을 직접 전류전극에 연결하여 대응되는 전위전극의 값을 측정함으로써 내부의 물질분포를 파악하는 방법 등 여러 가지 방법이 있다. 후자를 전기 비저항 탐사법(ERT)라고 한다[2,3,4], ERT의 성능은 주로 역산기법에 의해 결정된다. 역산방법으로는 SVD(singular value decomposition)의 직접법이나, 다양한 알고리즘을 이용한 간접법으로 풀 수 있다. 이 논문에서는 간접법을 채택한다. 간접법은 결국 목적함수를 최소화시키는 최적화문제로 귀결하는데 따라서 최적화 알고리즘에 의해 성능이 결정된다고 할 수 있다. 이전의 논문에서는 유한요소법을 이용하여 계산되어진 민감도 계수와 일반적인 최적화 기법을 적용시켜서 물질분포를 추정하였다.[2,3,4] 이 논문에서는 이 알고리즘에 안정성과 부적합성을 개선할 수 있는 웨이블렛의 다중 분해능 특성을 이용하여[5], 변수의 개수를 줄이고 역산의 효율을 개선할 수 있는 새로운 알고리즘을 제시한다.

2. 지배방정식과 알고리즘

2.1 지배방정식

전기 전도도를 물질상수로 갖는 유한요소 정식화를 하기 위한 맥스웰 방정식은 다음과 같이 정리될 수 있다.
등방성의 매질내에서 Ohm의 법칙에 의해 식(1)로 기본 방정식을 쓸 수 있다.

$$\nabla \times \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \delta(x_s)\delta(y_s)\delta(z_s) \quad (1)$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (2)$$

$$\nabla \vec{\phi} = -\vec{E} \quad (3)$$

식 (1)은 전하보존의 법칙이다. 식 (1),(2),(3)을 조합하면 정전장,정자장과 유사한 지배 방정식 (4)를 얻을 수 있다.

$$\nabla \times \sigma \nabla \phi = \frac{\partial \rho}{\partial t} \delta(x_s)\delta(y_s)\delta(z_s) = I \delta(x_s)\delta(y_s)\delta(z_s) \quad (4)$$

여기서 E는 전기의 세기, J는 전류밀도, V는 스칼라 포텐셜, σ는 전도도, ρ는 체적 전하 밀도, I는 그 점에서 미소 체적내로 주입되는 총 체적 전류밀도, δ(x)는 델타(dirac delta) 함수이다.

본래 모델은 3차원이므로 3차원 FEM을 시행해야 하지만 2차원 축으로 매질이 일정하다 가정하고 3차원을 2차원화 시킨다. 즉 다시 말해 x,z축과 관계된 영역만으로 변환시키고 y축은 파수 Ky 영역으로 Fourier 변환시켜 적분함으로써 원래의 공간에서의 전위값을 알 수 있게 된다. 이렇게 바꾸는 이유는 간접법은 많은 계산을 수행해야 하므로 계산시간을 최대한 줄이기 위한 목적에서이다. Fourier 변환과 그 역변환은 다음과 같다.

$$\phi(x, K_y, z) = \int_0^\infty \phi(x, y, z) \cos(K_y y) dy \quad (5)$$

$$\phi(x, y, z) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \phi(x, K_y, z) \cos(K_y y) dK_y \quad (6)$$

여기서 φ, ψ는 y축에서 우함수이다.(5)(6)의 변환에 따라 2차원 전도도 σ(x,z)가 분포되어 있는 공간에서 (Xs,Ys,Zs)위치의 점전원에 의한 3차원 전위분포 φ(x,y,z)는 2차원으로 변환된 ψ(x,Ky,z)로 바뀌어 진다. 따라서 우리가 FEM으로 풀어야 할 지배방정식은 다음과 같이 바뀐다.

$$-\nabla \cdot (\sigma(x, z) \nabla \psi(x, K_y, z)) + K_y^2 \sigma(x, z) \psi(x, K_y, z) = Q \delta(x - x_s) \delta(z - z_s) \quad (7)$$

여기서 Q는 I/2A이고 I는 입력 전류이고 A는 도선의 단면적이다. 보통 이러한 문제의 경계 조건을 주기가 다소 까다롭다. 먼저 전류가 통과할 수 없는 부분은 Homogenous Neumann 경계조건을 준다. 그리고 Dirichlet 경계조건은 우리의 관심영역에 대하여 아주 먼 곳에 대한 경계 조건으로 그 때는 0의 값을 임의로 설정할 수 있다. 또한 오차를 줄이기 위해 0차의 bessel 함수로 근사한 경계조건도 [2]에서 볼 수 있다. 이 경우는 Neumann과 Dirichlet 조건이 혼합되어 있으므로 Mixed

경계조건이라 할 수 있다.

경계조건을 적절히 준 다음 FEM을 풀어서 나온 결과는 Ky 공간에서 푼 결과이다. 따라서 실제의 전위값과 대응시키기 위해서 식(6)을 사용하여 역변환 해야 한다. Ky가 연속적인 선형요소들로 나누어 지고 Ky 영역에서의 함수가 좁은 구간에서 선형적으로 변한다고 가정하면 $\phi(x,y,z)$ 는 다음 식으로 표현된다.

$$\begin{aligned} \phi(x,y,z) &= \frac{2}{\pi} \sum_{i=0}^L \int_{k_i}^{k_{i+1}} \psi(x, k_y, z) \cos(k_y y_0) dk_y \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{i=0}^L D_i(y_0) \psi(x, k_y, z) \end{aligned} \quad (8)$$

여기서 L은 적분요소의 개수이고 Di는 i 번째 요소의 적분값(사다리꼴의 넓이)이다.

2.2 최적화 알고리즘

ERT 시스템에서 알고자 하는 것은 전류전원에 대해 측정된 전위분포를 나타내는 전기 비저항의 분포이다. 따라서 이 전위분포는 전기 비저항의 함수로 표현할 수 있다. 일반적으로 목적함수는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} F &= F[p_i, X(p_i)] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\phi_{p_i,j}(r_j) - \phi_{p_i,0}(r_j))^2 \end{aligned} \quad (9)$$

이 논문에서의 지배방정식은 Fourier Domain 상에서의 FEM 적용이므로 목적함수도 다소 복잡하다.

p는 각 전류전극 배치에 관계된 수이다. 그리고 j는 전위전극의 배치와 관계된 수이다. 또한 r은 각 전위 전극의 위치에 대한 정보를 나타낸다.

여기서 p_i 는 물질변수 벡터이고 $X(p_i)$ 는 상태변수 벡터이다. 민감도는 물질변수의 변화에 대한 목적함수의 변화로 정의하였기 때문에 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{dF}{d[p_i]} = \frac{\partial F}{\partial [p_i]} + \frac{\partial F}{\partial [X]} \frac{d[X]}{d[p_i]} \quad (10)$$

여기서, $\frac{d[X]}{d[p_i]}$ 는 물질변수에 대한 상태변수의 변화율을

의미한다. 위의 과정을 통해 얻은 각 변수에 대한 민감도를 이용, 물질변수들 각각의 최적점을 찾기 위해 최대경사법을 적용한다. 최대 경사법은 무엇보다도 속도가 빠르고 구현이 간단하다. 또한 이 논문에서의 구현하고자 하는 적은 수의 변수에 대한 비선형 최적화에 적합한 알고리즘이다.

2.3 웨이브렛의 적용

이러한 역산문제에서 가장 문제가 되는 것이 부적합성(illposedness)이다. 측정 데이터의 수는 일정하지만 구해야 하는 물질 상수의 값은 무한한 자유도를 가지기 때문에 물질상수의 분포를 유일하게 결정할 수 없다는 문제점이 발생할 수 있다. 이러한 문제를 해결하기 위한 몇 가지 기법들이 존재하지만 여기서는 웨이브렛함수를 기저함수로 하는 보간법을 사용하였다. 보간법을 사용하여 기저함수로 나타낸 전도도 분포함수는 다음과 같다.

$$\sigma(x,z) = \sigma_0 - \sum_{k=0}^N c_k(x,z) w_k(x,z) \quad (9)$$

여기서, σ_0 는 정해진 전도도의 기준값이고, $c_k(x,z)$ 는 웨이브렛 계수, $w_k(x,z)$ 는 N 개의 유한한 차원을 가

지는 웨이브렛 기저함수이다. 역산 문제를 풀기 위해서는 여러 가지 사전 정보를(priori knowledge) 사용해야만 한다. 본 논문에서는, 전도도 변화는 공간적으로 한정된 영역에서만 생겨난다고 가정을 사용하였다. 전도도 값은 대부분의 영역에서는 일정한 값을 가지며, 일정하게 제한된 영역에서만 변화하는 분포 형태를 갖게 될 것이다. 이런 경우에는 일정한 전도도를 갖는 대부분의 영역에는 낮은 분해능을 사용하고, 급격히 민감도 차이를 보이는 영역에는 고 분해능을 사용하는 다중 분해능 해석 방법을 사용하면 효과적으로 변수의 개수를 줄일 수 있다. 웨이브렛 함수는 이러한 다중 분해능을 방법을 사용하여 적용적으로 해석하는데 매우 효과적이다. 웨이브렛 기저함수로 Haar 함수를 채택하였는데 이유는 구현이 간단하고 물질분포를 불연속으로 가정했기 때문에 그러한 함수를 보간하기 위해서는 Haar 함수가 적합하다..

2.4 최종적인 알고리즘

최종적으로 기존의 민감도와 결합된 역산과 웨이브렛을 다중분해능 특성을 결합하면 효과적인 역산이 가능하다. 그에 대한 순서는 다음과 같다.

- 1) 임의의 초기 크기 수준 j를 정하여, 스케일링 함수(Scaling)를 이용하여 유전율 분포 함수를 보간한다.
- 2) 계수 벡터의 초기치를 가정한다.
- 3) 시스템 방정식을 푼다.
- 4) 보조 변수 방정식을 푼다.
- 5) 민감도를 계산한다.
- 6) 만족할만한 결과를 얻을 때까지 계수 벡터를 변화시키며 과정 2)-5)를 반복한다.
- 7) 과정 2) - 6)을 통해 얻은 유전율 분포 함수에서 급격한 변화가 발생한 영역을 확인한다.
- 8) 발견된 영역에 대해 분해능을 높여 주기 위하여 그 영역에 대한 웨이브렛 함수로 사영한 항을 기존의 보간 함수에 더해준다.
- 9) 새로 더해진 항의 계수 벡터를 2)-6) 과정을 반복하여 구한다. 이 때 기존에 구해진 계수 벡터 값은 보존된다.
- 10) 7)-9) 과정을 반복하여 수행하여 최종적인 유전율 분포 함수를 복원한다.

여기서 문제가 되는 것이 과정 7)이다. 이는 다른 영역에 비해 민감도가 큰 영역을 확인하는 것인데 불연속적인 물질 분포공간이 단일 구간이라는 가정이 들어가 있다. 이 단계에서 전체 목적함수가 더 이상 줄어들지 않고 또한 우리가 원하는 수준만큼 도달하지 않았을 때 분해능을 민감한 부분에 한해 올려주는 것을 의미한다.

3 실제 모델과 해석 결과

실제로 ERT의 직접적인 모델을 수치적으로 모델링하기는 상당히 어렵다. 외부의 간섭이 심하고 또한 전위전극 간의 간섭도 무시할 수 없기 때문이다. 따라서 실제적인 계산치 만으로 물질 분포를 정확하게 추정하기는 매우 어렵다. 여기서 알고리즘의 유용성을 증명하기 위해 실험실 수준의 모델(그림 1)을 제시한다. 2개의 수조통이 있고, 바깥 통에는 전도도 7.22×10^3 mho/m, 안쪽 통은 3.57×10^3 mho/m의 소금물을 넣었고, 전류전극이 16개,

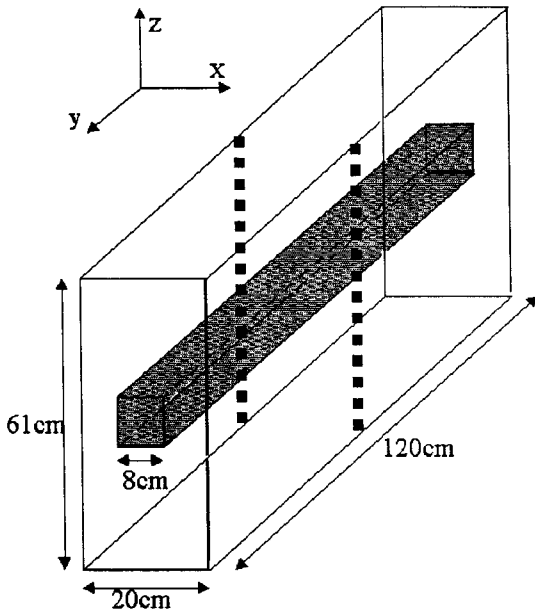


그림 1 실제 모델

전위 전극이 16개 있다. 전류는 5mA씩 전극을 옮겨 가면서 상대적인 전위를 측정한다. 따라서 수치해석상에서도 Dirichlet 경계조건을 첫 번째 전위전극에 주어야 한다. 왜냐하면 그렇지 않으면 보조 변수 식의 해가 비슷하게 나와서 민감도 계산값이 너무 작아지므로 변화량을 추정할 수가 없다. y 방향의 Fourier 변환이 가능하도록 기준이 되는 면(중앙의 점선)에서 전류의 값을 작게 제한하였다.

3차원 모델이지만 Fourier 변환으로 $y=0$ 즉 $(x,0,z)$ 평면 상에서의 전위값을 쉽게 앞의 정식화로 구해낼 수 있다. 2차원 FEM에서 삼각형 요소수는 3282개, 절점수는 1260개로 해석하였다.

첫 번째 웨이브렛 기저함수(V_1)로 근사했을 때의 구간영역과 물질분포를 추정해 가는 정도를 나타낸 결과이다.

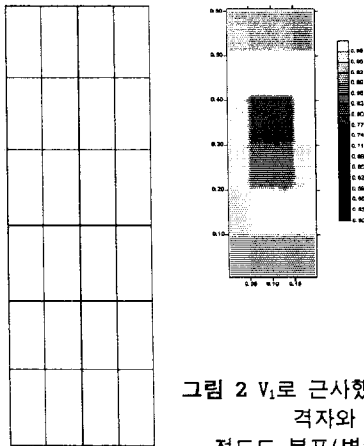


그림 2 V_1 로 근사했을 경우의 격자와 전도도 분포(변수 24개)

다음은 두 번째 웨이브렛 기저함수(V_2)로 근사했을 때의 구간영역과 물질분포를 추정해 가는 정도를 나타낸 결과이다.

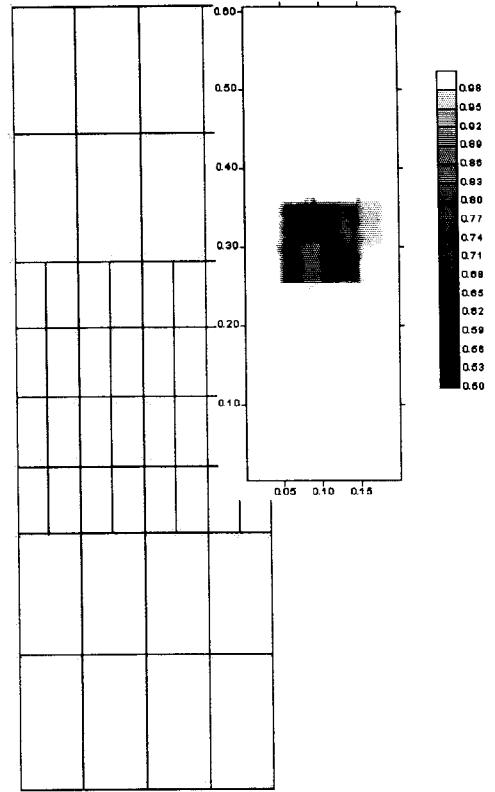


그림 3 V_2 로 근사했을 경우의 격자와 전도도 분포(변수 24+32=56개)

목적 함수 수렴 양상

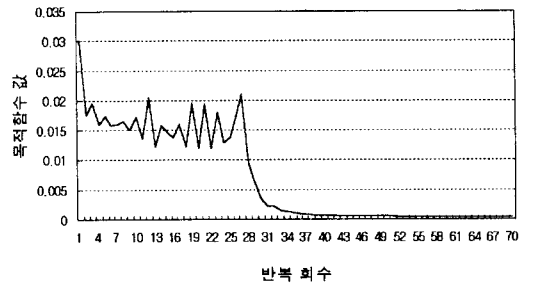


그림 4 목적함수 수렴 양상

위의 해석에서 편의상 초기 기준값으로 표준화한 수치를 그림을 통해 나타내었다. 이 같은 모델에서 요소 각각의 물질값을 전부 변수로 하지 않고 구간을 나누어서 변수화하는 것이 훨씬 효율적임을 확인할 수 있다.

다음 그림은 목적함수의 수렴양상을 나타낸 것이다. 격자마다의 물질상수 모두를 변수로 설정하지 않았으므로 목적함수 수렴의 한계가 첫 번째 수준으로 근사했을 때는 존재한다. 즉 아래 그림에서 26번째 반복까지가 첫 번째 수준으로 근사했을 경우이다. 더 이상의 감소가 존재하지 않음을 확인한 후 그림 2에서 볼 수 있듯이 민감한 영역 근방에 웨이브렛 계수와 기저함수를 추가하여 다시 최적화 알고리즘에 적용하였다.

4 결 론

기존의 FEM을 이용한 역산에서 민감도를 이용한 경우는 상당히 많이 연구되어왔다. 여기서 우리는 많은 변수 때문에 생기는 불안정성과 부적합성을 개선하기 위해 다중 분해능 웨이브렛을 이용하여 변수의 개수를 줄여나감으로써 적용적으로 해석하는 방법을 제시하였다. 최적화 알고리즘은 적용이 간단하고 빠른 최대 경사법을 사용하였고 여기서는 단 두 번째 수준만으로 목적함수의 임계치에 도달함을 볼 수 있었다. 물질 값의 연속성보다는 불연속한 매질이나 좁은 영역에서의 불연속성을 지닌 매질일 경우 해석이 정확하며 적용이 용이한 알고리즘임을 보였다. 따라서 크랙의 형태나 위치를 찾는 비파괴 검사 등에 많은 응용과 적용 가능성이 있음을 확인하였다..

(참 고 문 헌)

- [1]Ioannis T. Rekanos "Inverse Scattering Using the Finite-Element Method and a Nonlinear Optimization Technique"*IEEE Trans on Micro Theory Tech.*vol 47, No.3, March 1999
- [2] A.Dey and H.F.Morrison,"Resistivity modeling for arbitrarily shaped two-dimensional structures,"*Geophys. Prosp.*, Vol27,pp.106-136 ,1979
- [3] W.Daily and E.Owen. "Cross-borehole resistivity tomography,"*Geophysics*, Vol.56,No.8, pp.1228-1235,1991
- [4] Chang seop Koh and Min-kyu Kim ,Hyun-kyo Jung and Song-yop Hahn and Back-soo Duh "Electric Resistivity Tomography for Geophysical Inverse Problems, CEFEC March Japan,1996
- [5] 조정균 ,"웨이브렛을 이용한 결함규명문제의 다중분해능 해석" 서울대 전기 공학부 석사학위 논문,1999.