

## 유한요소법과 경계요소법의 교호적용에 의한 무한영역해석

임지원  
경문대학 전기과

### A Numerical Calculation of Open Boundary Problem by Applying FEM and BEM Alternately

Jee-won IM  
Kyungmoon College

**Abstract** - The finite element method (FEM) is suitable for the analysis of a complicated region that includes nonlinear materials, whereas the boundary element method (BEM) is naturally effective for analyzing a very large region with linear characteristics. Therefore, considering the advantages in both methods, a novel algorithm for the alternate application of the FEM and BEM to magnetic field problems with the open boundary is presented. This approach avoids the disadvantages of the typical numerical methods with the open boundary problem such as a great number of unknown values for the FEM and non-symmetric matrix for the Hybrid FE-BE method. The solution of the overall problems is obtained by iterative calculations accompanied with the new acceleration method

#### 1. 서 론

일반 회전기는 고정자계철기 기기를 감싸는 구조로 되어 있지만, 리니어모터 및 자기부상문제 등과 같이 노출된 상태의 기기에서는 기기의부의 누설자계가 문제로 되는 경우가 많다. 이러한 시스템의 외부누설자계의 계산정도를 수치적으로 높게 산정하려면 필연적으로 넓은 해석영역이 필요하다. 일반적으로 와전류와 자성재료의 포화가 개존하는 현상에 관한 자체해석에는 최종매트릭스 처리에 우수한 특성을 가진 유한요소법이 최적으로 생각되지만, 넓은 해석영역을 필요로 하는 외부누설자계의 해석에는 막대한 미지수의 요구와 동시에 계산용량·시간의 증가가 따른다. 또한 경계조건에 의한 약간의 근사오차도 수반하게 된다. 한편 무한영역해석에 효과적인 유한요소·경계요소병용법은 광대한 영역의 해석에 필요한 미지수의 개수를 삭감할 수 있는 장점을 가지고 있지만, 최종매트릭스가 경계요소법의 적용에 의해 처리가 어렵게 되는 결점을 가진다. [1], [2]

여기서 필자는 이전, 유한요소법이 가진 매트릭스 처리에 관한 우수한 특성을 유지한 채 경계요소법의 도움을 빌려 반복계산을 행하는 유한요소법과 경계요소법의 교호적용법을 제안하였다. 유한요소법의 작은 해석영역을 가지고 조밀한 요소분할에 의해 높은 계산정도를 얻을 수 있는 수법이다. 이 연구에서는 기본적인 정자계모형을 해석대상으로 교호적용법에 의해 해석을 행하여 기준수법(유한요소법, 유한요소·경계요소병용법)과 비교·검토를 함으로서, 제안수법의 유효성 및 타당성을 확인하였다. [3]

따라서 본 논문에서는, 와전류장이 포함된 무한영역을 해석대상으로 상기수법을 적용·검토한다. 본 논문의 일관된 입장은 계산시간보다 계산정도의 향상을 목적으로 한다.

#### 2. 무한영역해석에 관한 문제점

##### 2.1 유한요소법

전자기현상은, 그 영향이 본질적으로 무한대에 미친다. 이러한 무한영역문제를 수치적으로 풀려면 많은 연구가 필요하다. 그러나 이러한 연구의 진행에는 많은 단점이 수반된다. 예로서 2차원문제에 있어 고찰물리량으로서 자기벡터포텐셜을 채용한다면, 외부영역의 자기벡터포텐셜은 중심으로부터 점점 감소해간다. 따라서 중앙부의 자기벡터포텐셜을  $A_0$ 라 하면 그것은 무한대를 향해 그림 2.1의 굵은 선과 같이 감소해간다. 유한요소법은 영역법이기 때문에 그대로는 "무한영역의 해석은 불가"라고 하는 숙명을 지닌다.

이러한 단점의 대표적인 타개책으로서 외부경계설정법이 있다. [4] 이것은 중핵영역으로부터 충분히 멀어진 위치에 원방경계를 설정하고 그곳에 적절한 경계조건을 설정하는 것이다. 일반적으로 중핵영역의 약 6배가 되는 거리( $r_F$ )의 경계에서 자기벡터포텐셜  $A$ 를 0으로 설정해서 해석을 행하면 좋다고 말하여지고 있다. [4] 그 해는 정해와 비교하여 약간의 근사오차가 수반된 그림 2.1의 얇은 선과 같이 얻어지게 된다. 따라서 유한요소법에 의한 무한영역해석에서는 대단히 큰 해석영역을 필요로 하고 동시에 방대한 개수의 미지수 (방대한 계산용량)가 요구되며, 약간의 근사오차도 수반되는 것을 예측할 수 있다.

##### 2.2 유한요소·경계요소병용법

유한요소·경계요소병용법은 유한요소법에 관한 무한영역해석의 단점을 보완하기 위하여 무한영역을 경계요소법에 맡기는 병용적 해법이다. 경계요소법은 유효성이 선형문제에 한정되는 것으로, 장의 지배방정식을 만족하는 기본해를 이용해서 미분방정식을 경계적분방정식으로 변환하기 때문에 고찰영역의 경계만으로 착목해서 해석이 가능하다. 따라서 공기영역과 같은 선형문제에 대한 강력한 해석수법이 된다. 이와같이 해석영역에 따라 각각의 장점을 발휘하는 유한요소·경계요소병용법을 이용하여 유한요소법의 해석영역을 대폭 줄일 수 있으며, 무한영역에 대해서도 경계요소법의 내점계산에 의해 높은 계산정도를 얻을 수 있다.

그러나 수치계산의 최종과정인 다원연립방정식의 매트릭스에 있어서 경계요소법이 가진 비대칭매트릭스가 개입하기 때문에 유한요소법과 같은 간결한 것으로는 되지 않는다. 그 결과, 미지수의 개수는 대폭 감소시킬 수 있어도 당연히 풀어야 할 대수방정식의 처리에 어려움을 갖게 된다. 따라서 상기의 점이 유한요소·경계요소병용법이 갖는 가장 큰 결점이 되고 있다. 유한요소·경계요소병용법에 의하여 생성되는 최종매트릭스를 그림 2.2 a), b)에 나타내었다. 그림을 보면 명백히 알 수 있듯이, 유한요소·경계요소병용법은 "유한요소법의 특징인 대칭성, 스파스성, 밴드성이 무너져버린다"라는 것을 알게 된다.

### 3. 유한요소법과 경계요소법의 교호적용법

구체적인 해석대상으로서 일본 전기학회 3차원 와전류해석 검증모델을 채용한다. 본 논문에서는 제안수법의 타당성을 확인하기 위해 그림 3.1과 같이 2차원 모델로 간략화하여 해석을 행한다(5). 해석대상의 사양을 표 1에 나타내었다. 해석모델은 여자코일과 도체판으로 구성된 철심이 없는 모델로서, 자성체를 포함하지 않기 때문에 해석이 용이하게 되며, 비교적 소형계산기로 해석이 가능하다.

#### 3.1 영역분담

동일경계를 갖는 유한요소·경계요소병용법과 가장 큰 차이점은 그림 3.2와 같이 유한요소영역의 경계  $\Gamma_F$ 의 내측에 경계요소영역의 경계  $\Gamma_B$ 를 주게되어 각각의 독립적인 두개의 경계가 존재하게 된다는 것이다. 따라서 유한요소법의 경계  $\Gamma_F$ 와 경계요소법의 경계  $\Gamma_B$ 가 다르게 되고 양 수법이 양립하는 영역은 유한요소법의 영역이기도 하고 경계요소법의 영역이기도 하다. 이하, 이 영역을 공통영역이라고 부르기로 한다. 또한 각 수법의 영역분담은 자성체가 존재하고 대매질에 의해 성립된 영역과 와전류가 흐르는 영역등, 즉 유한요소법에 가장 잘 적용이 되는 영역을 유한요소법이 담당하고 공기영역등의 균질한 영역과 무한영역등, 다시 말하면 경계요소법에 가장 잘 적용이 되는 분야를 경계요소법이 담당을 한다.

#### 3.2 교호적용법의 계산과정

교호적용법의 반복계산의 과정을 그림 3.3에 따라 설명한다. 그림속의 I, II, III은 반복계산의 순서이다. 제 I 단계에서는 유한요소법의 경계  $\Gamma_F$  상에 있는 한개의 절점을 취한다. 그 절점에 대응하는 경계요소법의 절점은 중핵영역 안에 두는 것으로 한다. 반복계산의 제 I 단계로서 유한요소법의 경계  $\Gamma_F$ 에 있는 값을 0으로 둔 경계조건하에서 유한요소법의 계산을 행하여 그림의 곡선 I과 같은 결과를 얻는다고 한다. 제 II 단계에서는 경계요소법의 경계  $\Gamma_B$ 에 관한 곡선 I의 값을 초기조건으로서 경계요소법의 계산을 행한다. 그 결과, 곡선 II가 얻어지게 된다고 한다. 이 곡선에서 유한요소법의 경계  $\Gamma_F$ 에 관한 값이 제 III 단계에 있어서의 초기조건이 된다. 제 III 단계 이후는 제 I, II과정과 같은 계산을 반복함으로써 원하는 정해를 얻게 되는 것이다.

#### 3.3 유한요소법 및 경계요소법의 경계설정

교호적용법은 유한요소법의 경계와 경계요소법의 경계를 정확히 설정해야 한다. 당연히 유한요소법의 해석영역이 작을수록 계산용량은 적게 들지만 계산정도가 악화되는 위험이 있다. 또한 경계요소법에서 내점계산을 행하므로 유한요소법의 경계와 경계요소법의 경계가 너무 근접해도 특이성이 발생하여 계산정도를 악화시킨다. 따라서 먼저 경계요소법의 경계를 고정하고  $\Gamma_F$ 를  $\Gamma_B$ 에 접근시켜 양 경계의 간격을 변화시킨다. 또한  $\Gamma_F$ 와  $\Gamma_B$ 의 간격을 고정하고 해석대상과  $\Gamma_B$ 의 거리를 점점 접근시키며 거리변화에 대한 중앙부의 자속밀도를 검토한다. 그 결과, 중앙부의 자속밀도는 거의 변화하지 않는 것을 알 수 있다. 따라서 절점수를 가능한 한 적게되도록( $\Gamma_B$ 를 해석 대상물체에 가능한 한 가깝게) 경계를 설정하면 좋다는 것을 알 수 있다.(3)

#### 3.4 경계요소법의 내점매트릭스 간략화

유한요소법의 매트릭스는 다음과 같다.

$$[K]\{A\} = \{F_{FE}\} \quad (1)$$

경계요소법의 매트릭스는 다음과 같이 주어진다.

$$\{H\}\{A\} - \{G\}\{q\} = \{F_{BE}\} \quad (2)$$

유한요소·경계요소병용법은 자기벡터포텐셜 A 외에 유속 q도 관여하고 있지만, 교호적용법에서는 양수법의 접합 조건으로서 자기벡터포텐셜 A만을 주고받는 특징이 대

두된다. 구체적으로 모든 반복계산에서 경계요소법의 최종 계산과정은 내점계산이 되므로 경계요소법의 연결방정식을 행렬계산으로 치환하여 쓸데없는 계산을 생략할 수 있다. 따라서 유속 q의 계산을 생략시켜 최종적으로 식(5)에 의하여 내점의 자기벡터포텐셜을 구할 수 있다.

$$\{D\} = \{H_{in}\} + \{G_{in}\}\{G\}^{-1}\{H\} \quad (3)$$

$$\{F\} = -\{G_{in}\}\{G\}^{-1}\{F_{BE}\} + \{F_{BEin}\} \quad (4)$$

$$\{A_{pi}\} = \{D\}\{A\} + \{F\} \quad (5)$$

따라서, 경계요소법의 매트릭스 계산은 식(3)의 D 및 식(4)의 F를 계산하는 것에 의해 간단한 벡터계산으로 치환하는 것이 가능하다.

#### 3.5 해석결과 및 기존수법과의 비교

그림 3.4 a), b)에 유한요소·경계요소병용법 및 교호적용법에 의한 자속분포를 나타내었다. 그림과 같이 와전류의 영향에 의한 양 수법의 자속분포의 형태가 거의 동일화하여 교호적용법에 의한 양호한 결과가 얻어짐을 알 수 있다. 또한 관측선 a-b(그림 3.1)의 자속밀도의 오차(오차계산은 유한요소·경계요소병용법의 해석결과를 기준으로 한다)를 그림 3.5에 나타내었다. 그림과 같이 유한요소법은 경계조건의 설정 때문에 무한영역으로 갈수록 점점 오차가 증가함에 비하여, 교호적용법은 병용법과 거의 일치함을 보였다. 따라서 와전류장이 포함된 무한영역에 대한 본 수법의 유효성을 알 수 있었다.

표 2에 각 수법에 대한 계산용량과 계산시간(ILUCGS 법)의 비교(유한요소법을 기준으로 한 백분율)를 나타내었다. 교호적용법의 계산용량은 크게 감소하였지만, 계산시간은 반복계산으로 인하여 증가하였다.

#### 3.6 가속계수의 도입(가속법의 제안)

비선형계산 등에 많이 이용되는 반복계산은 적당한 가속계수의 도입으로 계산시간을 단축한다. 따라서 교호적용법에 있어서도 가속계수에 유사한 수법의 도입을 생각할 수 있다. 본 논문에서는 다음과 같은 수법으로 반복계산의 단축을 시험해 보았다. 반복계산을 행하는 경계의 부분은 공기영역이고 지배방정식은 변화가 온전한 라플라스장이므로, 반복계산에 있어서의 목적량의 변화도 급변하지 않는다. 가속계수 도입점의 반복계산을 검토하면 그림 3.6의 점선과 같이 거의 지수함수적으로 변화하고 있다. 단지, 최초의 몇회는 지수함수적 변화보다도 급격한 직선변화를 하고 있다. 따라서 유한요소법의 경계의 한 절점의 변화값에서 제4회 이후의 값이 지수함수적으로 변화한다고 하자. 그리고 경계요소법으로 계산된 제5회, 6회값 및 최종값을 각각  $A_5, A_6, A_N$  이라고 하면

$$A_{54} = (A_N - A_4)(1 - \epsilon^{-bx}) \quad (6)$$

$$A_{64} = (A_N - A_4)(1 - \epsilon^{-2bx}) \quad (7)$$

따라서 구한 최종값  $A_N$ 은 다음식으로 주어진다.

$$A_N = (A_5 - A_4)/(1 - X) + A_4, \quad X = \epsilon^{-bx} < 1 \quad (8)$$

그림 3.6의 실선은 유한요소법의 경계상에 있는 한 점에 관한 값을 상기 수법에 의해 계산한 과정을 나타낸 것이다. 즉, 최초 6회까지는 반복계산에 의해 유한요소법의 경계상의 값을 구하고 6회의 값을 최종값  $A_N$ 으로 치환 후 반복계산을 계속한 결과이다. 그 결과, 제안한 가속법의 적용에 의해 계산시간이 단축됨을 알 수 있었다. 계산시간 및 회수를 표 3에 나타내었다.

## 4. 결 론

본 논문에서는, 이전 필자가 정자계문제에 대해 검증한 유한요소법과 경계요소법의 교호적용법을 와전류장이 포함된 무한영역에 적용하여 그의 유효성을 확인하였다. 중핵영역의 6배의 해석영역에 대해 유한요소법과 비교한 결과 큰 폭으로 계산용량을 삭감할 수 있었다. 또한 계산정도의 면에서도 무한영역해석에 유효한 유한요소·경계요소병용법의 결과와 거의 일치함으로써 본 해석

영역에 대한 교호적용법의 타당성 및 유효성을 확인하였다. 계산시간이 걸리는 제안수법의 단점은 이전과 같이 가속법을 적용하여 유효한 결과를 얻었다.

[참고문헌]

- [1] 任達鎬, "電氣系の有限要素法", 東明社, 4판, 1995
- [2] T.Onuki, "Hybrid FE and BE method applied to electromagnetic problems", *IEEE Trans. Magn.*, Vol. 26, pp.582-587, 1990
- [3] T. Onuki, J.W Im, "A Numerical Calculation of Open Boundary Problem by applying FEM and BEM" *Journal of Applied Physics*, Vol. 81, No.8, pp.4076-5078, 1997.
- [4] 加川幸雄, "開領域問題のための有限/境界要素法, 사이엔스社, (昭和58年)
- [5] 日本電氣學會技術報告(2部)第384, 3次元渦電流場數値計算基礎技術

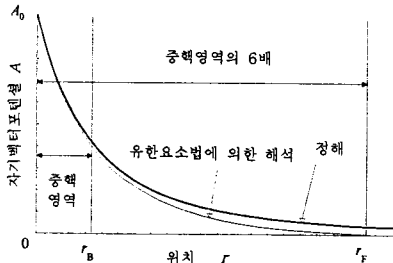


그림 2.1 유한요소법에 의한 무한영역해석

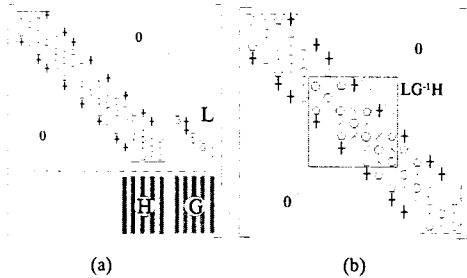


그림 2.2 유한요소-경계요소병용법의 최종매트릭스

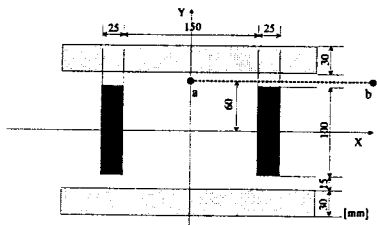


그림 3.1 해석모델

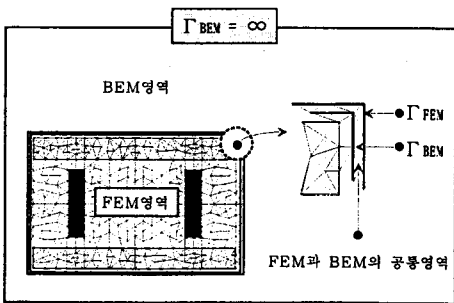


그림 3.2 교호적용법의 영역분담

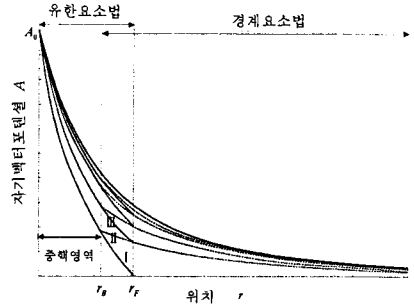


그림 3.3 교호적용법의 계산과정

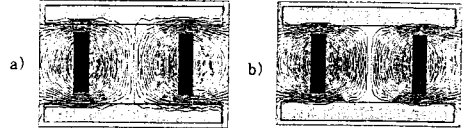


그림 3.4 병용법과 교호적용법의 가속분포

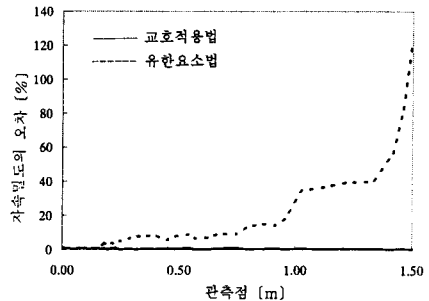


그림 3.5 가속밀도의 오차(관측선a-b)

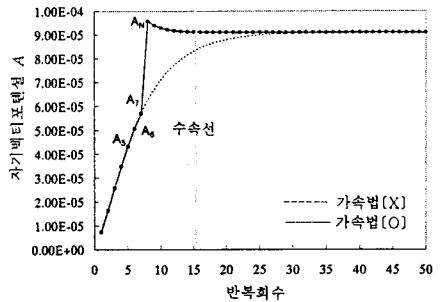


그림 3.6 가속법의 적용에 의한 A의 변화

표 1 해석모델의 사양

도체판	알루미늄 (도전율: $3.225 \times 10^7$ S/m)
여자코일	1000 AT
주파수	50 Hz

표 2 계산용량과 계산시간의 비교

	유한요소법	교호적용법
계산용량 [%]	100	27.66
계산시간 [%]	100	753.29

표 3 가속법에 의한 계산시간의 단축

	유한요소법	교호적용법	
		가속법(X)	가속법(O)
계산시간[%]	100	753.29	232.43
반복회수		48	15