

3차원 전달행렬법을 이용한 스위치드 릴럭턴스 전동기의 모달 해석

하경호*, 강경호*, 홍정표*, 김규탁*
*창원대학교 전기공학과

Modal Analysis of the Switched Reluctance Motor Using 3D Transfer Matrix Method

K. H. Ha*, K. H. Kang*, J. P. Hong*, G. T. Kim*
*Dept. of Electrical Engineering, Changwon Nat'l Univ.

Abstract - This paper deals with the rotor vibration analysis of Switched Reluctance Motor(SRM) with the 6/4 poles. For this analysis, 3-dimensional mode shapes corresponding to the natural frequency and critical speed map according to rotor speed are presented by using 3D Transfer Matrix Method(TMM). The gyroscopic effect and shear deformation of rotor are considered.

불평형으로 인하여 회전체는 휘둘림(whirling)하므로 이의 영향을 예측하기 위해서 3차원 모드해석을 수행하였다. 또한 회전자의 질량은 자이로스코픽과 회전관성 모멘트의 영향으로 회전자의 회전수에 따라 고유진동수가 바뀌므로 회전속도의 함수로써 고유진동수의 변화, 그리고 베어링의 강성 변화에 따른 고유진동수의 변화를 도출하여 회전자의 공진 가능한 위험속도(critical speed)를 제시하였다[3].

2. 본 론

1. 서 론

스위치드 릴럭턴스 모터는 고속운전이 가능할 뿐만 아니라 구조적 특성으로 인하여 경제적 측면에서 많은 장점을 가지는 반면 소음 및 진동특성이 심각한 문제로 대두되고 있다. 이러한 전동기의 소음 및 진동원인은 크게 전자기적 원인, 기계적 원인 및 공기역학적 원인으로 나눌 수 있다. 전자기적 원인의 경우 모터의 전자기적 힘이 구동 토크를 발생시키는 동시에 반경방향의 힘이 외부 가진력이 되어 고정자와 회전자를 진동시킨다. 특히 외부 가진력의 주파수가 기계적 구조물의 고유 진동수와 일치할 경우에는 구조물이 큰 진동을 하게 된다. 그러므로 제작된 전동기를 운전하거나 전동기를 설계할 경우 회전자의 고유진동수 예측과 이에 관한 기계적 거동 양상의 해석이 반드시 필요하다.

회전자를 진동해석하기 위한 모델화 기법은 크게 분포 파라메타 모델(distributed mass model) 과 집중파라메타 모델(lumped parameter model) 그리고 일정 질량 모델 방법(consistent mass model)이 있다[1]. 일정질량 모델에 기초를 두는 유한요소법의 경우 시스템의 전체 자유도와 요소에 비례하여 행렬의 크기가 커지므로 계산시간이 많이 소요되는 단점이 있을 뿐 아니라 선·후처리 작업이 번거로운 문제점이 있다. 그래서, 하나의 강체인 질량과 질량이 없는 스프링으로 구성되는 집중 파라메타 모델의 전달행렬법이 많이 이용되고 있다. 이 방법은 요소수에 상관없이 하나의 질량에서 자유도 수에 의하여 행렬의 크기가 결정되므로 해석 시간을 단축할 수 있으며 선·후처리 작업이 용이하다.

진동 해석의 범위중 가장 기본이 되는 자유진동인 경우에는 하나 또는 그 이상의 고유 진동수를 가지고 진동한다. 이 때의 고유진동수는 질량과 강성의 분포에 의해서 결정되며 동적계의 고유한 특성과 모달해석을 통하여 회전체 고유진동수와 질량계의 상대적 변위를 묘사하는 고유모드를 알 수 있다. 즉 모드 해석법은 회전체의 진동과 관련하여 설계 단계에서 기존 시스템의 동특성 해석 및 운전상태 평가, 진단을 물론 성능개선을 위한 공진 회피 설계에 이르기까지 필수적으로 이용되고 있다[1-2].

따라서, 본 논문에서는 고속으로 회전하는 회전체에 발생하는 자이로 스코픽(gyroscopic) 효과와 전단변형을 고려한 3차원 전달행렬법을 이용하여 SRM전동기의 회전자 모달 해석을 수행하였다. 즉, 전자기 및 기계적

회전축은 탄성적이기 때문에 회전중에 진동이 발생하며 이 경우 나타날 수 있는 진동은 크게 종방향, 비틀림, 굽힘진동의 3가지이다. 이 중 회전자의 진동에 가장 큰 영향을 미치는 굽힘진동을 해석하였다.

2.1 해석 대상

그림 1은 해석대상인 6/4 SRM의 회전자 주요 치수와 로타-베어링 시스템의 모달해석을 수행하기 위한 집중 질량 모델로 등가화한 그림을 나타내고 있다. SRM의 모드 해석을 위해 필요한 각종 물성치와 베어링의 강성계수를 아래 표 1에 정리하였다.

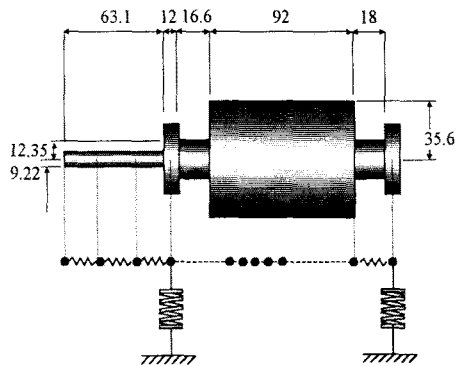


그림 1 SRM 주요치수 및 집중질량등가도

표 1 SRM 회전자의 물성치

회전자 극길이	25.15(mm)	회전자 외경	35.6 (mm)
Shaft	밀도 [kg/m ³]	7850	
	영계수 [N/m ²]	2.03×10 ¹¹	
Stator/Rotor	밀도 [kg/m ³]	7310.8	
	영계수 [N/m ²]	2.03×10 ¹¹	
Bearing	강성계수 [N/m]	5.36×10 ⁹	

2.2 3차원 전달행렬의 구성

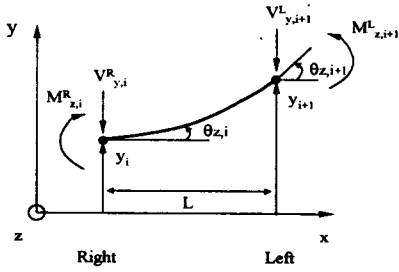


그림 2 x-y 평면에서의 필드 요소

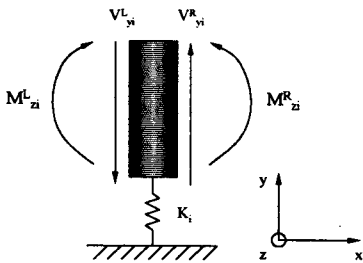


그림 3 x-y 평면에서의 포인트 요소

탄성계를 가지는 해석대상의 등가화된 해석모델은 그림 2와 같이 n개의 질량과 관성이 없는 강성요소로 구성되어있으며 이들의 기본요소들은 서로 연결되어 있다. 해석상의 가정은 다음과 같다.

- 재료는 등방성이며 선형(Hook's law)이다.
- 베어링의 강성은 등방성이며 속도에 관계없이 일정한 값을 가진다.
- 베어링의 뎀핑은 무시하였다.

3차원 전달행렬법을 적용하기 위해서 회전축 방향을 x축이라고 할 때 각 x-y평면, x-z평면에서 강성요소에 대한 필드 행렬과 질량요소에 대한 포인트 행렬을 구한다. 각 기본요소 양단의 물리상태를 규정하는 양은 내력(internal force)과 변위(displacement)로 계의 상태를 표현할 수 있으며 이로부터 행렬을 구성할 수 있다.

x-y평면에서의 상태변수는 y 처짐, θ_y 각변위, V_y 전단력, M_z 모멘트이며 y-z 평면에서의 상태변수는 z, θ_z , V_z , M_y 이다.

그림 2는 x-y평면에서 강성 요소의 상태변수와 힘의 평형상태를 나타내며 각 평면의 필드 요소의 전단변형을 고려한 행렬 $[F]_i$ 는 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L & \frac{L}{GAk_s} - \frac{L^3}{6EI} & 0 & \frac{L^2}{2EI} & 0 \\ 0 & 1 & -L & 0 & 0 & \frac{L}{GAk_s} - \frac{L^3}{6EI} & 0 & -\frac{L^2}{2EI} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{L^2}{2EI} & 0 & \frac{L}{EI} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{L^2}{EI} & 0 & \frac{L}{EI} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -L & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

여기서 L 은 각 필드요소간의 길이이고 G 는 전단계수 $[N/m^2]$, A 는 요소의 단면적, k_s 는 티모센코계수, E 는 영계수 $[N/m^2]$, I 는 요소의 2차 면적 모멘트 $[m^4]$ 이다.

그림 3은 x-y평면에서의 질량을 나타내는 포인트 요소의 힘의 평형 상태를 나타내는 그림이다. 각 평면에서 포인트 요소의 내력과 변위의 관계로부터 자이로스코픽모멘트(I_p)를 고려한 포인트 행렬 $[P]_i$ 는 식 (2)과 같다.

$$[P]_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ m\lambda^2 + K_{yy} & K_{yz} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ K_{zy} & m\lambda^2 + K_{zz} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_p\omega\lambda & I_p\lambda^2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & I_p\lambda^2 & -I_p\omega\lambda & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

여기서, K_{yy} , K_{yz} , K_{zy} , K_{zz} 는 베어링의 강성 (N/m) 을 나타내며 I_p 는 극 관성 모멘트 $[kg \cdot m^2]$, I_t 는 횡관성 모멘트 $[kg \cdot m^2]$, ω 는 회전체의 휘둘림각속도 $[rad/sec]$, λ 는 축의 각속도 $[rad/sec]$, 즉 고유진동수이다.

하나의 요소에 대한 전달행렬은 식 (1)의 필드행렬과 식 (2)의 포인트행렬의 곱으로 나타내어지며 전체 시스템에 대한 전달행렬은 다음과 같이 나타낸다.

$$\begin{bmatrix} y \\ z \\ \theta_y \\ \theta_z \\ V_y \\ V_z \\ M_z \\ M_y \end{bmatrix}_{i+1}^R = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & \dots & T_{18} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & \dots & T_{28} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & \dots & T_{38} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & \dots & T_{48} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{81} & T_{82} & T_{83} & \dots & T_{88} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \\ \theta_y \\ \theta_z \\ V_y \\ V_z \\ M_z \\ M_y \end{bmatrix}_i \quad (3)$$

위의 행렬 관계식에서 회전체의 지지양단의 경계조건 ($V_y = V_z = 0$, $M_z = M_y = 0$)을 적용하면 아래와 같이 행렬을 줄일 수 있다.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{i+1}^R = \begin{bmatrix} T_{51} & T_{52} & T_{53} & T_{54} \\ T_{61} & T_{62} & T_{63} & T_{64} \\ T_{71} & T_{72} & T_{73} & T_{74} \\ T_{81} & T_{82} & T_{83} & T_{84} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \\ \theta_y \\ \theta_z \end{bmatrix}_i \quad (4)$$

우측항의 상태변수가 0일 수는 없으므로 결국 $\det(T)$ 가 0인 고유치 문제를 푸는 것이 된다. $\det(T)=0$ 인 λ 값이 계의 고유진동수가 되며 각 고유진동수에 대한 계의 모드는 포인트 요소에서 y, z 변위값의 상태량으로 구할 수 있다.

2.3 해석결과

표 2는 전달행렬법을 이용하여 SRM 회전자의 고유진동수를 구한 결과를 나타낸다.

그림 4는 회전자의 측면에서 본 세 개의 굽힘 모드를 나타낸 것이며, 그림 5는 3차원 휘둘림의 운동을 나타낸 모드이다. 베어링의 영향으로 세 모드 중의 처음 두 개의 모드는 강성모드(rigid mode)이며 회전체 자체의 변형은 발생하지는 않으며 일차모드에서 수평형태로 진동을 하며, 이차 모드에서 양단은 반대방향으로 진동한다. 계의 3차모드로 될 때만 회전체 자체는 변형한다. 1차와 2차의 움직임은 공진에 의한 휘둘림에 큰 영향을 주고, 특히 회전체는 2차 경사모드에서 회전시 코아의 경사변화로 인하여 자이로스코픽에 많은 영향을 미친다.

표 2 SRM 회전자의 고유 주파수

고유 주파수 (Hz)	1st	109.34
	2nd	187.37
	3rd	2255.09

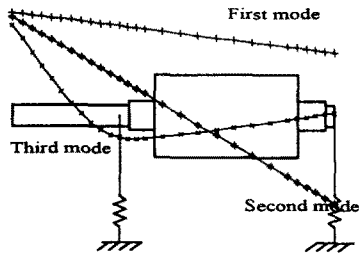
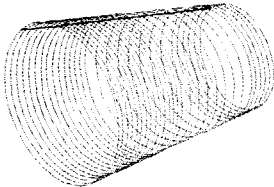
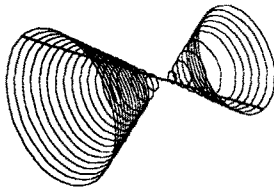


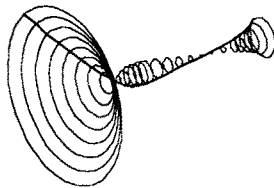
그림 4 2차원 모드 양상



(a) 1차 모드(109.34(Hz))



(b) 2차 모드(187.37(Hz))



(c) 3차 모드(2255.09(Hz))

그림 5. 고유 진동수에 대한 3차원 모드 형상

그림 6은 x축의 속도(RPM)에 따른 y축의 주파수(Hz)의 함수로 표현된 캠벨(Campbell)선도를 나타낸다. 위험 속도란 회전체의 휘둘림진폭과 전달력이 극부적으로 최대인 영역으로 회전자의 고유진동수와 회전자의 속도가 일치하는 경우이며 이때 회전자는 크게 진동하므로 동적 설계 시 회전체가 지속적으로 운전되는 속도에서 위험속도를 제거하는 것이 요구된다. 또한 자이로스코픽과 회전관성의 영향으로 속도에 따라 고유진동수가 바뀌므로 공진 가능 속도를 찾기 위해서 캠벨선도가 필요하다. 회전축의 속도와 휘둘림의 속도가 동기일 경우 위험속도는 그림 6의 점선과 속도에 따른 고유진동수변화인 실선의 두 함수가 교차하는 점의 주파수 값이고 위험속도는 그 때의 RPM 값이 된다. 그림 6의 A, B, C점에서 위험 속도는 각각 6564, 11242, 135305(RPM)이다. 그림 6에서 1모드는 속도에 상관없이 거의 일정한 고유진동수를 나타내고, 2모드는 그림 4에서 보이듯이 회전체의 경사에 의하여 자이로스코픽 영향을 받아 속도가 증가할수록 고유진동수 또한 증가하게 된다. 또한 3차 모드는 전향 휘둘림과 후향휘둘림의 두 개의 고유진동수를 가진다. 이상의 결과로부터, 자이로스코픽 모멘트는 각 모멘트의 변화에 저항하며 위험속도를 높여주는 경향이 있으며 회전관성은 회전체의 경사속도에 극부적

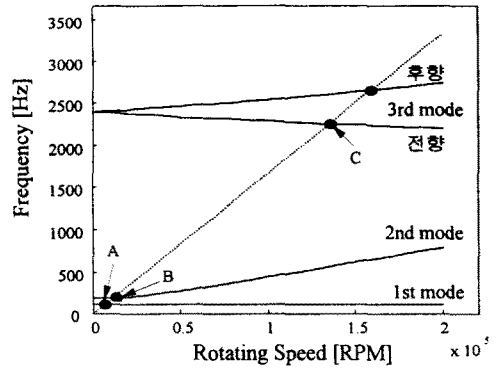


그림 6 캠벨(Campbell) 선도

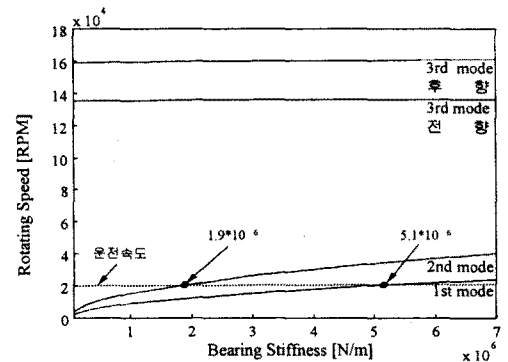


그림 9 베어링 강성에 대한 위험속도선도

변화에 저항하여 계의 위험속도를 낮추는 역할을 한다. 회전속도가 0(RPM)인 경우 극관성의 영향은 존재하지 않으므로 자이로스코픽의 영향은 없다. 그러므로 자이로스코픽 영향을 감소시키기 위한 설계방법으로 회전자의 반경을 작게 하고 축방향의 길이를 길게 한다.

그림 7은 회전자의 양단을 지지하는 베어링 강성(stiffness)의 변화에 따른 고유진동수의 변화를 나타내는 위험속도 선도이다. 그림 7의 점선과 같이 운전속도 선과 고유진동수가 교차하는 점에서 베어링 강성을 사용할 경우 공진을 일으킴으로 이때의 베어링 강성은 피해야한다.

3. 결 론

본 논문에서는 SRM 전동기 회전자의 자유진동을 해석을 위하여 전달행렬법을 사용하였으며 이를 이용하여 회전자의 고유진동수와 3차원 휘둘림 모드를 구할 수 있었다. 또한 속도에 따른 고유진동수, 베어링 강성에 따른 고유진동수의 변화를 도식한 캠벨 선도로부터 공진 가능한 위험속도를 제시하였으며 자이로스코픽 영향을 분석하였다. 회전자의 초기설계 단계에서나 운전시에 검토함으로써 공진 회피 설계 및 진동저감을 위한 운전에 유용하게 사용될 것이다.

(참 고 문 헌)

- [1] 양보석, 펌프의 진동, 세종출판사, 1992.
- [2] M. Lalanne and G. Ferraris, *Rotordynamics prediction in engineering*, John Wiley & Sons.,1990.
- [3] J.S.Rao, *Rotor Dynamics*, John Wiley & Sons, Second Edition, 1991.