1999년도 대한전기학회 하계학술대회 논문집 1999. 7.19-21

형상의 불확실성을 고려한 확률유한요소 해석

김영균* , 홍정표* , 김규탁* , 허진**
*창원대학교 , **한양대학교

Stochastic finite element analysis considering the uncertainty of shape

Young-Kyoun Kim,Jung-Pyo Hong*,Gyu-Tak Kim*,Jin Hur**
*Dept. of Electrical Eng. Changwon Nat'l Univ. , **Dept. of Electrical Eng. Hanyang Univ.

Abstract - A method of stochastic finite element analysis is developed for yield a uncertainty of engineering problems. Where, a stochastic finite-element method for shapes modeling is proposed as a means to solve the models with the uncertainty and variety. This method is based on the probability and illustrated by a first-Order Second-Moment Method and considering the covariance of random variables. The validity and accuracy of the stochastic finite element method is verified through comparing with those solved by the conventional 2-D finite element method.

1. 서 론

유한요소법은 컴퓨터의 꾸준한 발달과 그 유용성으로 인하여 여러 분야에 널리 사용되고 있다[1]. 본 논문에서는 확률유한요소법을 이용하여 여러 가지 공학적 문제 중에서 형상의 불확정성을 포함하는 전기기해석에 대해서 다루고자 한다.

전기기설계 및 제작할 때, 제작 및 가공시 오차 , 측정오차, 경험상의 오차등 여러 가지 요인들에 의해서 불확실성 또는 변화가능성이 존재한다. 이와 같은 설계 및 제작시에 나타나는 불확정성을 고려하여 특성 변화를 미리 예측함으로써 보다 정확한 설계를 행할 수 있다. 기존의 유한요소법은 해석 대상에 대하여 형상 치수, 재질정수, 경계조건등 확정적인 값을 요구한다. 즉, 변화가능성을 배제한 이상적인 해석 모델에 대한 해석이 요구된다. 따라서, 기존의 유한요소법으로 입력 변수의 불확실성 또는 변화가능성을 고려하여 입력 변수의 변동에 의한 변위가 해석 결과에 주는 영향을 예측하기 위해서는 입력 값을 조금씩 변화시켜 여러 번의 반복계산 과정을 거쳐야 한다. 그리고 이 반복수행 결과로부터 통계량을 구할 수 있다. 이러한 반복해석 방법은 연산시간 관점에서 실용적이지 못하다.

따라서, 전자계해석에 있어서 형상의 불확정성을 고려하기 위하여 본 논문에서는 확률론에 근거를 둔 확률유한요소법을 도입하였다. 확률유한요소법은 불확정성을 가지는 형상에 대하여 확률과정을 가정하고, 형상치수 즉, 입력변수의 변동에 대한 분포와 형상을 상관하는 입력변수의 상관함수를 얻으므로서 기존의 유한요소법으로부터 얻어지는 출력에 대한 기대값과 부가적으로 분산등의 통계량을 얻을 수 있다[2]. 따라서, 본 논문에서는 형상의 미소 변위를 확률변수로 두고, 이것의 분포로부터 출력에 대한 통계량을 직접 구하고자 한다. 그리고 기존의 유한요소법을 이용해서 입력 변위를 샘플링하고 반복 계산하여 출력의 분포를 구하고 확률유한요소법을 이용한 결과와 비교 검토하였다.

2. 형상의 불확정성에 대한 확률유한요소 정식화

2.1 유한요소법에서 형상의 불확정성

기존 유한요소법의 계행렬은 요소의 재질정수와 절점 좌표 그리고 지배방정식의 경계조건으로부터 구성된다. 이와 같은 입력 값들은 확정적인 값 즉, 기대값으로 입력되고 계행렬 또한 확정적인 값을 가지게 된다. 그러나 여러 가지 원인에 의하여 발생할 수 있는 재질정수의 불확정성, 형상의 불확정성 , 경계조건 값 자체의 불확정성등은 계행렬의 변동에 영향을 준다. 따라서 이런 변동이 출력에 미치는 영향을 고려하여야만 여러 가지 입력 재원들의 변화에 대해서 원하는 출력 값을 얻을 수 있다.

정자계 해석영역의 지배방정식은 계변수인 벡터 포텐셜 A로 표현되며, 계변수 A는 공간 (r) 및 재질정수 (ν)의 함수이다. 본 논문에서는 형상의 불확실성을 입력 변수로 하고 나머지 재원들은 확정적인 량을 입력 값으로 한다. 따라서 계변수 A는 공간만의 함수가 된다.

$$A = f(r,\nu) = f(x,y) \quad (\text{단, } \begin{matrix}\nu = \text{상수} \\ x,y = \text{절점좌표}\end{matrix}) \tag{1}$$

여기서 절점 좌표값의 미소 변위가 확률 변수 $X = \{X_1, \cdots, X_n\}$으로 주어진다면 벡터 포텐셜 A는 다음과 같이 다중 확률변수 함수로 나타낼 수 있다.

$$A = g(X_1, X_2, \cdots, X_n) \tag{2}$$

이와 같이 표현된 함수로부터 확률 변수의 분포를 이용하여 벡터 포텐셜 A에 대한 기대값과 분산을 산출함으로써 출력에 해당하는 벡터 포텐셜 A와 자속밀도 B에 대한 분포를 구할 수 있다.

2.2 출력에 대한 통계량 계산

다중 확률 변수 X를 포함하는 함수 A의 기대치 및 분산은 다음 식으로부터 얻을 수 있다.

$$E[A] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x)\, dx \tag{3}$$

$$Var[A] = \int_{-\infty}^{+\infty} \{g(x) - E[A]\}^2 f_X(x)\, dx \tag{4}$$

여기서, $x = x_1, x_2, \cdots, x_n$
$X = X_1, X_2, \cdots, X_n$ 이다.

기대치와 분산을 결정하기 위해서는 확률변수 X에 대

한 확률밀도함수 $f_X(x)$의 정보가 필요하지만 이를 구하기가 쉽지 않고, 확률변수 X에 대한 확률밀도 함수 $f_X(x)$를 구했다 하더라도 적분 계산이 곤란한 경우가 있다. 따라서 식(2)를 확률변수의 기대치 X^0에 대해서 Talyor Series 전개를 이용하여 다음 식과 같이 근사적으로 계산할 수 있다[1][2].

$$E[A] = g(X_1^0, X_2^0, \cdots, X_n^0) \tag{5}$$

$$Var[A] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial g}{\partial X_i}\right)_{X^0}\left(\frac{\partial g}{\partial X_j}\right)_{X^0} Cov[X_i, X_j] \tag{6}$$

이것을 1차 근사법 또는 1차 근사 2차 모멘트법이라 한다. 여기서 편미분항은 확률 정식화를 통해서 구한 A로부터 직접 구할 수 있다. 그리고 $Cov[X_i, X_j]$는 $x_i x_j$의 공분산이다. 절점 좌표 값의 미소 변동 즉, 미소 확률 변수를 $\alpha_i = x_i - x_i^0$ 로 놓으면, 공분산은 미소 확률 변수의 자기상관함수 $R(\alpha_i, \alpha_j)$로 구할 수 있다.

2.3 정식화

요소의 절점 좌표 x, y의 변위량을 각각 α, β 라고 할 때 할, 요소내부 임의의 점에서 미소 확률변수는 다음 식과 같이 정의할 수 있다.

$$\alpha_{ie} = x_{ie} - x_{ie}^0, \quad \beta_{ie} = x_{ie} - x_{ie}^0 \tag{7}$$

따라서 미소 변위항을 포함하는 벡터 포텐셜 A의 1차 선형 근사식은 다음 식과 같다.

$$A_{ie} = a_{1e} + a_{2e} x_{ie}^0 + a_{3e} y_{ie}^0 + a_{2e}\alpha_{ie} + a_{3e}\beta_{ie} \tag{8}$$

여기서, x_{ie}^0, y_{ie}^0는 좌표 값의 기대치이다.

다음으로 면적 좌표계를 이용하여 지배방정식을 정식화하면 해석 영역의 계행렬을 다음 식과 같이 구할 수 있다.

$$K = \int\int Q(L_1, L_2)^T D\, Q(L_1, L_2) |J|\, dL_1\, dL_2 \tag{9}$$

여기서, D는 재질정수 행렬이고 J는 쟈코비안 행렬이다. 식(9)를 확률변수 α_i, β_i에 대해서 정리하면 다음 식과 같이 나타낼 수 있다[3].

$$K = K^0 + \sum_{all\ i} K_i^I \alpha_i + \sum_{all\ i} K_i^{I'} \beta_i \tag{10}$$

따라서 계변수 벡터 포텐셜 A 및 자속밀도 B는 다음 식과 같이 기대값과 1차 변동율의 합으로 표현된다.

$$A = A^0 + \sum_i A_i^I \alpha_i + \sum_i A_i^{I'} \beta_i \tag{11}$$

$$B = B^0 + \sum_i B_i^I \alpha_i + \sum_i B_i^{I'} \beta_i \tag{12}$$

2.4 해석 대상

해석대상에 있어서 형상의 불확정성은 그림 2.에서와 같이 공극 부분이 y방향으로 변동한다고 가정하고, 4개의 미소변위 노드의 확률변수는 Gaussian 확률분포 함수를 적용하였다.

$$p(y_i) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi\sigma^2)}} e^{-y_i^2/\sigma^2} \tag{13}$$

Gaussian 확률분포를 가지는 확률변수의 자기상관함수는 이동 파라메터 즉, x좌표의 차의 형태로 주어진다[4].

$$R(\beta_i, \beta_j) = \sigma^2 e^{-(x_i - x_j)^2/\sigma^2} \tag{14}$$

여기서 σ^2는 확률변수의 분산이다.

기존의 유한요소법에서 입력값의 변동에 대한 표본을 추출하여 공극 부분의 변동을 해석하여 얻은 출력표본으로부터 통계량을 구하였다. 그리고 확률유한요소 해석결과 비교하였다. 이때 입력변수 표본의 분산은 0.3667×10^{-9} 이다.

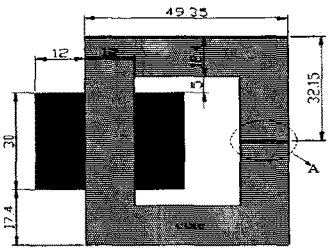

그림 1. 해석 모델

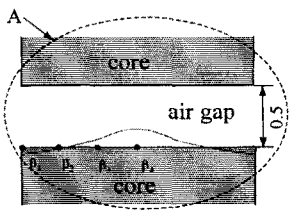

그림 2. 공극에서의 변위

3. 해석 결과 및 검토

3.1 출력값의 분포비교

표 1.에 4개의 확률변수에 대하여 계변수 A의 분산을 계산하여 나타내었다. 확률유한요소법으로 구한 분산은 기존의 유한요소법과 비교하였을 때 1.6[%]~2.2[%]의 오차를 가진다.

표 1. 계변수 A의 분산

확률변수	유한요소법 (CFEM)	확률유한요소법 (SFEM)	오차 [%]
β_1	1.88377E-10	1.9248E-10	2.2
β_2	1.47215E-10	1.4964E-10	1.7
β_3	1.86238E-10	1.8929E-10	1.6
β_4	2.27813E-10	2.3159E-10	1.7

그림 3.은 확률변수 β_4의 변위에 의한 벡터 포텐셜 A의 분포를 보여주고 있다. 이 그림에서는 기존의 유한요소 해석 결과와 확률유한요소 해석하여 식(5),(6),(11)을 통해서 산출한 결과가 거의 일치함을 보여 준다.

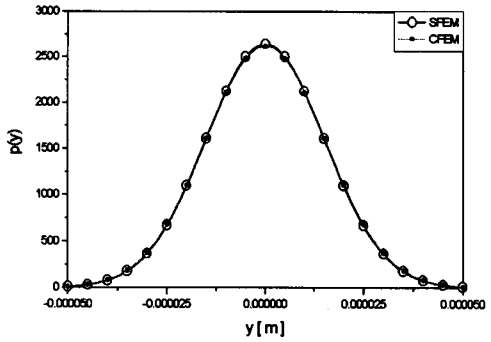

그림 3. 계변수 A 의 확률밀도분포 비교

그림 4는 확률변수 β_4 에서 변위가 발생할 때 공극 자속밀도의 변동에 대한 분산을 식(5),(6),(12)를 이용하여 계산한 결과를 나타낸다. 이 때 확률유한요소법과 기존의 유한요소법의 계산결과에 대한 오차율은 1.8[%]~1.6[%]사이에 있다. 나머지 확률변수에 대해서도 공극 자속밀도의 분산을 계산한 결과는 2 [%] 내외의 오차를 가진다.

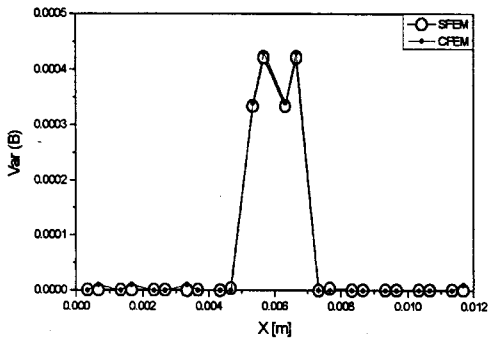

그림 4. 공극자속 밀도 분산의 변화

3.2 1차 변동율과 자속밀도

그림 5.는 벡터포텐셜 A 의 1차 변동율로 부터 0.01 [mm] 에서 0.05[mm] 까지 +(양)방향으로 공극이 조금씩 변화하였을 때, 공극 자속밀도를 계산한 결과를 나타

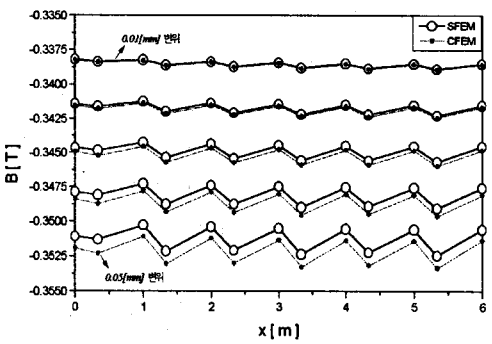

그림 5. 공극 자속밀도 변화 비교

내었다. 그리고 기존의 유한요소법으로 같은 변위를 입력하여 해석한 결과와 비교해볼 때, 공극 부분의 변위가 0.05[mm] 에서 0.25[%] 정도의 오차를 가진다.

공극 부분의 변위를 그림 6.에 벡터 포텐셜 A 의 1차 변동율로부터 0.01[mm] 에서 0.1[mm] 까지 -(음)방향으로 공극을 조금씩 변화시켜, 기존의 유한요소법과 확률유한요소법으로 공극 자속밀도 변화를 각각 계산하여, 이때 발생하는 오차율을 그림 6.에 나타내었다. 변위가 증가할수록 오차율은 증가하며 공극 길이의 10[%] 내외의 변위에 대해서 오차율은 0.2[%]~0.4[%]정도를 가진다.

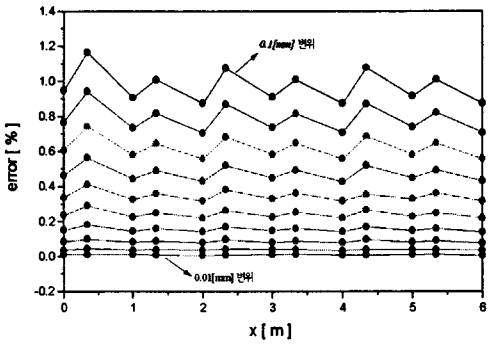

그림 6. 공극 자속밀도의 오차율

4. 결론

본 논문에서는 형상의 불확실성을 고려하여 입력의 변동이 목표로한 출력 값에 주는 영향을 예측하고, 이것으로부터 입력 값의 범위를 결정하기 위한 해석 방법으로서 확률유한요소법을 도입하고 그 유용성을 검토하였다.

형상의 변동을 상관하는 확률변수의 자기상관 함수는 Gaussian 확률분포 함수를 적용하여 고려하였다. 그리고, 이 방법의 타당성을 검정하기 위해서 기존의 유한요소법과 비교·분석하였다. 확률유한요소법과 기존의 유한요소법을 비교 해볼 때, 입력변수의 변동에 대한 출력의 분포가 거의 일치하는 결과를 얻을 수 있었다. 따라서 불확정성을 포함하는 경우를 해석함에 있어서 여러번의 반복계산을 하지 않고도 입력의 분포에 따른 출력의 분포를 직접 구할 수 있는 확률유한요소법이 유용하다고 판단된다.

형상의 변동에 있어서 분산으로부터 구해지는 표준편차의 역을 형상의 정밀도로 생각한다면, 이 표준편차를 작게 가져가면 형상의 정밀도가 커진다. 이와 같이 확률유한요소법은 입력의 불확정성 또는 변화 가능성을 고려하여 얻은 통계량은 입력이나 출력의 범위를 결정하는데 유용하게 사용할 수 있는 방법으로 판단된다.

(참 고 문 헌)

[1] 中東滋외 1명, *確率有限要素法入門*, 培風管, *昭和60*

[2] 榎園正人외 1명, " 不確かな形狀を有する場合の確率有限要素法による磁界解析 ", *電學論 A*, 109권, 2호, 坪城元年

[3] Jin Hur외 1명 "Shape Optimization of Electric Machine Using Stochastic Finite Element Method", *IEEE CEFC '98*, P.286, 1998.

[4] 황병현외 1, *확률 및 통계*, Ohm社 , 1990.