

민감도와 역 관계를 이용한 전기기기의 입력 전류 분포 최적화

이 주현, 변 진규, 한 송엽
서울대학교 전기공학부

Source Current Optimization of Electromagnetic Devices using Sensitivity and Inverse Relation

Ju-hyun Lee, Jin-gyu Byun, Song-yop Hahn
Seoul National University

Abstract - This paper describes a new method for source current optimization of the electromagnetic devices. In a conventional method of current distribution optimization using design sensitivity based on a finite element method, position and width of coils are generally optimized under condition that shape of those is given. they cannot find the global minimum because the number of coils is pre-determined. To avoid this local minimum, source current region which is discretized uniformly is considered as design parameter. This discretized regions have zero or one current value during the optimization process. The proposed method is applied to magnetic resonance imaging(MRI) magnet.

1. 서 론

전기기기의 설계에 있어, 설계 민감도법[1]이 널리 사용되고 있다[2]. 설계 민감도라는 것은 설계변수의 변화에 대한 목적함수의 변화량을 말하고, 일반적으로 목적함수는 주어진 설계변수들과 그 변수들에 의해 계산되어지는 상태변수들의 함수로서, 설계 목적을 정량적으로 나타낸다. 기존의 설계 민감도법에 의한 전류 분포 최적화 과정은 미리 정해진 코일의 크기에서 시작하여 그 코일의 위치를 변화시켜 최적화를 얻는 반면 본 논문에서의 전류 분포 최적화는 코일의 형상에 대한 정보가 초기에 주어지지 않은 상태에서 최적화 과정을 통해 찾아가게 된다. 그러므로 본래 의미의 전류 분포 최적화의 개념을 실현시켰다고 볼 수 있다. 설계 변수로서는 전류가 분포할 수 있는 영역을 정해진 규격으로 분할하고 여기서 분할된 각각의 영역들은 최종적으로 0 또는 1의 전류값을 갖는다.

본 논문에서는 제시된 방법을 관심 영역 내에 균일한 자장이 발생해야 하는 자기공명 영상장치(MRI)의 입력 전류 분포 설계에 적용시켜 보았다.

2. 민감도 해석을 이용한 입력 전류 분포 최적화

2.1 정자장 문제의 유한요소 해석

2차원 정자장 문제는 맥스웰 방정식에 의해 다음과 같이 정리될 수 있다.

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \tag{1}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \tag{2}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \tag{3}$$

$$\nabla \times (\nu \nabla \times \vec{A}) = \vec{J} \tag{4}$$

$$-\nabla (\nu \nabla \cdot \vec{A}) = \vec{J} \tag{5}$$

여기서 H 는 자계의 세기, B 는 자속밀도, J 는 전류밀도, A 는 벡터자기포텐셜, μ 는 투자율, ν 는 자기저항이다. 식 (5)로부터 유한요소법과 Galerkin 법을 이용하면 행

렬 방정식으로 근사해를 구할 수 있다.

$$[K][X] = [f] \tag{6}$$

행렬 $[K]$ 와 $[f]$ 는 요소별로 요소 형상함수를 이용해서 구한 값들을 조립한다. 정리하면 아래와 같다.

$$[K] = \sum_{e=1}^{n_e} \sum_r \int_{\Omega_e} \mu \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] dx dy \tag{7}$$

$$[f] = \sum_{e=1}^{n_e} \sum_r \int_{\Omega_e} J \cdot N_i dx dy \tag{8}$$

여기서 n_e 는 요소의 총 개수이고 N_i, N_j 는 요소 형상함수이다.

2.2 민감도법

일반적으로 목적함수는 다음과 같이 정의된다.

$$F = F[p_i, X(p_i)] \tag{9}$$

여기서 p_i 는 설계변수 벡터이고 $X(p_i)$ 는 상태변수 벡터이다.

민감도는 설계변수의 변화에 대한 목적함수의 변화로 정의하였기 때문에 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{dF}{d[p_i]} = \frac{\partial F}{\partial [p_i]} + \frac{\partial F}{\partial [X]} \frac{d[X]}{d[p_i]} \tag{10}$$

여기서, $\frac{d[X]}{d[p_i]}$ 는 설계 변수에 대한 상태변수의 변화율을 의미한다.

위의 과정을 통해 얻은 각 변수에 대한 민감도를 이용, 설계변수를 각각의 최적점을 찾기 위해 최대경사법을 적용한다.

2.3 역 관계

이 방법은 식 (10)에서 $\frac{d[X]}{d[p_i]}$ 을 계산함에 있어서 설계 변수의 개수가 목적 함수에 관계되는 상태 변수의 개수보다 상대적으로 많기 때문에 일어나는 계산상의 문제점을 해결하기 위하여 설계 변수와 상태 변수 사이의 관계를 역으로 생각하는 것이다.

예를 들어, 그림 1(a)의 4개의 설계 변수(즉 S_1, S_2, S_3, S_4)에 대하여 각각이 1개의 상태 변수(즉 P_1)에 미치는 영향력을 구하고자 할 경우 그림 1(b)에서 보는 것처럼 1개의 상태 변수(즉 P_1)가 4개의 설계 변수(즉 S_1, S_2, S_3, S_4)에 미치는 영향력을 구하는 것과 같다는 것이다.

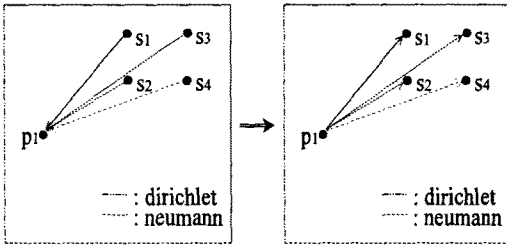


그림 1(a) 그림 1(b)
그림 1. 역 관계

위의 방법을 이용하게 되면 전류 영역의 미소 분할로 인한 많은 설계변수에 대하여 상태변수와와의 관계식을 쉽게 계산해 낼 수 있게 된다.

2.4 경계 조건 하에서의 역 관계

여기에서는 경계 조건이 주어져 있을 때 설계 변수와 상태 변수간의 역 관계가 성립함을 보여준다. 그림 2(a)에서는 1사분면 상에 dirichlet 내지 neumann 경계 조건을 가질 경우 설계 변수(즉 S_1)에 대한 상태 변수(즉 P_1)의 관계식을 구하고자 할 때 경계 조건을 없앤 영역으로 확장시켰을 경우를 고려한 것이다. 마찬가지로 그림 2(b)에서는 역으로 상태 변수(즉 P_1)에 대한 설계 변수(즉 S_1)의 관계식을 구하기 위해 경계 조건을 없앤 영역으로 확장시킨 경우이다.

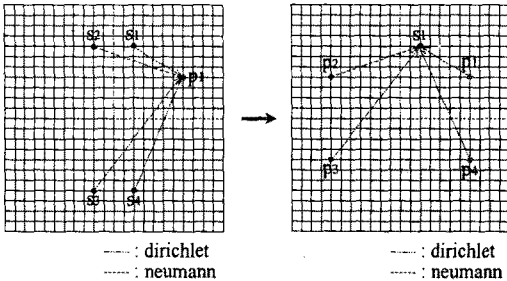


그림 2(a) 그림 2(b)
그림 2. 경계 조건하에서의 역 관계

그림 2(a)의 4개의 설계 변수(즉 S_1, S_2, S_3, S_4)가 하나의 상태 변수(즉 P_1)에 미치는 영향력의 합이 그림 2(b)의 4개의 상태 변수(즉 P_1, P_2, P_3, P_4)가 하나의 설계 변수(즉 S_1)에 미치는 영향력의 합과 같다는 것을 위의 그림을 통해 쉽게 알 수 있다.

3. MRI magnet 의 입력 전류 분포 설계

제시된 방법을 그림 3과 같은 MRI에 적용하였다[3][4]. 설계 목적은 주어진 사각형 영역 내에서 균일한 자장(즉, $H_x = 0.0, H_y = -36.25811$ (A/m) 인 경우)이 발생하도록 하는 것이다. 이 모델의 요소 분할은 그림 4와 같다.

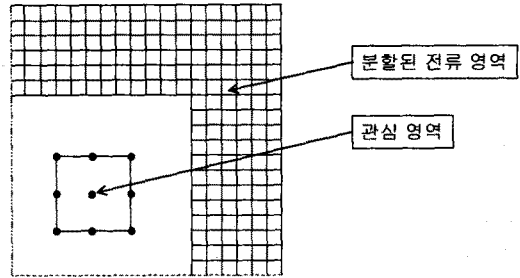
목적함수는 다음과 같이 현재의 형상에 의해 계산되는 해의 값과 얻고자 하는 값의 차이의 제곱의 합으로 표현된다.

$$F = E_x + E_y \quad (11)$$

$$E_x = \sum_j (\sum_i d_{x,i} v_i - H_x)^2 \quad (12)$$

$$E_y = \sum_j (\sum_i d_{y,i} v_i - H_y)^2 \quad (13)$$

여기서, E_x 는 x방향 자장 성분의 차의 제곱, E_y 는 y방향 자장 성분의 차의 제곱을 나타내고 $d_{x,i}$ 와 $d_{y,i}$ 는 각각 j번째 관측점에서의 x방향과 y방향 자장 성분에 대한 i번째 전류 성분의 영향력이고 v_i 는 분할된 전류 영역의 i번째 전류 성분이며, $H_{x,i}$ 와 $H_{y,i}$ 는 각각 x방향과 y방향에서 우리가 얻고자 하는 자속밀도의 값이다.



--- : dirichlet
- - - : neumann
그림 3. 설계 모델의 초기 형상

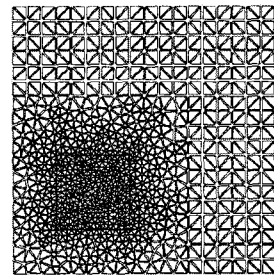


그림 4. 설계 모델의 요소 분할도

식 (11)으로부터 최적화 과정을 수행하게 되면 최종 입력 전류 분포가 나오게 되지만 이 때의 각 분할된 영역에서의 전류값들은 0 또는 1의 전류값을 가지지 못하고 0과 1 사이의 값들로 최적화될 우려가 있다. 보다 현실적인 설계를 위해서 전류는 0 또는 1의 값을 가져야 하므로 목적함수에 다음과 같은 항을 첨가시킨다.

$$E_c = \sum_i v_i(1 - v_i) \quad (14)$$

또한, 본래의 목적 함수에 대한 위의 제약 조건항을 효율적으로 추가시키기 위해 Augmented Lagrangian Method를 이용하였다[5]. 즉,

$$F = E_x + E_y + \lambda_i E_c + \omega_i E_c^2 \quad (15)$$

여기서, λ_i 는 Lagrange multiplier 항이고 ω_i 는 penalty weight 항이다.

식 (15)으로부터 민감도식은 아래와 같이 계산된다.

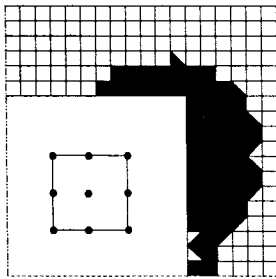
$$\begin{aligned} \frac{dF}{dv_i} &= \frac{\partial E_x}{\partial v_i} + \frac{\partial E_y}{\partial v_i} + \lambda_i \frac{\partial E_c}{\partial v_i} + 2\omega_i E_c \frac{\partial E_c}{\partial v_i} \\ &= 2 \sum_j (\sum_i d_{x,i} v_i - H_x) d_{x,j} \\ &\quad + 2 \sum_j (\sum_i d_{y,i} v_i - H_y) d_{y,j} \end{aligned} \quad (16)$$

$$+ \lambda_i(1 - 2v_k) + 2\omega_i E_c(1 - 2v_k)$$

위의 식 (16)에서 d_{x_i} 항과 d_{y_i} 항을 계산하고자 할 때, 각각의 분할된 전류항의 개수와 관측점의 개수의 곱의 개수 만큼의 관계식을 필요로 한다. 그러나, 앞 절에서 제시한 역 관계를 이용하게 되면 단지 관측점의 개수 만큼의 관계식으로부터 그 값을 알 수 있게 된다.

또한, 제약조건 E_c 의 목적 함수에서의 고려 정도를 나타내는 λ_i 의 초기값은 0.1로 놓았고 그 값은 최적화 반복 과정에서 ω_i 항에 의해 갱신된다. 본 논문에서는 ω_i 의 값을 0.1로 잡아 주었다.

그림 4는 제시된 방법으로 100번 반복 후 변화된 최종 전류 분포를 보이며, 그림 5는 그 때의 등전위 분포를 보여 준다. 또한, 표 1은 9개의 관측점에서의 최종 x방향 자속값과 y방향 자속값을 나타낸다. 그림 4를 보면 그 전류 분포 형상이 실현 가능한 양상을 보이고 있으며, 그림 5와 표 1을 통해서 최종 형상이 원하는 목적에 잘 부합됨을 알 수 있다.



— : dirichlet
- - - : neumann

그림 5. 설계 모델의 최종 형상



그림 6. 최종 형상에서의 등전위 분포

N	H _x	H _y	N	H _x	H _y
1	-8.705E-01	-35.10403	6	-3.399E-01	-36.61898
2	-10.42E-01	-35.82489	7	-1.267E-01	-35.54836
3	-13.84E-01	-36.26527	8	-7.986E-02	-35.74816
4	-3.767E-01	-35.42796	9	3.541E-01	-35.95701
5	-4.665E-01	-35.86754			

표 1. 최종 형상에서의 관측점의 자속 밀도

그림 6은 반복 횟수에 따른 목적 함수의 수렴 양상을 나타내었다.

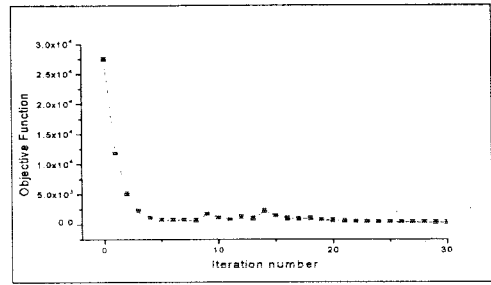


그림 7. 목적 함수 수렴 양상

4 결 론

입력 전류 분포 최적화 문제를 다루는데 있어서 기존의 방법은 주로 코일의 형상이 정해진 상태에서 위치나 폭을 변화시켜 최적화를 수행하였다. 그러나, 이 방법으로는 코일 자체의 개수가 미리 주어진 구속 조건 안에서 최적해를 찾기 때문에 전역 최적점을 찾는 데 한계를 지닌다. 따라서 본 논문에서는 입력 전류가 차지할 영역을 균일한 면적의 소단위로 분할하고 이를 설계 변수로 하여 결정론적 최적화 방법인 최대 경사법을 이용하여 최적의 입력 전류 분포를 구하였다. 제안된 방법은 입력 전류 분포가 중요한 의미를 가지는 많은 전기 기기 문제에 적용이 가능하리라 본다.

(참 고 문 헌)

- [1] E.J. Haug, K.K.Choi and V. Komkov, Design Sensitivity Analysis of Structural System, Academic Press, New York N.Y., 1986
- [2] Jin-kyu Byun, Kyung Choi, Il-han Park, Hyun-kyo Jung and Song-yop Hahn, "Optimal Temperature Control for Induction Heating Devices Using Physical and Geometrical Design Sensitivity," IEEE Trans. on Magnetics, vol.34, no. 5, pp. 3114-3117, 1998
- [3] J. Simkin, C.W. Trowbridge, "Optimization problems in electromagnetics", IEEE Trans. on Magnetics, vol.27, no. 5, pp. 4016-4019, 1991
- [4] D.A. Lowther, W. Mai and D. N. Dyck, "A Comparison of MRI Magnet Design Using a Hopfield Network and the Optimized Material Distribution Method," IEEE Trans. on Magnetics, vol.34, no. 5, pp. 2885-2888, 1998
- [5] Dimitri P. Bertsekas, Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods, Academic Press, New York N.Y., 1982