

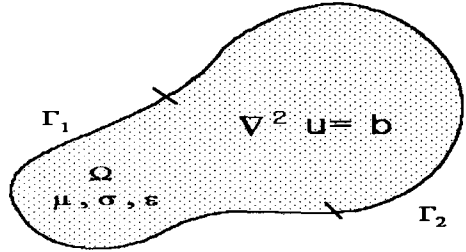
경계요소법을 이용한 2차원 와전류 문제에 대한 연구

임 의 수*, 이 향 범
 송실대학교 전기공학과

A Study of 2-D Eddy Current Problem Using Boundary Element Method

Eui-soo Lim*, Hyang-beom Lee
 Dept. of Electrical Eng., Soongsil University

Abstract - This paper presents a study of 2-dimensional(2-D) eddy current problem using boundary element method(BEM). When compared with finite element method(FEM), there are only a few unknown variables in BEM because it implements numerical analysis only for the surface or boundary of a model. As a result, a lot of computational memory and time can be saved. In order to analyze 2-D eddy current problem, potentials and its derivatives(flux) in a boundary are used as variables. The Hankel function of the second kind of the zero order is used here as a fundamental solution. In order to remove singularity and to solve the integral equations in a boundary, Subtracting Singularity Method and Gauss Quadrature Formula are adopted in this paper.



$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$$

그림 1. 경계요소 정식화 모델

1. 서 론

본 논문에서는 경계요소법을 이용한 2차원 와전류 문제 해석에 관하여 연구하였다. 유한요소법의 경우 상대적으로 많은 미지수가 사용되지만 경계요소법에서는 주어진 해석대상의 경계나 표면에 대하여서만 요소분할이 수행되므로 유한요소법에 비하여 미지수가 현저히 감소하여 필요한 메모리 용량과 계산시간이 줄어들게 된다.

2차원 와전류 문제를 해석하기 위하여 사용한 미지수는 경계에서의 포텐셜값과 그에 대한 미분값이다. 경계요소 정식화 과정에서 기본해(fundamental solution)로서 Bessel 함수 중의 하나인 Hankel 함수를 사용하였다. 경계 적분식 발생하는 특이점의 발생 문제는 Subtracting Singularity Method를 사용하여 특이점을 제거해 주었고 Gauss Quadrature Formula를 통하여 적분식을 계산하였다. 또한 실수 입력뿐만 아니라 복소수 입력을 가지는 Hankel 함수에 대해서도 고려를 해주었으며 사각 단면을 가지는 무한히 긴 도체에 대해 2차원 와전류 문제 해석방법에 대하여 연구하였다.

2. 2차원 경계요소 정식화

Helmholtz 방정식이나 Poisson 방정식과 같은 미분 방정식들에 대한 경계요소 정식화 과정은 그들의 Green 함수나 기본해에 의해서 구별되어지며 다음의 과정을 통하여 정식화된다.

먼저 그림 1에서의 지배방정식은

$$\nabla^2 u = b \tag{1}$$

이 되고 가중 잔차법을 적용하면 다음과 같이 된다.

$$\int_{\Omega} w(\nabla^2 u - b) d\Omega = 0 \tag{2}$$

Green의 두 번째 정리에 의하여 식(1)은 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\int_{\Omega} w \nabla^2 u d\Omega = \int_{\Omega} u \nabla^2 w d\Omega + \int_{\Gamma} w \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma} u \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma \tag{3}$$

가중함수의 해로서 Dirac-Delta 함수를 대입하면 식(1)은 다음과 같이 되고

$$u_i = \int_{\Gamma} G^* \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma} u \frac{\partial G^*}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Omega} G^* b d\Omega \quad (i \in \Omega) \tag{4}$$

식(4)에 $u = \vec{A}$, $b = -\mu \vec{J}_0$ 를 대입하면 다음과 같이 된다.

$$c_i \vec{A}_i = \int_{\Gamma} G^* \frac{\partial \vec{A}}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial G^*}{\partial n} \vec{A} d\Gamma + \int_{\Omega} G^* \mu \vec{J}_0 d\Omega \quad (i \in \Omega) \tag{5}$$

$$c_i = \begin{cases} 1 & \vec{r} \in \Omega \\ 1/2 & \vec{r} \text{ on smooth boundary} \\ 0 & \vec{r} \notin \Omega \end{cases}$$

여기서 G^* 는 식(1)의 기본해이며 각각의 지배방정식에 따라서 표 1과 같이 나타난다.

표 1에 나타난 바와 같이 2차원 와전류 문제의 정식화는 Helmholtz 방정식을 지배방정식으로 하며 그에 따른 기본해로서 Bessel 함수의 하나인 Hankel 함수를

사용한다. Bessel 함수는 응용수학에 있어서 중요한 미분방정식의 하나로서 진동, 정전기장, 열전도 등의 문제에서 발생한다.

표 1. 전자기 문제에 따른 fundamental solution

전자기문제	지배방정식	2차원	3차원
교류자장	Helmholtz	$\frac{1}{4j} H_0^{(2)}(\beta r)$	$\frac{1}{4\pi r} e^{-j\beta r}$
정전기학 정자기학	Laplace or Poisson	$\frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right)$	$\frac{1}{4\pi r}$

(r : source point와 field point간의 거리
 β : 복소상수 $\beta = \sqrt{-j\mu\omega\sigma}$)

따라서 fundamental solution G^* 는

$$G^* = \frac{1}{4j} H_0^{(2)}(\beta r) \quad (6)$$

이고 $H_0^{(2)}(\beta r)$ 는 zero-차의 제3종 Bessel 함수 또는 zero-차의 제2종 Hankel 함수이며 다음과 같이 정의된다.

$$H_0^{(2)}(\beta r) = J_0(\beta r) - jY_0(\beta r) \quad (7)$$

여기서 함수 J_0 와 Y_0 는 각각 zero-차의 제1종 Bessel 함수와 zero-차 제2종 Bessel 함수 또는 Neumann 함수로서 정의되는데 실수입력에 대한 각각의 분포는 그림 2에 나타나 있다.

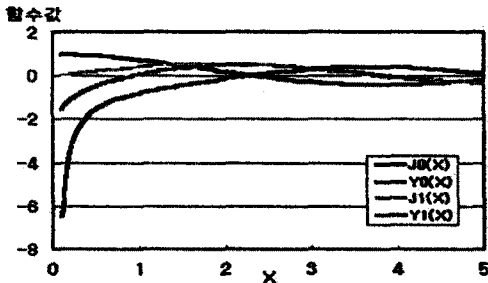


그림 2. Bessel 함수

결국 G^* 와 그에 따른 미분값 $\partial G^*/\partial n$ 는 다음과 같이 정의된다.

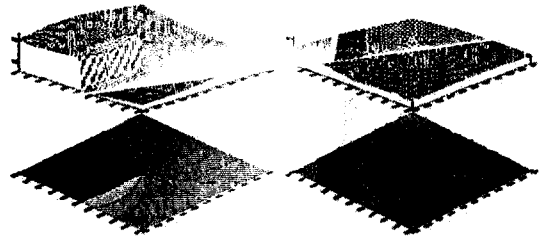
$$G^* = \frac{1}{4j} [J_0(\beta r) - jY_0(\beta r)] \quad (8)$$

$$\frac{\partial G^*}{\partial n} = \frac{\beta}{4j} [-J_1(\beta r) + jY_1(\beta r)] \nabla r \cdot \vec{n} \quad (9)$$

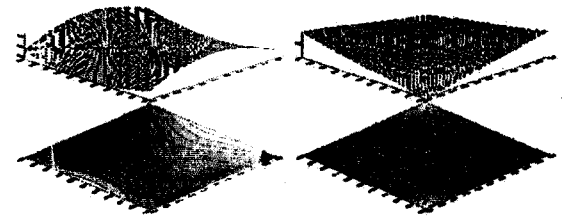
그림 2에서와 같이 Bessel 함수 Y_0 와 Y_1 는 입력이 zero인 점에서 특이점을 가짐을 알 수 있는데 이것은 실수입력에 대해서뿐만 아니라 복소수 입력에 대해서도 마찬가지이다. 이 문제점을 해결하는 것이 2차원 와전류 문제 해석에 있어서 가장 큰 과제로 지적된다. 이에 대한 해결 방안은 다음절에서 논의한다.

그림 3, 그림 4, 그림 5는 각각 복소수 입력을 가지는 $H_0^{(2)}(\beta r)$, $J_0(\beta r)$, $Y_0(\beta r)$ 을 나타낸다. 분포 범위는 실수부분과 허수부분 모두 -1.0~1.0이고 밀도정

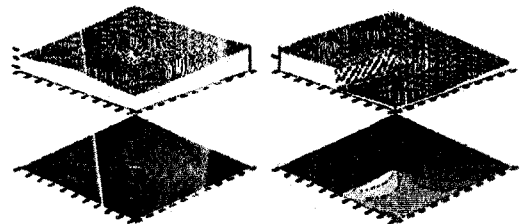
도에 따라 표면분포도와 등위선으로 표현되어 있다.



(a) 실수부분 (b) 허수부분
 그림 3. Hankel 함수 $H_0^{(2)}(\beta r)$



(a) 실수부분 (b) 허수부분
 그림 4. Bessel 함수 $J_0(\beta r)$



(a) 실수부분 (b) 허수부분
 그림 5. Bessel 함수 $Y_0(\beta r)$

3. Hankel 함수의 적분

경계요소 적분과정에서의 특이점은 해석 모델의 원점 (source point)가 고려중인 요소의 한 절점에 위치함으로써 발생하며 이에 대한 적분은 일반적인 적분 방법으로는 계산이 불가능하다. 따라서 원 함수에서 특이점을 제거하고 적분 수행함으로써 적분식을 계산할 수 있는데 이 방법이 Subtracting Singularity Method이며 Hankel 함수의 $Y_0(\beta r)$ 과 $Y_1(\beta r)$ 의 특이점을 제거해 줌으로써 식(8) 4 식(9)에 대한 적분식을 계산할 수 있다. 먼저 다음의 적분식이 점 a에서 특이점을 갖는다고 가정한다.

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad (10)$$

특이적분을 수행하기 위해선 먼저 함수 $f(x)$ 와 같이 점 a에서 같은 형태의 특이점을 가지며 해석적인 방법이나 Quadrature Formula에 의해 계산 가능한 함수 $g(x)$ 를 찾아내어 식(10)에 적용하면 다음과 같은 식을

얻을 수 있다.

$$I = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx + \int_a^b g(x) dx \quad (11)$$

식(11)의 우변의 첫째항은 Standard Quadrature formula에 의해 정의되므로 계산 가능하다. 따라서 식(8)과 (9)를 이와 같은 방법으로 계산할 수 있다.

$$Y_0(\beta r) = \frac{2}{\pi} J_0(\beta r) [\ln(\beta r) + \gamma_0 - \ln 2] + g(\beta r) \quad (12)$$

여기서 γ_0 는 Euler 상수이며, β 는 복소 상수이다. $J_0(\beta r)$ 는 zero-차 제1종 Bessel 함수로서 $J_0(0) = 1$ 이고 $g(\beta r)$ 은 $g(0) = 0$ 인 적분 함수이다. 따라서 식(12)는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} [Y_0(\beta r) - \frac{2}{\pi} J_0(\beta r) \ln r] &= \frac{2}{\pi} (\ln \frac{\beta}{2} + \gamma_0) \quad (14) \\ &= \int_{-1}^1 \phi_m(\xi) Y_0(\beta r) d\xi \\ &= \int_{-1}^1 \phi_m(\xi) [Y_0(\beta r) - \frac{2}{\pi} J_0(\beta r) \ln r] d\xi \\ &+ \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \phi_m(\xi) J_0(\beta r) \ln \frac{2r}{1+\xi} d\xi \\ &+ \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \phi_m(\eta) J_0(\beta L_i \eta) \ln \eta d\eta \quad (\eta = \frac{1+\xi}{2}) \quad (15) \end{aligned}$$

여기서 $\phi_m(\xi)$ 는 형상함수로서 그림 6과 같이 Gaussian Quadrature formula에 의한 좌표계의 변환을 통하여 각 요소의 절점값에 대하여 표현된다. 따라서 식(15)에서 우변의 첫 번째와 두 번째 항은 Standard Gaussian Quadrature Formula를 통하여 풀 수 있으며 세 번째 항은 LOG-weighted Gaussian Quadrature Formula를 이용하여 계산할 수 있다.

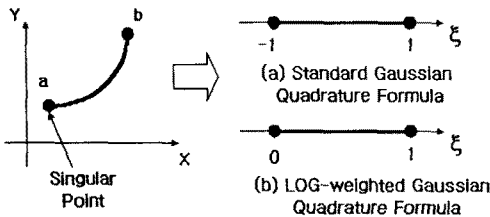


그림 6. Gaussian Quadrature Formula를 위한 좌표계의 변환

4. 수치해석 예제

그림 7(a)와 같이 $20mm \times 20mm$ 의 사각 단면을 가지는 긴 도체가 있다. 도체의 내부에는 $1(T)$ 의 균등 교류 자장이 분포되어 있다. 그림 7(b)는 이 도체의 단면에서의 경계요소 분할을 나타내고 있다. 경계에는 8개의 절점과 8개의 요소로 구성되어 있으며 9개의 내부 점들을 포함하고 있다.

먼저 이 도체의 길이가 무한히 길다고 가정하면 2차원 문제로서 정의가 가능해진다. 따라서 경계요소 정식화를 통하여 얻어진 기본해를 이용하여 주어진 해석 예제에 경계요소법을 적용하여 2차원 와전류 문제를 풀 수 있다. 해석 과정에서 특이점 발생과 복소수 입력에

따른 Hankel 함수의 적분계산은 매우 중요한 문제이므로 많은 관심이 요구된다.

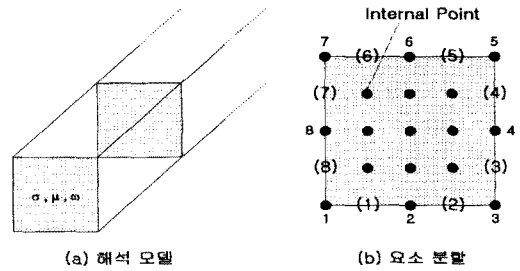


그림 7. 해석 대상 및 경계요소 분할

5. 결 론

본 논문에서는 경계요소법을 이용한 2차원 와전류 문제에 대한 연구를 위하여 Helmholtz 방정식을 지배방정식으로 하고 복소수 입력을 가지는 Hankel 함수를 기본해로 사용하였다. Hankel 함수의 복소수 입력에 따른 계산의 어려움과 경계요소 적분과정에서 발생하는 특이점을 Subtracting Singularity Method와 Gaussian Quadrature Formula를 통하여 해결하였다. 이와 같은 방법을 토대로 하여 얻은 해석결과와 같은 모델에 대해서 유한요소법과 같은 다른 수치 해석방법을 통하여 얻은 결과와의 비교를 통해 본 논문에서 제안된 알고리즘의 타당성을 검증할 수 있으리라 사료된다.

[참 고 문 헌]

- [1] A. A. Becker, *The Boundary Element Method in Engineering*, McGraw-Hill, 1992
- [2] J. Shen, "Computational Electromagnetics using Boundary Elements Advances in Modelling Eddy Currents", *Topics in Engineering*, Vol.24, 1995
- [3] T. Rudolph and V. Peterson, "A Modular Program for Poisson's Equation with Linear Boundary and Domain Elements", *Adv. Eng. Software*, Vol.9, No.1, 1987
- [4] G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press, Inc., 1985
- [5] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical Recipes in Fortran*, Cambridge University Press, 1992