

유한요소법을 이용한 3차원 관결합의 와전류탐상 수치해석

원성연*, 이향범, *신영길
 송실대학교 전기공학과, *군산대학교 전기공학과

Numerical Analysis of Eddy Current Testing with Three Dimensional cracked Pipe by using Finte Element Method

Sung-yeon Won*, Hyang-beom Lee and *Young-gil Shin
 Dept. of Electrical Eng., Soongsil Univ., *Dept. of Electrical Eng., Kunsan Natl. Univ.

Abstract - This paper presents a numerical analysis of the eddy current testing with cracked pipe using finite element method (FEM). $\vec{A}, \phi - \vec{A}$ method is adopted for the formulation of 3-dimensional(3-D) FEM with the brick element. The cracks investigated here are the inner and outer surface of axial symmetry, 90 degree circular one. The algorithm of 3-D numerical analysis is employed for the axisymmetric pipe with the cracks. In order to verify the validity of 3-D numerical analysis, the results are compared with those of 2-D analysis with the same type of the model. The differential impedance is obtained by using energy method and its locus are various 8-shaped curves for each cracks. The ICCG method is used for the calculation of a matrix.

실질적인 한계가 있기 때문에 반복법중 ICCG를 이용하여 메모리사용문제를 해결하였다.

2. 해석 이론

와전류문제의 해석을 위하여 맥스웰방정식의 미분형을 사용하였다. 맥스웰 방정식중 변위전류밀도항은 본 해석 모델의 주파수가 저주파수이기 때문에 무시되었다. 해석 모델에서 적용되는 맥스웰 방정식과 경계조건 및 매질 연속조건들은 각 영역에 따라 다음과 같이 정의된다.

영역 Ω_1 : 도체로 구성되어있고 와전류가 흐르는 영역

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_e \tag{2.1}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{2.2}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{2.3}$$

$$\vec{J}_e = \sigma \vec{E} \tag{2.4}$$

1. 서 론

비파괴검사의 한 분야인 와전류탐상기법을 이용하면 원자력발전소의 증기발생관과 같이 직접 조사 할 수 없는 곳의 관 결함을 조사 할 수 있다. 이 도체 관의 결함은 교류전류가 인가된 프로브를 도체 관 내부에 통과시켜 발생되어 나오는 차동임피던스 궤적을 구함으로써 알 수 있다. 결함을 추측하기 위하여 실제적인 실험에 의한 차동임피던스 궤적 데이터생성은 시간 및 비용이 많이 들게되는 어려운 점이 있으나 수치 해석적인 방법의 이용은 실제 실험상의 어려운 문제들을 해결 할 수 있는 장점이 있다.

영역 Ω_2 : 와전류가 흐르는 영역을 제외한 영역

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_s \tag{2.5}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{2.6}$$

경계조건: 최외곽 경계

$$\vec{B} \cdot \vec{n} = 0 \text{ on } \Gamma_B \tag{2.7}$$

$$\vec{H} \times \vec{n} = 0 \text{ on } \Gamma_H \tag{2.8}$$

매질경계조건 : 도체와 공기영역 경계

$$\vec{B}_1 \cdot \vec{n}_1 + \vec{B}_2 \cdot \vec{n}_2 = 0 \tag{2.9}$$

$$\vec{H}_1 \times \vec{n}_1 + \vec{H}_2 \times \vec{n}_2 = 0 \tag{2.10}$$

수치 해석적인 방법으로 구해지는 차동임피던스는 전자기적으로 와전류문제를 해석해야하며 공간에 저장된 자기에너지와 와전류에 의해 발생된 열 손실에 의하여 구해진다. 수치 해석적인 방법은 유한요소법을 이용하였다. 유한요소법을 적용하는데 있어서 도체 관의 결함이 축대칭 결함일 경우에는 2차원 해석으로도 해결할 수 있으나, 대부분의 결함이 3차원 결함이기 때문에 3차원 해석을 수행하여야 한다. 3차원 유한요소법을 적용하는 데는 미지변수선택에 따라 여러 가지 방법이 있을 수 있으나, 본 논문에서는 $\vec{A}, \phi - \vec{A}$ 방법으로서 와전류가 유 기 되는 도체영역에서는 \vec{A}, ϕ 를 그 이외의 공기와 전류원이 존재하는 영역에서는 \vec{A} 를 사용하였다(1,2).

\vec{n}_1, \vec{n}_2 는 각 영역에서 다른 영역으로 향하는 단위 법선 벡터이다.

각 영역에 정의되는 위 식들을 이용하여 유한요소방정식을 생성하게되고 3차원유한요소정식화에는 각 영역의 변수선택에 따라 다양한 방법이 있을 수 있으나 본 논문에서는 $\vec{A}, \phi - \vec{A}$ 방법을 사용하였다. 즉 와전류가 흐르는 도체영역 Ω_1 에서는 \vec{A}, ϕ 를 그 이외의 영역 Ω_2 에서는 \vec{A} 만 사용하였다.

영역 Ω_1 :

식 (2.2)와 (2.4)를 이용하여 식 (2.1)에 대입하여 정리하면 다음 식과 같이 된다.

$$\nabla \times \nu \nabla \times \vec{A} - \nabla \nu \nabla \cdot \vec{A} + \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \sigma \nabla \phi = 0 \tag{2.11}$$

해석모델의 도체 관 결함은 외부 축대칭 결함 및 90° 결함과 내부 축대칭결함 및 90° 결함이다. 축대칭 결함은 3차원 수치해석알고리즘을 검증하기 위하여 2차원 해석결과와 비교하였고 두 해석결과는 거의 유사하였다. 90° 결함모델 해석은 축대칭 결함모델에 대한 3차원 해석 결과의 신빙성을 근거로 하여 3차원 수치해석 알고리즘에 적용하였다. 요소는 육면체 요소를 사용하였다(3). 행렬계산은 직접법을 사용하면 컴퓨터메모리의

전류의 연속방정식은 다음 식과 같이 0 이 된다.

$$\nabla \cdot \left(-\sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \sigma \nabla \phi \right) = 0 \quad (2.12)$$

영역 Ω_2 :

식 (2.5)는 다음 식과 같이 된다.

$$\nabla \times \nu \nabla \times \vec{A} - \nabla \nu \nabla \cdot \vec{A} = \vec{J}_s \quad (2.13)$$

경계 Γ_B :

최외곽 경계에서의 \vec{B} 에 대한 경계조건은 다음 식과 같다.

$$\vec{n} \times \vec{A} = 0 \quad (2.14)$$

$$\nu \nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad (2.15)$$

경계 Γ_H :

최외곽 경계에서의 \vec{H} 에 대한 경계조건은 다음 식과 같다.

$$\nu \nabla \times \vec{A} \times \vec{n} = 0 \quad (2.16)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{A} = 0 \quad (2.17)$$

매질경계 Γ_{12} :

\vec{A} 는 각 절점에서 연속이므로 다음 식과 같다.

$$\vec{A}_1 = \vec{A}_2 \quad (2.18)$$

$$\nu_1 \nabla \times \vec{A}_1 \times \vec{n}_1 + \nu_2 \nabla \times \vec{A}_2 \times \vec{n}_2 = 0 \quad (2.19)$$

$$\nu_1 \nabla \cdot \vec{A}_1 - \nu_2 \nabla \cdot \vec{A}_2 = 0 \quad (2.20)$$

$$\vec{n} \cdot \left(-\sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \sigma \nabla \phi \right) = 0 \quad (2.21)$$

식 (2.11), (2.13)에 \vec{A} 의 유일성을 보장하기 위해서 쿨롱계이지 조건인 $\nabla \cdot \vec{A}$ 를 더해준다.

각 영역 및 최외곽과 매질간의 경계조건식에 유한요소 방정식을 생성하는 방법중 가중잔차법의 일종인 갤러킨법을 적용하면 정식화식을 얻을 수 있다. 생성된 유한요소 방정식을 모든 요소에 대하여 조립하게 되면 대행렬식이 만들어지게 되고, 이 대행렬식을 계산함으로써 모든 절점에서의 포텐셜값들을 구할 수 있다.

3. 임피던스 계산

실제시험상의 프로브는 차동프로브로서 일정한 간격을 두고 있는 두 개의 코일에 각기 서로 다른 방향의 전류를 인가하게 된다. 임피던스는 각 코일에서 유기 되는 기전력과 와전류를 이용하여 계산하게 되고 차동임피던스는 두 임피던스를 더해지게 되면 구해지게 된다. 본 논문에서는 차동 프로브를 사용하지 않고 한 개의 코일에만 전류를 인가하는 절대프로브를 이용하였다. 절대프로브에서는 절대임피던스만을 계산하게 되고 차동프로브의 코일간격을 고려하여 차동임피던스를 유추하게 된다. 따라서 절대프로브를 이용하여 임피던스를 계산하는 데는 에너지를 이용하는 방법이 적용된다.

유한요소법을 이용하여 구한 자기벡터 포텐셜과 전기 스칼라포텐셜은 자속밀도와 와전류값을 구할 수 있게 되고, 이들 값으로부터 공간에 저장된 에너지와 도체의 열 손실을 구할 수 있다. 임피던스는 공간에 저장된 에너지와 열 손실을 이용하여 계산하였다.

공간상에 축적된 에너지는 다음 식과 같이 계산되고

$$W_s = \int_V \vec{H} \cdot d\vec{B} \quad (3.1)$$

와전류에 의해 발생하는 열 손실은 다음 식과 같이 된다.

$$P_d = I^2 R = \frac{J_e^2}{\sigma} V \quad (3.2)$$

여기서 V 는 공간의 부피이다. 공간에 저장된 에너지는 리액턴스성분을 의미하고, 와전류에 의해서 발생하는 열 손실은 저항성분을 의미한다.

$$W_s = \frac{1}{2} L I^2 \quad (3.3)$$

$$P_d = R I^2 \quad (3.4)$$

위 두 에너지를 이용하면 다음과 같이 임피던스를 구할 수 있다.

$$Z = (R + j\omega L) = \frac{1}{I^2} (P_d + j\omega 2W_s) \quad (3.5)$$

각 구간에서 구한 임피던스를 코일간격을 고려하여 배주개 되면 차동임피던스를 계산할 수 있다.

4. 수치해석 사례

본 논문의 해석모델인 도체 관과 코일 및 결합의 크기는 표 1과 같다. 도체 관 내부에는 z 축 방향으로 이동하는 코일이 있게 되고 이 코일은 θ 방향으로 감겨 있으며 교류전류가 인가된다. 요소 분할은 r, θ, z 의 각 방향에 대하여 구간을 나누었고, 사용된 요소는 육면체 요소이다. 그림 1은 도체 관을 중심으로 확대시켜 나타난 모델형상 및 요소 망이다. 좌측그림은 rz 평면상이고, 우측그림은 z 평면상에서 본 그림이다.

표 1. 도체 관의 크기 및 결합의 크기 (단위:mm)

항목	값	항목	값
관 외경	19.05	관 내경	16.47
관 두께	1.29	관 재질	Inconel 600
프로브 외경	15.45	프로브 내경	12.45
프로브 두께	1.52	프로브 간격	1.52
프로브 폭	1.52	결합 폭	0.38

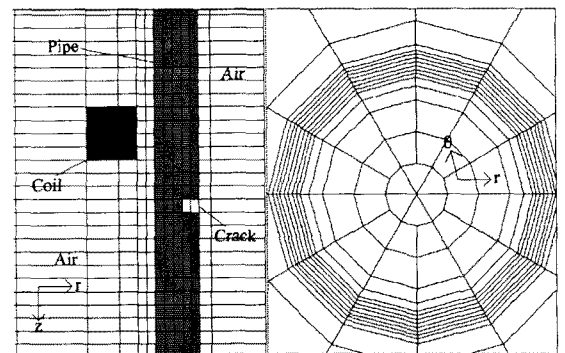
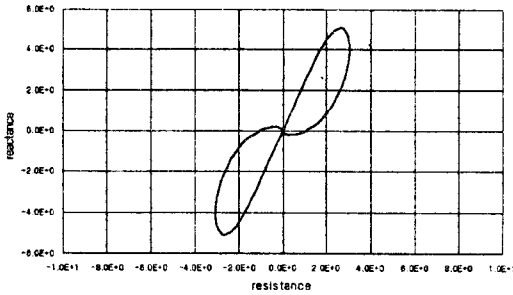


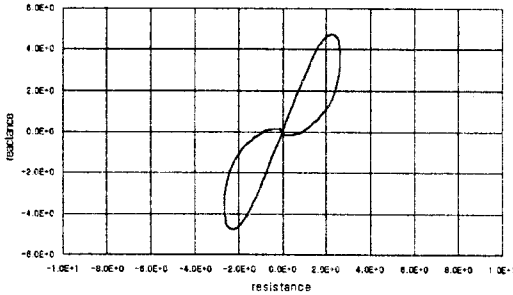
그림 1. 해석 형상 및 요소 망

포텐셜값은 코일이 z 축으로 이동하면서 매번 구하게 되며, 포텐셜값에 의해서 와전류, 에너지 및 임피던스를 구하게 된다. 차동임피던스는 코일의 z 축 폭과 코일의 간격을 고려하여 절대임피던스로부터 유추한다.

관결합은 내부 결합과 외부 결합에 대하여 적용하였다. 각각의 결합은 축대칭결합과 90° 결합이며 3차원 유한요소수치해석법의 타당성을 검증하기 위하여 먼저 축대칭결합문제를 해석하였다. 축대칭결합모델에 대한 2차원 해석과 3차원해석의 결과는 그림2로 나타난다.

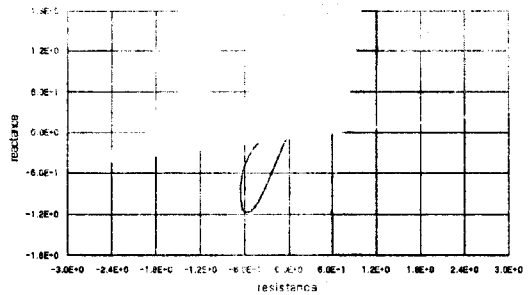


(a) 2차원 해석

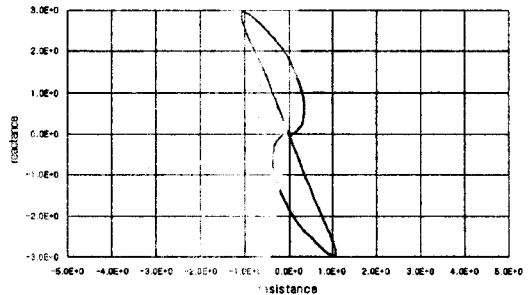


(b) 3차원 해석

그림 2. 축대칭 외부결합



(a) 외부결합



(b) 내부결합

그림 3 90° 결합

표 2. 계산시간

결합		unknown	nonzero	CPU-time
외부	축대칭	64269	5043447	10시간35분29초
	90°	93219	7328997	18시간36분19초
내부	축대칭	64269	5043447	37시간32분40초
	90°	93219	7328997	37시간51분23초

의 정식화 방법은 \vec{A}, ϕ, \vec{A} 를 사용하였다. 해석모델들은 축대칭 모델과 90° 모델이고, 각각의 모델들은 내부결합 및 외부결합에 대하여 해석하였다. 축대칭 결합모델은 3차원수치해석 알고리즘을 검증하기 위하여 먼저 2차원해석에 적용되었고 그 결과를 비교하여 3차원수치해석 알고리즘의 타당성을 얻을 수 있었다. 결합크기를 해석하기 위하여 차동임피던스의 8자곡선을 구했으며, 차동임피던스는 에너지 방법을 이용하여 구하였다. 행렬계산은 반복법 중 ICCG를 사용하였고 메모리 사용량을 직접법 적용시보다 현저히 줄일 수 있었다. 본 수치해석 알고리즘을 이용하면 90° 결합뿐만 아니라 다양한 3차원 결합에 대해서도 좋은 결과를 얻을 수 있을 것이다.

(참고 문헌)

- [1]Oszkar Biro and Kurt Preis, "On the use of the magnetic vector potential in the finite element analysis of three-dimensional eddy currents", *IEEE Trans. On Magnetics*, Vol.25, pp.3145-3159, July 1989
- [2]Oszkar Biro, Kurt Preis, W. Renhart, "Finite element analysis of 3D multiply connected eddy current problems", *IEEE Trans. On Magnetics*, Vol. 25, pp.4009-4011, Sep. 1989
- [3]Gouri L.Matt, Gilbert Touzot, Gilles Cantin, *The Finite Element Method Displayed*, JOHN WILEY & SONS, 1982

본 연구는 기초전력공학공동연구소의 연구비지원을 받았습니다.

축대칭 결합에 대한 차동임피던스 궤적은 그림 2(a)와 같이 임피던스 평면상에 8자 곡선을 그리게 된다. 차동임피던스가 처음 위치 즉 코일의 이동이 시작되는 곳에서는 도체 관 결합의 영향이 매우 적으므로 임피던스 차이가 거의 없게된다. 그러므로 차동임피던스는 원점에서 출발하게되고 점차 결합에 가까워질수록 그 크기가 커지는 것을 볼 수 있다. 그림 2(b)는 3차원 해석결과로서 2차원 해석결과와 비교하여 보면 8자곡선의 형태나 크기가 거의 유사함을 볼 수 있다. 그림2(a)와 그림2(b)가 약간의 차이가 나는 것은 2차원해석은 완전한 원통형모델이고 3차원 해석은 원통을 그림 1의 우측 그림과 같이 직선으로 근사화 시켰기 때문으로 유추된다. 다음 그림 3(a)는 3차원의외부결합으로 θ 방향으로 90°인 모델에 적용하여 얻은 차동임피던스 궤적이다. 결합의 크기는 축대칭 모델의 1/4 이기 때문에 차동임피던스 궤적도 그 크기가 거의 1/4정도 줄어든 것을 알 수 있으며, 그림 3(b)는 3차원 내부결합으로 θ 방향으로 90°인 모델의 차동임피던스 궤적이다. 내부결합 차동임피던스 궤적이 외부결합보다 더 커진 것을 볼 수 있는데, 이것은 자기 벡터 포텐셜 값이 반지름에 반비례하므로 외부결합보다 내부결합이 입력전류에 더 큰 영향을 받는다고 볼 수 있다. 위 모델들의 해석 결과를 비교하여 보면 내부결합과 외부결합의 기울기는 서로 부호가 반대이며 결합의 크기가 비슷할지라도 내부결합의 차동임피던스 궤적이 더 큰 것을 알 수 있다.

수치계산시간과 결합종류에 따른 미지수와 nonzero는 표 2와 같다. 계산시 허용오차는 uniform norm을 사용하여 10^{-11} 로 하였다. 행렬계산은 직접법을 이용하게 될 경우 컴퓨터 메모리 사용의 한계 문제가 발생하므로 반복법중 ICCG를 사용하여 부족한 메모리 문제를 해결하였으나 계산시간이 직접법에 비해 긴 단점이 있었다.

5. 결 론

관결합을 파악하는데 있어서 3차원 유한요소법을 이용하여 와전류탐상 수치해석을 수행하였고, 유한요소법