비균질 탄성지반 위에 놓인 보-기둥의 자유진동

Free Vibrations of Beam-Columns on Non-Homogeneous Foundation

이 병 구*(원광대) · 오 상 진(담양대) · 이 태 은(원광대)
Lee, Byoung Koo · Oh, Sang Jin · Lee, Tae Eun

Abstract

The purpose of this study is to investigate the natural frequencies and mode shapes of beam-columns on the non-homogeneous foundation. The beam model is based on the classical Bernoulli-Euler beam theory. The linear foundation modulus is chosen as the non-homogeneous foundation in this study. The differential equation governing free vibrations of such beam-columns subjected to axial load is derived and solved numerically for calculating the natural frequencies and mode shapes. In numerical examples, five kinds of end constraint are considered, and the lowest four natural frequencies and corresponding mode shapes are obtained as the non-dimensional forms.

Ⅰ. 서 론

보-기둥은 가장 기본이 되는 단위구조 중에 하나이며, 각종 주요 구조물에서 뼈대구조로 이용되고 있을 뿐만 아니라 탄성지반 위에 부설되어 기초 구조물로도 많이 활용되고 있다. 기초 구조물이 동적 하중을 지지하는 경우에 무엇보다도 기초 구조물의 자유진동 해석이 선행되어야 한다. 일반적으로 보-기둥을 지지하고 있는 지반의 지반탄성계수가 일정하지 않으며 이러한 경우에 지반탄성계수의 비균질성이 자유진동 해석에 필수적으로 고려되어야 한다.

이러한 관점에서 이 연구는 비균질 지반 위에 놓인 보-기둥의 자유진동을 해석하는 데 연구 목적이 있다. 이 연구에서는 지반탄성계수의 비균질성을 선형으로 변화하는 지반탄성계수로 가정하여 자유진동을 지배하는 미분방정식을 유도하고 이를 수치해석하여 고유진동수와 진동형을 산출하였다. 수치해석 예에서는 회전-회전, 회전-고정, 고정-고정, 고정-자유 및 회전-자유의 5가지 단부조건에 대하여 최저차 4개의 무차원 고유진동수를 산출하였다.

Ⅱ. 수학적 모형

Fig. 1(a)는 비균질 탄성지반 위에 놓인 보-기둥을 나타내고 있다. 이 그림에서 l은 지간길이, P는 압축을 "+"로 하는 축하중이고, K_x는 축방향의 임의위치 x에서 지반탄성계수를 나타내며 앞에서 설명한 바와 같이 비균질이다. Fig. 1(b)는 자유진동하는 보-기둥의 전형적인 진동형을 나타내며 조화진동으로 가정하였다.

1999년도 한국농공학회 학술발표회 논문집 (1999년 10월 16일)

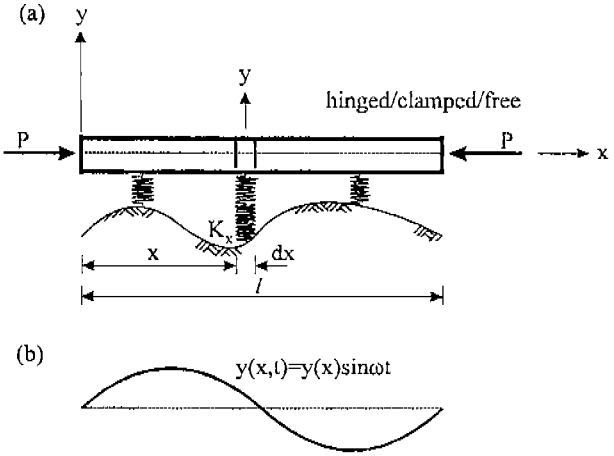

Fig. 1 (a) Beam-columns on non-homogeneous Foundation
(b) Typical mode shape.

축하중을 받는 탄성지반 위에 놓인 보-기둥의 조화진동을 Fig. 1(b)에 표시한 바와 같이 $y(x,t)=y(x)\sin\omega t$로 가정하면 다음과 같이 Bernoulli-Euler보의 자유진동을 지배하는 상미분 방정식이 유도되며[1], 이 조화진동식에서 $y(x,t)$는 동적 변위, $y(x)$는 진동형, ω는 고유각 진동수, t는 시간이다.

$$EI\frac{d^4y}{dx^4}+P\frac{d^2y}{dx^2}-m\omega^2y+K_xy=0 \tag{1}$$

(1)식에서 EI는 휨강성, m은 보-기둥 재료의 단위길이당 질량이고, $y=y(x)$이다.

Fig. (2)는 본 연구에서 채택한 비균질 지반의 지반탄성계수를 나타내며, 축방향 좌표 x에 따라서 선형으로 변화하는 다음 식의 지반탄성계수식을 채택하였다.

$$K_x=K_a[(\alpha-1)\frac{x}{l}+1] \tag{2}$$

$$\alpha=\frac{K_b}{K_a} \tag{3}$$

식 (3)에서 K_a, K_b는 각각 $x=0$, $x=l$에서 지반탄성계수이며 따라서 α는 지반탄성계수의

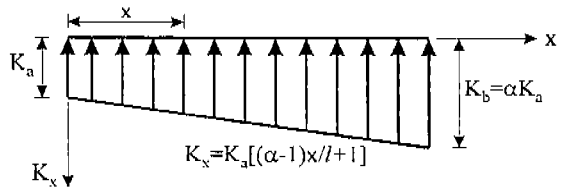

Fig. 2. Linear foundation modulus.

비균질 정도를 나타내주는 상수이다.

식 (1)에 식 (2)를 대입하면 선형 지반탄성계수를 갖는 지반 위에 놓인 축하중을 받는 보-기둥의 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$EI\frac{d^4y}{dx^4}+P\frac{d^2y}{dx^2}-m\omega^2y+K_a[(\alpha-1)\frac{x}{l}+1]y=0 \tag{4}$$

회전지점 ($x=0$ 또는 $x=l$)에서는 처짐 (y)와 휨모멘트 ($-EI\,d^2y/dx^2$)가 발생하지 않으므로 다음의 경계조건을 얻을 수 있다.

$$\text{회전지점: } y=0,\ \frac{d^2y}{dx^2}=0 \tag{5,6}$$

마찬가지 방법으로 고정지점 ($x=0$ 또는 $x=l$), 자유단부 ($x=0$ 또는 $x=l$)에서 경계조건은 다음과 같이 표시된다.

$$\text{고정지점: } y=0,\ \frac{dy}{dx}=0 \tag{7,8}$$

$$\text{자유단부: } \frac{d^2y}{dx^2}=0,\ \frac{d^3y}{dx^3}+P\frac{dy}{dx}=0 \tag{9,10}$$

미분방정식을 무차원으로 유도하기 위하여 다음의 무차원 변수들을 도입한다.

$$\xi=\frac{x}{l},\ \eta=\frac{y}{l},\ u_a=\frac{K_a l^4}{\pi^4 EI},\ p=\frac{P l^2}{\pi^2 EI} \tag{11,12,13,14}$$

위의 무차원 변수 식 (11)~(14)을 식 (4)에 적용시키고 정리하면 선형 지반탄성계수를 갖는 지반 위에 놓인 축하중을 받는 보-기둥의 자유진동을 지배하는 무차원 상미분방정식이 유도된다.

$$\frac{d^4\eta}{d\xi^4}=-\pi^2p\frac{d^2\eta}{d\xi^2}+[c_i^2-\pi^4u_a\{(\alpha-1)\xi+1\}]\eta \tag{15}$$

위의 식에서 c_i는 다음과 같이 정의되는 무차원 고유진동수이다

$$c_i=\omega_i l^2\sqrt{m/(EI)},\ i=1,2,3,4\cdots \tag{16}$$

식 (16)에서 i는 모드번호(mode number)이다.

마찬가지로 무차원 변수식 (11), (12)를 경계조건식 (5)~(10)에 적용시키면 다음과 같은 무차원 경계조건식들이 유도된다.

회전지점: $\eta=0,\ \frac{d^2\eta}{d\xi^2}=0$ (17,18)

고정지점: $\eta=0,\ \frac{d\eta}{d\xi}=0$ (19,20)

자유단부: $\frac{d^2\eta}{d\xi^2}=0,\ \frac{d^3\eta}{d\xi^3}+p\frac{d\eta}{d\xi}=0$ (21,22)

III. 수치해석 예 및 고찰

본 연구에서 무차원 미분방정식 (15)에 무차원 경계조건식 (17)~(22)를 이용하면 무차원 고유진동수 c_i와 진동형 $\eta=\eta(\xi)$를 산출할 수 있다. 미분방정식을 수치적분하기 위하여 Runge-Kutta법을 이용하고, 미분방정식의 고유치인 c_i값을 구하기 위하여 행열값 탐사법[2]을 이용하였다.

본 연구결과를 검증하기 위하여 이 연구의 결과와 유한요소해인 SAP 90의 결과를 Table 1에서 비교하였다. 이 표로부터 본 연구결과와 SAP 90의 결과가 아주 우수하게 근접함을 알 수 있다.

Table 1. Comparisons of c_i between this study and SAP 90

end constraint and u_a, α, p	data source	c_i			
		i=1	i=2	i=3	i=4
hinged-hinged	this study	32.73	50.33	94.15	161.0
u_a=10, α=1, p=0	SAP 90	32.54	51.04	94.65	158.8
hinged-clamped	this study	84.21	114.7	147.0	205.4
u_a=10, α=20, p=0	SAP 90	84.76	113.6	149.7	201.9
clamped-clamped	this study	31.33	65.53	122.9	201.1
u_a=10, α=0, p=0	SAP 90	30.43	67.65	124.6	198.5

Fig. 3.-7.은 $u_a=10$ 인 경우에 c_i와 α사이의 관계를 그림에 나타낸 것이며 α값이 증가할수록 c_i값은 모두 증가하고 있다. α값이 약 3이하에서는 c_i에 미치는 영향이 비교적 크지만 3보다 크게되면 그 영향은 다소 감소하는 것을 알 수 있다. 또한 고차모드에서 보다 저차모드에서 특히 제 1모드에서 α값의 영향이 더 큰 것을 알 수 있다.

Fig. 8.은 $u_a=10$ 인 경우에 단부조건별로 제 1모드와 제 4모드의 c_i값과 α사이의 관계를 그림에 나타낸 것이다. 이 그림을 살펴보면 제 1모드의 c_i값은 α값이 커짐에 따라서 두 개의 곡선군으로 수렴되는 것을 알 수 있다. 이는 α값이 커짐에 따라서 c_i값은 단부조건에 의해 지배되기 보다는 α값에 지배되어 회전단부와 고정단부를 갖는 두 개의 c_i vs. α곡선군으로 나누어지는 것을 의미한다. 그러나 제 4모드에서는 이상과 같은 자유진동 특성은 나타나지 않고 있어서 α값보다는 단부조건이 c_i값을 지배하고 있다.

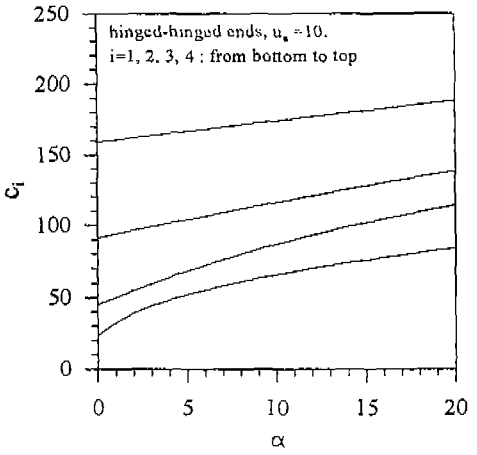

Fig. 3. c_i vs. α curves(h-h).

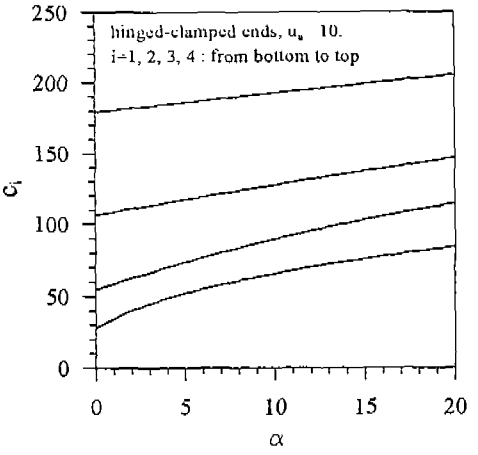

Fig. 4. c_i vs. α curves(h-c).

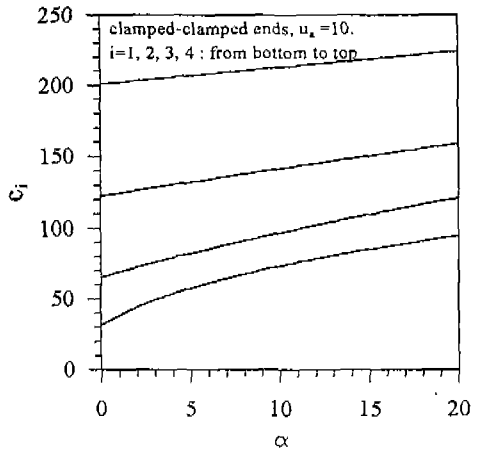

Fig. 5. c_i vs. α curves(c-c).

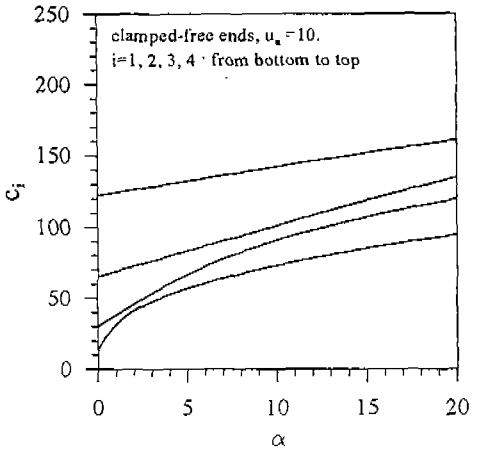

Fig. 6. c_i vs. α curves(c-f).

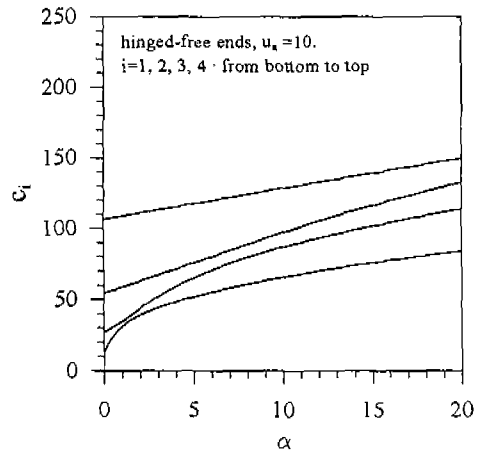

Fig. 7. c_i vs. α curves(h-f).

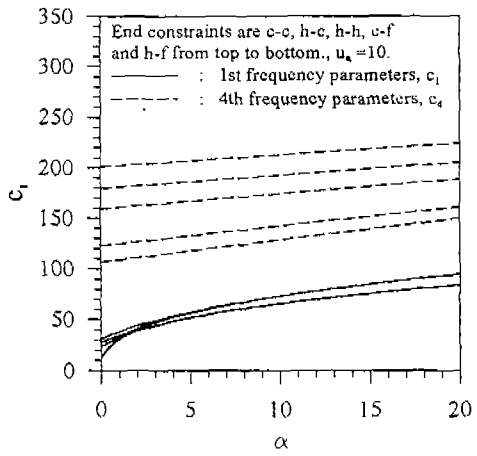

Fig. 8. c_i vs. α curves by end constraint.

Fig. 9.는 u_a=10에 대하여 α=0, 1, 10의 세 가지 α값에 대한 진동형을 나타낸 그림이다. 여기서 보는 바와 같이 α값이 진동형에 미치는 영향은 매우 커서 α값에 따라 진동형의 최대진폭의 위치가 크게 변화하는 것을 알 수 있다.

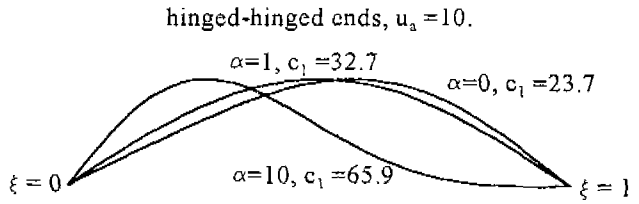

Fig. 9. Effect of α on mode shapes for first mode.

Fig. 10.은 u_a=10, α=0 인 경우에 c_1와 p 사이의 관계를 그림에 나타낸 것이다. 이 그림으로부터 p가 증가할수록 c_1값은 감소하는 것을 알 수 있다. 따라서 c_1값이 0이 되는 p축의 p값이 무차원 좌굴하중 b가 된다. 이 무차원 좌굴하중 b값을 그림 상단에 정리하여 놓았다. 또한 이 그림들로부터 다른 조건이 같을 때 c_1값은 c-c, h-c, h-h, c-f, h-f순서로 큰 것을 알 수 있다.

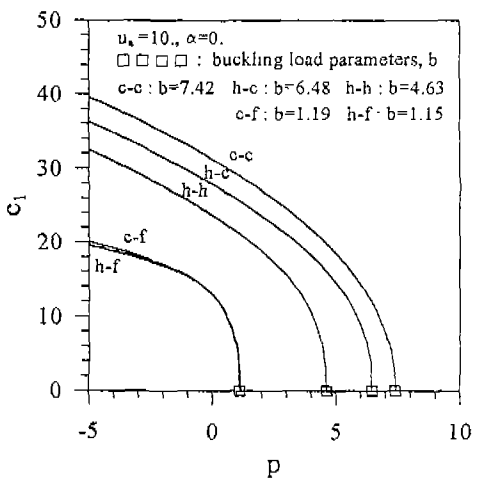

Fig. 10. c_1 vs. p curves.

IV. 결론

이 논문은 비균질 탄성지반위에 놓인 보-기둥의 자유진동에 관한 연구이다. 지반탄성계수의 비균질성을 선형으로 채택하여 Bernoulli-Euler 보-기둥의 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 유도하고 이를 수치해석하여 무차원 고유진동수와 진동형을 산출하였다. 본 연구 결과와 SAP 90의 결과가 매우 잘 일치하여 이 연구의 타당성을 검증할 수 있었다. 실제 수치해석 예에서는 회전-회전, 회전-고정, 고정-고정, 고정-자유, 회전-자유의 5가지 단부조건에 대하여 α와 p가 c_i에 미치는 영향을 그림에 나타내었다. 또한 α값이 진동형에 미치는 영향을 분석하였다.

참고문헌

1. Timoshenko, Young and Weaver, 1974, VIBRATION PROBLEMS IN ENGINEERING, John Wiley & Sons.
2. Wilson, J. F., Lee, B. K. and Oh, S. J., 1994, "Free Vibrations of Circular Arches with Variable Cross-Section," Structural Engineering and Mechanics, Vol. 2, No. 4, pp.345-357.