

# 저속 충격을 받는 구조물에 대한 주파수 영역에서의 역함수 문제

## Inverse Problem in the Frequency Domain for the Structures Subjected to Low-velocity Impact

김인걸\*, 안송수 (충남대학교)

### 1. 서론

저속충격의 정방향 문제에 있어 파동전파 이론을 이용한 해석 방법이 있는데 파동의 전파 및 반사현상을 설명하는데 장점이 있으나 정상파로 기술되는 정상상태의 해를 구하는 경우는 계산량이 많고 누적오차를 수반하게 되어 적합하지 못하다. 이에 비해 모두드 중첩법은 정상상태의 해를 구하는데 적합한 방법이며, 시간과 공간영역을 분리하여 공간영역을 모두드로 표현하고 시간영역을 주기함수로 표현하는 방법으로 정방향 문제에 가장 일반적인 방법이다.

저속충격을 받는 구조물의 정방향 및 역방향 문제에 대한 방법이 여러 연구가들에 의해 제안되어 왔다. Sun[3]은 신호에 따라 실험적으로 생성된 Green 함수를 이용함으로써 충격력을 찾아내는 방법을 제안하였다. Doyle[1,2]은 자유-자유 경계조건을 갖는 특별한 적외방성 평판의 스트레인 게이지 신호를 사용하여 주파수 분석법으로 충격력을 복원하였으며, Wu[5]는 등방성 평판에 부착된 스트레인 게이지 신호를 이용한 최적화 기법으로 역방향 문제를 수행하였다.

역방향 문제는 대부분이 시간영역에서 수행되어 왔으며, Doyle이 주파수영역에서 충격력을 예측하였으나 이는 파동 전파를 고려한 방법이었다. 본 연구에서는 모두드 중첩법의 역함수 문제에 있어서 주파수영역에서의 알고리즘으로 충격력을 복원하여 시간영역 알고리즘의 시간상 문제, 즉, 반복적 과정의 오랜 계산 시간이 소요되는 단점의 해결을 모색하였고, 수치적, 실험적 검증으로 주파수 영역 알고리즘의 타당성에 대하여 고찰하였다.

### 2. 저속충격 이론 해석

변위에 대한 3개의 독립변수들은 보함수(beam function) 함수에 의해 (1)식처럼 표현된다.  $X_n(x)$ ,  $Y_n(y)$ 는 모드형상(mode shape)이다.

$$\begin{aligned} u_1(x, y, z, t) &= z \bar{\alpha}(x, y, t) = z \sum_n \sum_m A_{nm}(t) X_n(x) Y_m(y) \\ u_2(x, y, z, t) &= z \bar{\beta}(x, y, t) = z \sum_n \sum_m B_{nm}(t) X_n(x) Y_m(y) \\ u_3(x, y, z, t) &= w(x, y, t) = \sum_n \sum_m W_{nm}(t) X_n(x) Y_m(y) \end{aligned} \quad (1)$$

평판의 운동에너지(T)와 포텐셜에너지(V)를 구하고[8], Hamilton 원리를 적용하면 미지수  $A_{nm}$ ,  $B_{nm}$ ,  $W_{nm}$ 의 평판 운동방정식을 (2)식과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P_2 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

{q<sub>1</sub>}은  $A_{nm}$ ,  $B_{nm}$ 을, {q<sub>2</sub>}는  $W_{nm}$ 를 포함한 행렬이다. 충격력은

집중하중으로 관개의  $(x_0, y_0)$ 지점에 작용한다고 가정하고, 고유모드 확장법(eigenmode expansion method)을 사용하여 (2)식의 해를 구할 수 있으며, 복합재 평판의 변형을, 즉, 점  $(x_1, y_1)$ 에서의 변형율은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\epsilon_{zz}(x_1, y_1, t, x_0, y_0) = \int_0^t \delta(t-\tau) G^{(1)}(x_1, y_1, \tau, x_0, y_0) d\tau \quad (3)$$

여기서,  $\xi$ 는 x 또는 y를 나타내며, 함수  $G^{(1)}$ 는 단위 충격력에 의한 과도 변형을 응답을 나타내는 Green 함수이다. 해석적 해를 이용할 수 없는 역방향 문제를 위해서 (3)식은 참고문헌[8]의 방법으로 n개의 이산화된 응답(r)과 충격력(p)에 대해서 다음처럼 행렬식으로 표현하였다.

$$\begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ \vdots \\ r_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ G_2 & G_1 & 0 & \dots & 0 \\ G_3 & G_2 & G_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_n & G_{n-1} & G_{n-2} & \dots & G_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \vdots \\ p_n \end{Bmatrix} \quad (4)$$

### 3. 역방향 문제

#### 3.1 시간영역에서의 충격력 복원 이론

충격력의 예측을 위해서 반복적 Tikhonov 조정법(Iterated Tikhonov Regularization Method)을 이용하였다. 즉, 조정매개변수(a)를 결정하면 (5)식에서 충격력(P)을 구할 수 있으며, 이렇게 구해지는 충격력은 잡음의 크기수준( $\delta$ )과 조정매개변수에 따라 달라지게 됨을 알 수 있다[8].

$$P_{\sigma, \delta} = (G^T G + aI)^{-1} G^T R_{\delta} \quad (5)$$

조정매개변수는 다음식에서 우선  $P_{\sigma, \delta} = 0$ 으로 놓고,  $P_{\sigma, \delta}$ 와  $P_{\sigma, \delta}'$ 의 차이가 없을 때까지 반복 계산하여 선택한다.

$$(G^T G + aI) P_{\sigma, \delta} = G^T R_{\delta} + a P_{\sigma, \delta}' \quad (6)$$

#### 3.2 주파수영역에서의 충격력 복원 이론

식 (7)과 같은 충격관계 적분 식은 라플라스 변환하면 (8)식과 같이 간단한 식으로 바뀌게 된다.

$$\mathcal{R}(s) = \int_0^t \delta(t-\tau) G(\tau) d\tau \quad (7)$$

$$X(s) = H(s) F(s) \quad (8)$$

$$: X(s) = \mathcal{L}[\mathcal{R}(t)], H(s) = \mathcal{L}[G(t)], F(s) = \mathcal{L}[\delta(t)]$$

여기서 임의의 함수  $\mathcal{R}(t)$ 의 라플라스 변환은 복소수 s에 대해서 다음처럼 정의된다.

$$\mathcal{L}[\mathcal{R}(t)] = \int_0^{\infty} \mathcal{R}(t) e^{-st} dt, \quad s = a + j\omega \quad (9)$$

식 (9)에서  $a \rightarrow 0$ 의 조건으로써 라플라스 변환은 푸리에 변환에 접근하며, 수렴 계수를 도입하여 식(7)을 다음의 주파수 영역으로 변환시킬 수 있다.

$$X(\omega) = H(\omega)F(\omega) \quad (10)$$

$$.X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}, H(\omega) = \mathcal{F}\{G(t)\}, F(\omega) = \mathcal{F}\{p(t)\}$$

식 (10)에서  $X(\omega)$ ,  $F(\omega)$ 는 각각 출력, 입력의 주파수 영역의 함수이고,  $H(\omega)$ 는 주파수 응답함수이며, 다음 (11)식처럼 역함수 문제가 된다.

$$F(\omega) = \frac{X(\omega)}{H(\omega)} \quad (11)$$

측정되는 센서 신호는 비연속적인 데이터이므로,  $X(\omega)$ ,  $F(\omega)$ ,  $H(\omega)$ 는 각각  $x(t)$ ,  $p(t)$ ,  $G(t)$ 를 이산 푸리에 변환(DFT)하여 구해져야 하며, 누설오차(Leakage Error)의 최소화를 위한 특별한 창함수(window function)가 필요하다.

#### 4. 수치적 검증

##### 4.1 시간영역에서의 충격력 복원

앞서도 언급했듯이 Tikhonov 조정법은 적절한 조정계수를 찾는 것이 중요하고, 이런 과정은 수렴성과 신속성을 가져야 한다. 하지만 실제 계산에서의 조정계수값이 수렴하지 않는 문제점 때문에 비례계수(Scale Factor),  $c$ 를 도입하여 조정계수의 수렴성을 확보할 수 있었다. 즉, 식  $(cR)P = cRP$ 에서 보듯이 상수  $c$ 가 곱해진 새로운 G 행렬과 R 행렬으로써 반복 Tikhonov 조정법의 조정계수를 구한다.

충격력 복원 알고리즘의 수치적 검증용 위해서 본 논문에서는 먼저 Fig. 1과 같은 임의의 충격력(그림에서 Real로 표시)을 구성하였다. 그리고,  $300 \times 25 \times 6$  mm 인 알루미늄 보의 양쪽(60, 240 mm) 두 센서로부터 변형을 신호( $\varepsilon_x$ )를 시뮬레이션하여 만들어 내고 이들 센서신호를 시간 및 주파수 영역에서의 충격력 복원 알고리즘을 검증하여 보았다.

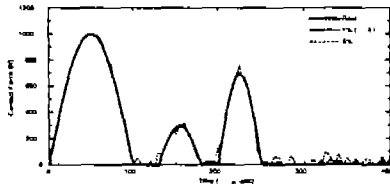


Fig 1 Reconstructed impact forces : time domain, numerical verification.

비경중앙(90 mm) 충격시 왼쪽 스트레인 게이지 신호의 오차(1%, 5%로 가정)에 따라서 충격력을 복원한 결과가 Fig. 1에 나와있다. 충격력 복원에 중요한 요소인 비례계수는 앞서 구해진 비례계수식을 이용하여 결정하였으며, 조정계수는 이런 적합한 비례계수에서 적은 반복횟수(Iteration Number)로 성공적으로 구해졌다. 원래의 충격력이 잘 복원이 되는 것으로 보아 시간영역 충격력 알고리즘이 타당함을 알 수 있다. G행렬 구성시간을 제외한 충격력 복원시간은 6~14 sec 였다 (Pentium pro 180 MHz PC CPU Time).

##### 4.2 주파수영역에서의 충격력 복원

비경중앙 충격시 오른쪽 센서신호의 결과가 Fig. 2 에 도시

되어 있는데 샘플링 개수에 1/2, 1, 2배의 영을 신호의 앞에 첨가하고 시간 윈도우와 함께 FFT하여 충격력을 복원한 경우들로써 비교적 만족스러운 결과를 보이고 있다. 해당이 많을수록 복원된 힘이 안정적인 파형을 보이고 있는데 이 원인은 샘플링 시간이 길어지는 효과로 인해 주파수간격이 좁아져 주파수 해상도가 좋아지기 때문이라고 말할 수 있다. 한편, 충격력 복원시간은 1 sec 정도였다.

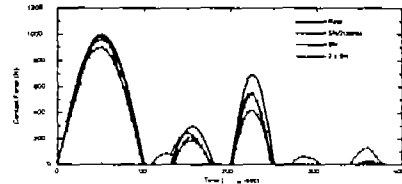


Fig. 2 Reconstructed impact forces : frequency domain, numerical verification.

Fig 3 에 중앙충격, 왼쪽센서 신호에 대한 샘플링 시간에 따른 복원된 힘이 도시되어 있다. 각각 700, 600, 300개의 영을 패딩함으로써 세 경우 모두 주파수간격이 안정적인 복원을 보이는 250 Hz이다. 이 그림을 보면 샘플링 시간이 2500  $\mu$ sec일 경우 원래의 충격력과 거의 일치하고 있으며 나머지 두 경우, 그리고, 누설오차를 최소화 할 수 있는 시간 윈도우의 사용 등으로 충격력을 잘 복원할 수 있었으며 본 논문에서 소개된 주파수영역의 충격력 복원 알고리즘의 타당성을 증명할 수 있었다.

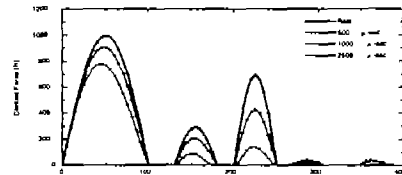


Fig. 3 Reconstruction of forces for many different cases of sampling times : frequency domain, numerical verification.

#### 5. 실험적 검증

##### 5.1 저속충격 실험

역함수 알고리즘의 실험적 검증을 위한 저속충격 실험에 사용된 스트레인 게이지는 유효면의 크기, 저항, gage factor가 각각  $7 \times 36$  mm, 120  $\Omega$  2.120 이고, 압전센서는 유효면이  $15 \times 10$  mm이고, 두께가 28  $\mu$ m. 센서상수( $C_x, C_y$ )가 각각 13,947, 5,521 (V/strain) 인 PVDF (polyvinylidene fluoride)이다.

충격체는 플라스틱 텀을 갖는 103.1g의 하중변환기(force transducer)를 이용하였다. 충격체는 낙하가이드(guide)를 따라서 30 cm 높이에서 떨어뜨려 실험하였으며 이렇게 하중변환기(PCB 208B03 ICP sensor, sensitivity 2248.2 mV/kN)에서 출력되는 충격력 신호는 ICP sensor power unit(PCB model 480E09)를 통하여 PC에서 데이터로 저장된다. 또한 스트레인 게이지의 변형을 신호는 스트레인 증폭기(Measurement Group P-3500)를 거쳐게 되고, 압전센서의 전압신호는 전하증폭기(charge amplifier, PCB model 463A)를 거쳐서 충격력 신호와 마찬가지로 A/D 변환기, PC로 전송된다.

## 5.2 복합재 평판의 충격력 복원

### 5.2.1 센서신호의 예측

본 실험에서는 Fig. 4 와 같은  $[0/90]_{2s}$  Gr/Ep 복합재 적층판이 사용되었으며, 복합재 평판의 종(x)방향 및 횡(y)방향 끝단 모두가 단순지지된 경계조건에서 저속충격 실험을 수행하였다. 충격실험에서는 중앙, 비김중앙 충격력이 평판에 가해질 때, Fig. 4 와 같이 평판에 부착되어 있는 스트레인 게이지와 압전 센서의 왼쪽, 오른쪽 양 센서에서 변형을 및 전압신호 데이터를 측정하였는데, 모든 신호에 있어 실험치와 해석치가 잘 일치하지 않았다(Fig. 5)

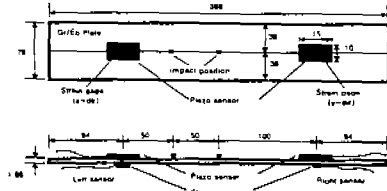


Fig. 4 Graphite/Epoxy laminated plate with attached sensors.

이런 결과는 평판의 지지점이 중황으로 자유롭게 거동해야 하는 단순지지의 조건에 실험조건이 부합되지 않기 때문으로 추정되어진다. 따라서, 평판의 지지점들이 중황으로 자유로운 이동을 막는 평면하중들이 평판의 모든 영역에 걸쳐 일정하게 작용한다고 가정하고 평판의 모델을 다시 수립하였다. Fig. 6 에서 평면하중  $N_x$ 의 효과는 무시하고  $N_y$ 를  $5 \times 10^6$ (N)으로 한 평판의 모델로서 센서신호를 예측한 결과가 도시되어 있는데, 신호의 파형과 크기면에서 측정된 센서신호들이 보다 잘 예측되고 있다.

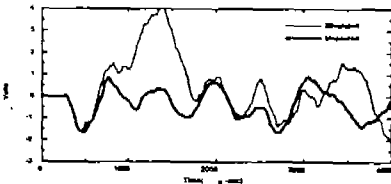


Fig. 5 Measured and simulated piezo sensor signal (off-center impact, left sensor signal).

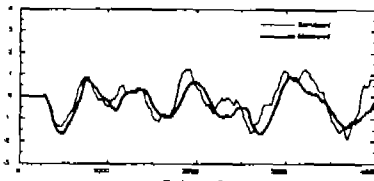


Fig. 6 Measured and simulated piezo sensor signal by updated model (off-center impact, left sensor signal).

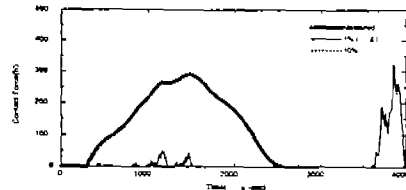
### 5.2.2 시간영역에서의 충격력 복원

개선된 복합재 평판 모델을 이용하였으며, 비례계수 값은 비례계수식을 사용하여 추정하였고, 그 값은 스트레인 게이지 신호일 경우 약  $10^{25}$ , 압전센서 신호일 경우 약  $10^{35}$ 이다.

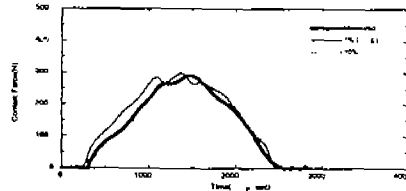
스트레인 게이지 데이터(변형률 신호)로 충격력 복원 결과를

살펴보면(Fig 7) 힘 복원 알고리즘에 개선된 복합재 평판 모델을 이용하였으나 이 개선된 모델로도 횡방향 변형율이 잘 예측되지 않기 때문에 오른쪽 센서신호를 이용한 경우는 충격력이 제대로 복원되지 않고 있다. 하지만 종방향 변형을 신호로서 충격력이 매우 잘 복원되는 결과로 보아 시간영역 알고리즘인 반복적 Tikhonov 조정법의 타당성을 확인하였다.

압전센서 데이터(전압 신호)로 충격력이 복원된 결과(Fig. 8)는 앞서 설명하였듯이 복합재 평판 해석 모델이 평판의 횡방향 거동을 제대로 나타내지 못하기 때문에 만족스러운 충격력이 복원되지 않고 있으나 중앙 충격일 경우 매우 좋은 결과를 보이고 있으며, 스트레인 게이지의 변형률 신호와 같이 압전센서의 전압신호를 이용하여도 충격력 복원이 가능함을 알 수 있었다.

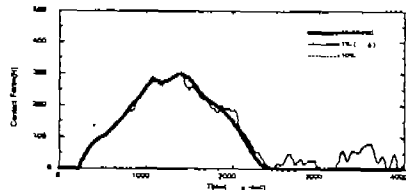


a. Center impact, right sensor signal ( $\epsilon_y$ ).



b. Off-center impact, left sensor signal ( $\epsilon_x$ ).

Fig. 7 Impact forces reconstructed by strain gage signals : time domain, experimental verification.



a. Center impact, right sensor signal.

Fig. 8 Impact forces reconstructed by piezo sensor signals : time domain, experimental verification.

### 5.2.3 주파수영역에서의 충격력 복원

Fig. 9 의 중앙 충격일 때는 스트레인 게이지의 횡방향 변형율에 대해서는 좋지 않은 결과가 나타나고 있는데 이것은 시간영역의 복원에서와 마찬가지로 개선된 평판 모델도 횡방향 스트레인 게이지 신호를 제대로 표현하지 못하기 때문이다. 종방향 변형율로 복원하였을 경우 패딩된 영이 샘플 갯수에 0.7 배 일때 좋은 충격력이 복원되고 있다. Fig. 10 의 압전센서 신호로서 복원된 그래프를 보면 중앙충격시 오른쪽 전압신호로 복원한 경우 샘플 갯수에 0.7배 영이 패딩되었을 때 좋은

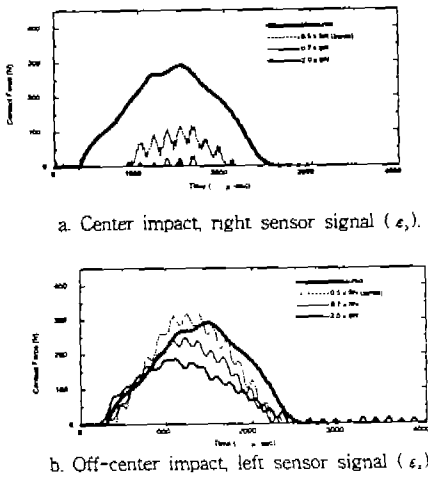


Fig. 9 Impact forces reconstructed by strain gage signals : frequency domain, experimental verification.

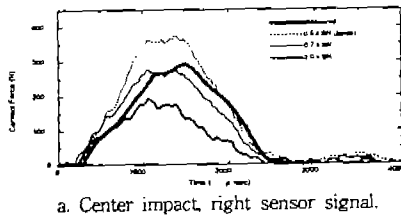


Fig. 10 Impact forces reconstructed by piezo sensor signals : frequency domain, experimental verification.

결과를 보인다. 비꺾중앙 충격시의 힘 복원은 대체로 중앙충격에서 보다 좋지 않았으며 왼쪽 전압신호에서는 영이 표본에 2배일 경우 비교적 좋은 충격력이 복원되고 있으며, 오른쪽 전압신호의 경우는 시간영역의 복원에서와 마찬가지로 제대로 충격력이 복원되지 않았다. 해석모델과 실제 실험모델의 불일치로 충격력 복원에 좋지 않은 결과를 보인 몇몇 경우를 제외한 나머지 경우에 있어서 충격력 복원이 만족스러운 결과를 보였고, 이것으로 보아 주파수영역 알고리즘의 타당성을 알 수 있다. 결론적으로 주파수영역 알고리즘은 반복적인 방법없이 바로 충격력을 구할 수 있었으나 구조물의 고유진동수 부근에서의 큰 값을 보이고, 영에 가까운 값을 포함하는 주파수 응답함수(H)의 특성상 바로 충격력의 스펙트럼을 구할 때에는 매우 불안정할 수 있을 뿐만아니라, 치명적인 문제가 발생할 수 있음을 일련의 결과들로부터 알 수 있었다.

## 6. 결론

1) Rayleigh-Ritz method를 이용한 저속충격 해석은 충격력과 센서신호의 관계를 닫힌해 형태(closed form)로 연결시켜 줄 수 있어 역함수 문제 모델링에 매우 유용하였다.

2) 반복적 Tikhonov 조정법으로 시간영역에서 복원된 충격력은 조정계수에 따라서 달라지며, 충격응답함수, 센서신호의 크기와 관련된 비례계수를 결정하는 방법을 유도하여 이러한 비례계수를 사용한 경우 적절한 조정계수의 획득 및 충격력 복원의 정확도가 향상되었다.

3) 주파수영역에서의 알고리즘으로 충격력을 복원하는 데는 주기적 성분의 추출을 위한 충분한 샘플, 센서신호를 과도적 신호로 취급하기 위한 영(zero)의 패딩(padding), 누설오차를 최소화할 수 있는 시간 윈도우 등이 필요하였다.

4) 주파수영역에서의 충격력 복원은 조정계수 및 비례계수의 도입과 반복적 단계를 이용한 조정해를 구할 필요가 없으므로 시간영역 알고리즘보다 간단하고 매우 빠르게 충격력을 구할 수 있었다.

5) 충격응답 함수의 역행렬을 직접 구할 수 없는 부적합 문제를 인하여 조정된 해를 구해야 하는 시간영역의 충격력 복원과 마찬가지로 주파수영역에서도 주파수응답 함수의 역행렬을 반복적 과정없이 바로 구하여 충격력을 복원하는 데는 불안정한 현상이 있었다.

7) 시간영역, 주파수영역 두 알고리즘들에 단점을 상호보완하여 주파수영역에서 빠르게 계산된 충격력을 시간영역 알고리즘의 초기해로써 이용하면 좀더 정확하고 신속하게 구조물의 충격력을 복원할 수 있다고 생각된다.

## 참고문헌

1. Doyle, J. F., "An Experimental Method for Determining the Dynamic Contact Law," *Experimental Mechanics*, Vol. 24, pp. 10-16, 1984.
2. Doyle, J. F., "Further Developments in Determining the Dynamic Contact Law," *Experimental Mechanics*, Vol. 24, pp. 265-270, 1984.
3. Chang, C., Sun, C.T., "Determining Transverse Impact Force on a Composite Laminate by Signal Deconvolution," *Experimental Mechanics*, Vol. 29, pp. 414-419, 1989.
4. 박형순, "횡방향 충격을 받는 보의 초기 거동해석 및 충격력 복원에 관한 연구," 박사학위논문, 한국과학기술원, 1993.
5. Yen, C.-S. and Wu, E., "On the Inverse Problem of Rectangular Plates Subjected to Elastic Impact, Part I: Method Development and Numerical Verification," *Journal of Applied Mechanics*, Transactions of the ASME, Vol. 62, pp. 692-698, 1995.
6. Kim, I. and Hahn, H. T., "Prediction of Low-Energy Impact Based on Piezoelectric Sensor Signals," *ASEM*, AD-Vol. 35, pp. 433-439, 1993.
7. Engl, H. W., "On the Choice of Regularization Parameter for Iterated Tikhonov Regularization of Ill-posed Problem," *Journal of Approximation Theory*, Vol. 49, pp. 55-63, 1987.
8. 김인걸, 김준, "저속충격을 받는 복합적층판의 역함수 문제에 대한 실험적 상관관계," 한국복합재료학회지, 제11권 3호, pp. 24-38, 1998.
9. Kino, G. S., "Acoustic Waves: Devices, Imaging and Analog Signal Processing", Eaglewood Cliffs, Prentice-Hall, 1987.