

# 겹침이음부를 갖는 보의 진동감쇠거동에 미치는 부분층댐퍼의 효과

(Effects of Partial Dampers on the Vibration Damping Behavior of a Single Lap Joint Beam)

박 정일(한양대 대학원)\*, 최 낙삼(한양대 기계공학과)

J. I. Park(Graduate School, Hanyang Univ.), N. S. Choi(Hanyang Univ.)

## Abstract

This paper presents the effects of partial dampers on the lateral vibration of beams. Both shear and normal stresses in the viscoelastic layer were studied. Analytical results were compared with those obtained by a finite element method. Effects of the size of partial dampers on the system loss factors and resonant frequencies were discussed.

## 1. 서 론

최근 기계구조물에서 방진문제의 해결을 위해 구조물의 복합화에 대한 연구가 이루어지고 있다. 즉, 흡진재로 사용되는 점탄성 재질을 보강재에 접착하여 적층함으로써 구조물의 방진 또는 흡진 특성을 극대화하려는 것이다. 이는 특히 동적하중을 받는 구조물이 공진할 때 진폭의 큰 감소와 고유진동수의 이동이 실현될 수 있으므로 구조물설계시 매우 중요하다고 볼 수 있다.

Saito와 Tani<sup>(1)</sup>는 겹침이음부를 갖는 양단 고정 지지된 보가 횡·종진동을 할 때 겹침이음부의 길이를 함수로 하는 고유진동수와 손실계수를 유도하고 Winkler와 Pasternak 방법을 통한 결과와 비교하였다. Rao와 Crocker<sup>(2)</sup>는 단순지지된 겹침이음부를 갖는 보에서 겹침이음부의 길이에 따른 고유진동수, 손실계수 및 진동모드를 이론적으로 구하고 실험에 의한 결과와 비교하였다. 또한 Rao와 He<sup>(3,4)</sup>는 에너지법을 이용하여 횡·종진동을 고려한 단순지지보의 겹침이음부를 해석하고 점탄성층의 두께와 탄성계수, 겹침이음부의 길이에 의존하는 고유진동수 및 손실계수를 평가하였다. 김 등<sup>(5)</sup>은 한쪽 고정지지된 보에 부분적 층댐퍼를 부착하고 점탄성층의 전단변형과 두께방향 수직변형을 함께 고려한 운동방정식을 유도한 후 고유진동수 및 댐핑효과를 연구하였다.

본 연구는 단일 겹침이음부를 갖는 양단 고정 지지된 보에 국부적 층댐퍼를 기하학적 대칭형태로 부착·추가하여 국부적 층댐퍼의 길이변화에 따른 계의 고유진동수 및 손실계수의 변화를 검토하고자 한다. 겹침이음부 및 층댐퍼 부분은 점탄성층의 전단응력과 수직응력을 함께 고려한 4차 연립미분 방정식을 유도한 후 경계치 문제화(boundary

value problem)하여 수치해석을 행하고, 이 복합구조물의 흡진거동을 극대화하기 위한 구조물의 형상조건을 구하고자 한다. 또한 이 결과를 유한요소법에 의한 결과와 비교 검토하였다.

## 2. 이론 해석

겹침이음부를 갖는 보와 이에 국부적 층댐퍼를 부착한 보의 형태가  $z$ 방향으로 일정한 폭  $b$ 를 갖는 2차원 모델로 생각하여, 각각 Fig. 1(a)와 Fig. 1(b)에 나타내며, 사용되는 좌표계와 자유물체도(free body diagram)를 Fig. 2(a)와 Fig. 2(b)에 나타낸다. 탄성층  $c_1$ 은 탄성계수  $E_{c_1}$ , 두께  $h_{c_1}$ , 밀도  $\rho_{c_1}$ 을 가지며, 탄성층  $c_2$ 는 탄성계수  $E_{c_2}$ , 두께  $h_{c_2}$ , 밀도  $\rho_{c_2}$ 을 가진다. 또한 점탄성층  $d$ 는 선형 점탄성으로 가정하여 복소수 종탄성계수  $E_d^*$ , 복소수 횡탄성계수  $G_d^*$ 를 가지며, 두께  $h_d$ , 밀도  $\rho_d$ 를 갖고,  $E_d^* = E_d(1 + i\eta_d)$ ,  $G_d^* = G_d(1 + i\eta_d)$ 이다.

위의 두 가지 보의 운동방정식을 유도하기 위해 다음과 같은 가정을 하였다.

1) 점탄성층은 응력이 변형의 크기 및 변형속도에

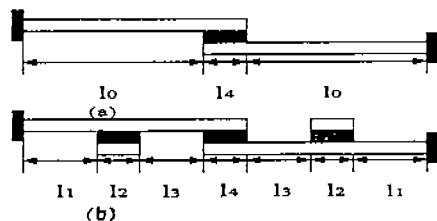


Fig. 1 (a) Single lap-joint beam and (b) its modified structure with partially layered dampers

선형적으로 의존하는 Kelvin-Voigt 모델을 따른다.  
 2) 점탄성층과 탄성층의 접촉부위는 미끄러짐(slip)이 없는 완전 접촉이어서 변위 연속성이 유지된다.  
 3) 탄성층은 Bernoulli-Euler 보이론을 따른다.

## 2.1 점탄성층을 갖는 복합적층부(viscoelastic layer-bonded region)

Fig. 2(a)의 탄성층  $c_1$ ,  $c_2$ 의 횡방향( $y$ 축방향)변위에 대한 운동방정식과 모멘트( $M_{c_1}$ ,  $M_{c_2}$ )에 대한 평형방정식은 각각 식(1)과 식(2)와 같다.

$$\rho_{c_1} A_{c_1} \frac{\partial^2 v_{c_1}}{\partial t^2} = \frac{\partial T_{c_1}}{\partial x} + p_1 \quad (1)$$

$$\rho_{c_2} A_{c_2} \frac{\partial^2 v_{c_2}}{\partial t^2} = \frac{\partial T_{c_2}}{\partial x} - p_2$$

$$T_{c_1} = \frac{\partial M_{c_1}}{\partial x} + \frac{h_{c_1}}{2} s \quad (2)$$

$$T_{c_2} = \frac{\partial M_{c_2}}{\partial x} + \frac{h_{c_2}}{2} s$$

여기서  $A_{c_1}$ ,  $A_{c_2}$ 는 탄성층  $c_1$ ,  $c_2$ 의  $y$ - $z$ 면에 대한 단면적,  $p_1$ ,  $p_2$ 는 탄성층  $c_1$ ,  $c_2$ 에서 점탄성층  $d$ 와의 접촉면에 작용하는 단위길이당  $y$ 방향 수직력,  $s$ 는 접착면에서의 단위길이당 전단력,  $T_{c_1}$ ,  $T_{c_2}$ 는  $A_{c_1}$ ,  $A_{c_2}$ 에서의 전단력,  $h_{c_1}$ ,  $h_{c_2}$ 는 각 층의  $y$ 방향 두께를 가르킨다.

식(2)를 식(1)에 각각 대입하여 정리하면 다음 식(3), (4)와 같다.

$$\frac{\partial^2 M_{c_1}}{\partial x^2} + \frac{h_{c_1}}{2} \frac{\partial s}{\partial x} + p_1 = \rho_{c_1} A_{c_1} \frac{\partial^2 v_{c_1}}{\partial t^2} \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 M_{c_2}}{\partial x^2} + \frac{h_{c_2}}{2} \frac{\partial s}{\partial x} - p_2 = \rho_{c_2} A_{c_2} \frac{\partial^2 v_{c_2}}{\partial t^2} \quad (4)$$

또한, Bernoulli-Euler 보이론으로부터 탄성층의 모멘트식은 다음 식과 같다.

$$M_{c_1} = -E_{c_1} I_{c_1} \frac{\partial^2 v_{c_1}}{\partial x^2}, \quad M_{c_2} = -E_{c_2} I_{c_2} \frac{\partial^2 v_{c_2}}{\partial x^2} \quad (5)$$

$s$ 는 휨(bending)에 의한 탄성층  $c_1$ 의 하부표면의  $x$ 방향 변위  $u_{c_1}$ 과 탄성층  $c_2$ 의 상부표면의  $x$ 방향 변위  $u_{c_2}$ 의 차이에 의해 생기므로 다음과 같이 구할 수 있다.

$$s = \frac{G_d^* (u_{c_2} - u_{c_1})}{h_d} = \frac{G_d^* b}{2h_d} \left( h_{c_1} \frac{\partial v_{c_1}}{\partial x} + h_{c_2} \frac{\partial v_{c_2}}{\partial x} \right) \quad (6)$$

여기서  $b$ 는 각 층의 폭이다.

Fig. 2(a)의 점탄성층의 횡방향 수직변위  $v_d$ 는 다음과 같은 점탄성층의 운동방정식으로 구할 수 있다.

$$E_d^* \frac{\partial^2 v_d}{\partial y^2} = \rho_d \frac{\partial^2 v_d}{\partial t^2} \quad (7)$$

만일,

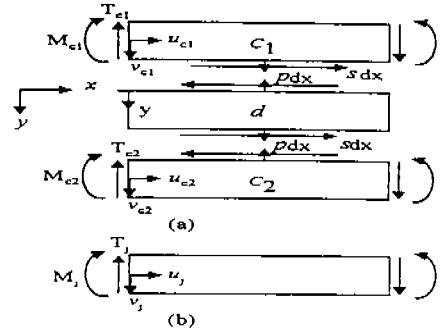


Fig. 2 Free body diagrams for (a) viscoelastic layer-bonded region and (b) elastic region beam

$$v_{c_1}(x, t) = V_{c_1}(x) e^{i\omega t}, \quad v_{c_2}(x, t) = V_{c_2}(x) e^{i\omega t},$$

$$v_d(x, y, t) = V_d(x, y) e^{i\omega t} \quad (8)$$

와 같이 조화함수로 가정하고 식(8)에 다음과 같은 경계조건  $V_d(x, y=0) = V_{c_1}$ ,  $V_d(x, y=h_d) = V_{c_2}$ 을 대입하고 식(8)을 적용하면 다음과 같은 해를 구할 수 있다.

$$v_d = v_{c_1} \cos \xi_d y + \frac{1}{\sin \xi_d h_d} (v_{c_2} - v_{c_1} \cos \xi_d h_d) \sin \xi_d y \quad (9)$$

여기서,  $\xi_d^2 = \rho_d \omega^2 / E_d^*$ 이다.

식(9)를 이용하여 층간접착면에서의  $x$ 축 단위길이당 수직력은 다음 식(10)과 같이 구한다.

$$p_1 = E_d^* b \frac{\partial v_d(x, 0, t)}{\partial y}, \quad p_2 = E_d^* b \frac{\partial v_d(x, h_d, t)}{\partial y} \quad (10)$$

식(5), (6), (10)을 식(3), (4)에 대입하여 정리하면 다음 식(11), (12)와 같다.

$$E_{c_1} I_{c_1} \frac{\partial^4 v_{c_1}}{\partial x^4} - \frac{G_d^* b h_{c_1}}{4h_d} \left( h_{c_1} \frac{\partial^2 v_{c_1}}{\partial x^2} + h_{c_2} \frac{\partial^2 v_{c_2}}{\partial x^2} \right) \quad (11)$$

$$- \frac{E_d^* b \xi_d^2}{\sin \xi_d h_d} (v_{c_2} - v_{c_1} \cos \xi_d h_d) + \rho_{c_1} A_{c_1} \frac{\partial^2 v_{c_1}}{\partial t^2} = 0$$

$$E_{c_2} I_{c_2} \frac{\partial^4 v_{c_2}}{\partial x^4} - \frac{G_d^* b h_{c_2}}{4h_d} \left( h_{c_1} \frac{\partial^2 v_{c_1}}{\partial x^2} + h_{c_2} \frac{\partial^2 v_{c_2}}{\partial x^2} \right) \quad (12)$$

$$+ \frac{E_d^* b \xi_d^2}{\sin \xi_d h_d} (-v_{c_1} + v_{c_2} \cos \xi_d h_d) + \rho_{c_2} A_{c_2} \frac{\partial^2 v_{c_2}}{\partial t^2} = 0$$

식(11), (12)의 해를 조화함수로 가정하고,  $V_{c_1} = A_n e^{\lambda_n x}$ ,  $V_{c_2} = B_n e^{\lambda_n x}$ 로 표현하여 전개하면 다음 식(13)과 같은 행렬로 이루어진 식을 유도할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_n \\ B_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

위 식이 유효해를 가지려면 행렬식  $\text{Det}[Q]$ 가 0이 되어야한다. 즉,  $\lambda_n$ 에 대한 8차방정식으로 나타내어지고 다음과 같이 정리된다.

$$V_{c_1}(x) = \sum_{n=1}^8 A_n e^{\lambda_n x}, \quad V_{c_2}(x) = \sum_{n=1}^8 B_n e^{\lambda_n x} \quad (14)$$

## 2.2 탄성단일층부(elastic beam region)

Fig. 2(b)와 같이 탄성단일층부의 운동방정식은 Bernoulli-Euler 보이론을 따른다고 가정하여 다음 식(15)를 사용할 수 있다.

$$EJ_y \frac{\partial^4 v_i}{\partial x^4} + \rho_y A_y \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} = 0 \quad (15)$$

식(15)의 해를  $v_i(x, t) = V_i(x) e^{i\omega t}$  로 가정하면 다음 식(16)이 된다.

$$\frac{\partial^4 V_i}{\partial x^4} - \frac{\rho_y A_y}{EJ_y} \omega^2 V_i = 0 \quad (16)$$

식(16)의 방정식을 풀면 다음과 같은 해를 얻는다.

$$V_i = \sum_{n=1}^4 C_n e^{\alpha_n x} \quad (17)$$

## 2.3 이론해석의 적용

본 연구에서는 단일접침이음부를 갖는 양단 고정 지지된 보(Fig. 1(a))와 이에 국부적 층댐퍼를 부착시킨 보(Fig. 1(b))에 대한 이론해석 결과와 유한요소 수치해석결과를 비교하여 보았다. 점탄성층이 갖는 손실계수( $\eta_d$ )값은 온도와 주파수의 영향이 없이 일정한 0.1로 가정하였으며, 각 층에 사용되는 물성과 치수는 Table 1과 같다.

식(14)과 식(17)에 Fig. 1(b)와 같이 접침이음부와 국부적 층댐퍼를 함께 갖는 보에 대해 경계조건과 연속조건을 포함한 40개의 조건으로부터 다음과 같은 행렬의 식으로 구한다.

$$[Q]_{40 \times 40} \{Z\} = \{0\} \quad (18)$$

마찬가지로  $\{Z\}$ 가 유효해를 가지기 위해서는  $\text{Det}[Q]_{40 \times 40} = 0$  이 되도록 계산하며, 여기서  $\omega = \omega_r \sqrt{1 + \eta_s}$ 의 복소수 고유진동수로 두고 반복법을 통하여  $\text{Det}[Q]$ 의 값이 0이 되도록 하여 계의 고유진동수  $\omega_r$ 와 손실계수  $\eta_s$ 를 구하였다.

## 3. 유한요소해석

상용 유한요소 프로그램인 Ansys Ver. 5.3을 사

Table 1 Mechanical property of each layer and its basic dimension

Layer	E(GPa)	Density (kg/m <sup>3</sup> )	Dimension (mm)
c <sub>1</sub>	200	7800	$h_{c1}=2$
c <sub>2</sub>	200	7800	$h_{c2}=2$
d	$5 \cdot 10^{-5}(1+0.5i)$	1200	$l_d=40$ $l_0=130$

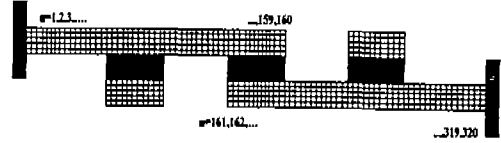


Fig. 3 Finite element model

용하여 Fig. 1(a)와 (b)의 구조물의 형상에 따라 조화진동해석을 수행하였다. 각 절점에서 2개의 자유도(변위 x, y)를 갖는 4절점요소인 plane42를 사용하였으며 모달해석을 통해 각 모드에서 고유진동수  $f_i$ 를 구하고 구조감쇠계수  $\beta_i$ 를 다음 식(19)로부터 구하여 점탄성층의 물성에 적용하였다.

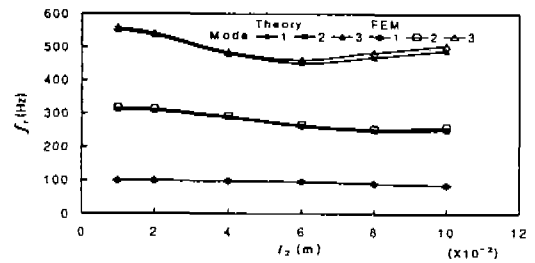
$$\beta_i = \frac{\eta_d}{2\pi f_i} \quad (19)$$

여기서  $\eta_d$  값은 0.1로 일정하다.

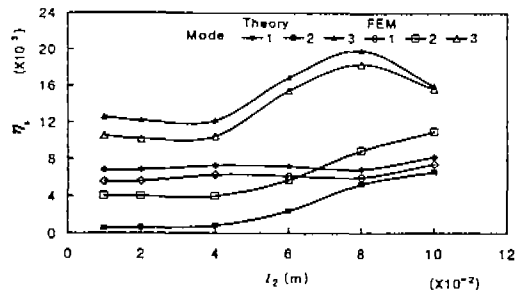
위의 물성을 대입하고 조화진동해석을 수행한 후 얻은 진폭과 주파수와와의 관계를 half power bandwidth 방법을 통하여 손실계수를 평가하였다. 수치해석에 사용된 유한요소 메시는 Fig.3에 나타나 있다.

## 4. 결과 및 고찰

본 연구는 접침이음부를 갖는 양단 고정지지된 보에 국부적 층댐퍼(layered damper)를 부착하여 층댐퍼의 길이변화에 따른 고유진동수 및 손실계

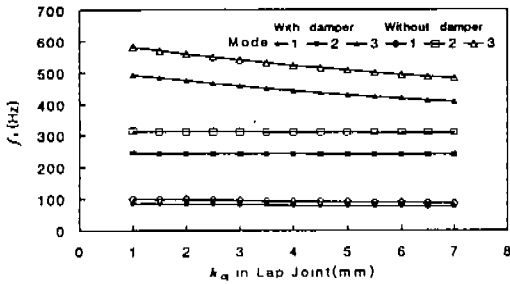


(a)

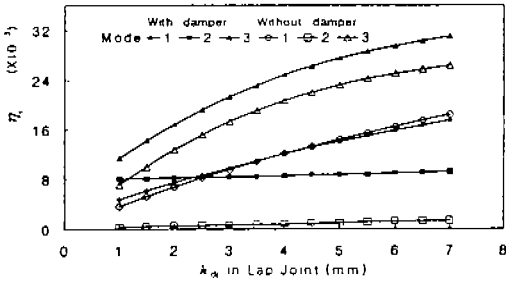


(b)

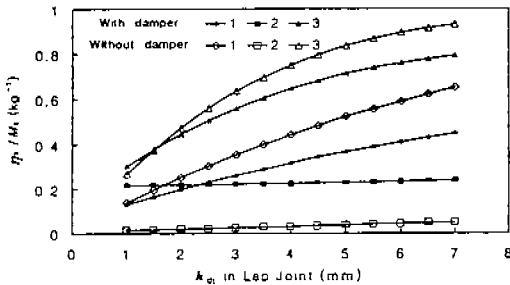
Fig. 4 Comparison between theoretical and FEM analysis results: (a) Resonant frequency  $f_r$  and (b) System loss factor  $\eta_s$  ( $l_1=0.02m$ )



(a)



(b)



(c)

Fig. 5 (a) Resonant frequency  $f_r$ , (b) system loss factor  $\eta_s$ , and (c) specific system loss factor ( $\eta_s/M_s$ ) of the beams with and without dampers 수의 영향을 평가하였다.

Fig. 4는  $l_1$ 의 길이를 0.02m, 층댐퍼와 접침이음부의 탄성층과 점탄성층의 두께를 2mm로 고정하고 층댐퍼의 길이  $l_2$ 를 0.02m에서 0.10m까지 변화시켜 고유진동수(Fig. 4(a))와 손실계수(Fig. 4(b))를 계산한 결과이다. 1차와 2차모드의 감쇠는  $l_2$ 가 접침이음부방향으로 길어질수록 크게 나타나고, 3차모드의 경우는  $l_2$ 가 0.08m부근에서 최대가 되고 있다. 또한 유한요소법(F.E.M)에 의한 결과와 비교할 때 고유진동수의 값은 거의 일치하고 있으며 손실계수의 값은 각 모드별로 일정한 차이를 보인다.  $l_2$ 의 증가에 따른 변화거동은 잘 일치하고 있다.

Fig. 5는 Fig. 1(a)의 접침이음부만을 갖는 보와 이에 Fig. 2(b)의 층댐퍼를 부착한 보에 대하여 접

침이음부에 속하는 점탄성층의 두께  $h_d$ 를 1~7mm로 변화시켜 비교 검토한 결과이다. 층댐퍼를 부착한 보의 결과는  $l_1$ 를 0.06m,  $l_2$ 를 0.06m, 층댐퍼의 점탄성층과 탄성층의 두께를 각각 2mm로 한 것이다. 층댐퍼의 부착은 단일 접침이음부만을 갖는 경우에 비해 2차, 3차 모드에서의  $f_r$ 을 현저히 감소시키고(Fig. 5(a)),  $\eta_s$ 를 크게 증가시키는 효과(Fig. 5(b))를 보여주고 있다. 또한, 1차모드에서는  $h_d$ 가 1~3mm에서  $\eta_s$ 가 꽤 향상되어 있다. 단위 질량당 계의 손실계수  $\eta_s/M_s$ 에 대한 결과는 Fig. 12(c)에 나타났다. 1차와 3차모드에서는 접침이음부의  $h_d$ 가 1.5mm이하에서  $\eta_s/M_s$ 값이 층댐퍼의 유무에 따라 그 차이가 거의 없어졌으며, 2차 모드에선 층댐퍼 부착으로 인한 감쇠효과가 여전히 매우 뭉을 알 수 있다. 따라서 접침이음부의 점탄성층의 두께  $h_d \leq 1.5$ mm에서는 층댐퍼 부착에 의한  $\eta_s/M_s$ 의 변화를 미미하게 하면서  $\eta_s$ 의 현저한 증대를 도모할 수 있으며,  $h_d > 1.5$ mm에선  $h_d$ 가 증가할수록 층댐퍼가 없는 경우에 비해 층댐퍼가 있는 경우에  $\eta_s/M_s$ 는 1차와 3차모드에서 멀어지나  $\eta_s$ 는 크게 증가하고 있음을 알 수 있다.

## 5. 결론

접침이음부를 갖는 구조물에 국부적 층댐퍼를 부착시킨 복합구조물에서 고유진동수와 손실계수를 평가하기 위해 횡진동 해석모델을 유도하였으며 다음과 같은 결론에 도달했다.

- (1) 점탄성층의 전단응력과 수직응력을 고려하여 연립4차 미분방정식을 유도하였으며 유한요소해석에 의한 결과와 유사한 경향을 보여주고 있다.
- (2) 국부적 층댐퍼의 길이변화를 통해 손실계수와 고유진동수의 변화를 꾀할 수 있었으며, 국부적 층댐퍼의 부착은 감쇠효과의 증대에 기여했다.

## 참고문헌

- (1) H. Saito, H. Tani, "Vibrations of Bonded Beams with a Single Lap Adhesive Joint," J. of Sound and Vibration, Vol. 92(2), 1984, pp. 299-309.
- (2) M. D. Rao, M. J. Crocker, "Analytical and Experimental Study of the Vibration of Bonded Beams with a Lap Joint," Trans. of the ASME, J. of Vibration and Acoustics, Vol. 112, 1990, pp. 444-451
- (3) M. D. Rao, S. He, "Vibration Analysis of Adhesively Bonded Lap Joint, Part I: Theory," J. of Sound and Vibration, Vol. 152(3), 1992, pp. 405-416
- (4) M. D. Rao, S. He, "Vibration Analysis of Adhesively Bonded Lap Joint, Part II: Numerical Solution," J. of Sound and Vibration, Vol. 152(3), 1992, pp. 417-425
- (5) 김 재호, 박 태학, 양 계명, "Vibration and Damping Characteristic of Partially Layered Elastic-Viscoelastic Elastic Beams," 대한기계학회논문집, 제 17권, 제4호, 1993, pp. 913-922