

# 내부에 판이 결합된 외팔 복합재료 원통셸의 자유진동 (Free Vibration of Clamped-Free Composite Cylindrical Shells with an Interior Plate)

이영신, 송근영, 최명환  
(충남대학교 기계설계공학과)

## 1. 서론

산업현장에 널리 사용되고 있는 구조물은 대부분 판이나 원형 혹은 비원형 원통셸의 결합된 형상을 갖는다. 특히 원통셸은 비강성 및 비강도가 높기 때문에 항공기나 해양 구조물의 응용을 위한 많은 구조물에 채용되고 있으며, 이들 구조물은 기능상의 필요에 의하여 바닥판을 갖는 원통셸로서 모델할 수 있다[1~5]. 원통셸의 내부에 사각판이 결합되면 이들 상호간의 결합력에 의하여 원통셸의 진동특성은 단순구조물과는 달라지기 때문에 결합에 의한 동적 거동의 변화를 고찰할 필요하다. 또한 최근 들어 기계적 성질이 우수한 복합재료 구조물이 산업현장에 많이 채용되면서 복합재료 판이나 셸에 대한 연구가 많이 이루어지고 있으며, 아울러 차원이 다른 두 구조물이 결합되었을 때의 동특성을 얻기 위한 해석적 방법의 개발이 관심이 되어 왔다.

본 연구에서는 원통셸의 내부 중앙에 길이방향으로 사각판이 결합되고, 길이방향 양단이 고정-자유 조건을 갖는 복합재료 원통셸의 진동해석을 위하여 동적응답법(receptance method)을 이용한 결합구조물의 진동수방정식을 유도하고, 수치계산을 통한 해를 제시하였다. 또한 실험과 유한요소해석을 통한 결과와 비교 검토하였고, 내부 사각판의 두께변화와 복합재료 적층각이 결합 원통셸의 고유진동 특성에 미치는 영향에 대하여 언급하였다.

## 2. 이론해석

본 연구에서 고려한 내부에 사각판이 결합된 복합재료 원통셸에 대한 형상을 Fig. 1에 나타내었다. 여기서  $L_s$ 와  $h_s$ 는 셸의 길이와 두께이고,  $b$ 와  $h_p$ 는 사각판의 폭과 두께를 나타낸다. 또한 각 방향에 대한

원통셸의 변위 성분은  $u_1^s, u_2^s, u_3^s$ , 판에 대해서는  $u_1^p, u_2^p, u_3^p$ 로 나타내었다. 셸의 중앙 수직축을 기준으로 하여 원주방향  $\theta_1^*$ 과  $\theta_2^*$ 의 위치에 사각판이 결합되었고, 판과 셸의 길이방향을 복합재료의 주방향 탄성계수( $E_1$ ), 판의 폭 방향과 셸의 원주방향을 횡방향 탄성계수( $E_2$ )로 정의하여 수식화 하였다.

결합부에서 동적하중을 받는 구조물의 변위는 구조물의 모드성분과 모드기여계수에 의하여 표현된다[6].

$$u_i(\alpha_1, \alpha_2, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F_k^*}{(\omega_k^2 - \omega^2)} U_{ik}(\alpha_1, \alpha_2) e^{j\omega t} \quad (1)$$

여기서  $U_{ik}$ 는 원통셸과 사각판의 모드성분을 나타내고,  $\omega_k$ 는 결합전 두 독립 구조물의 고유진동수로서 본 연구에서는 Love의 셸이론과 고전적 판이론에 의하여 이들의 고유진동수 및 모드형상 함수를 구하였다. 또한 식(1)에서 동적 하중항,  $F_k^*$ 는 결합부에서의 작용하중과 모멘트에 대하여 다음과 같이 표현된다.

$$F_k^* = \frac{1}{\rho h N_k} \int_{\alpha_1} \int_{\alpha_2} f_i U_{ik} A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (2)$$

$$F_k^* = \frac{1}{\rho h N_k} \int_{\alpha_1} \int_{\alpha_2} U_{ik} \left[ \frac{1}{A_1 A_2} \left\{ \frac{\partial(M_1 A_2)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(M_2 A_1)}{\partial \alpha_2} \right\} \right] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (3)$$

$$N_k = \int_{\alpha_1} \int_{\alpha_2} U_{ik}^2 A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (4)$$

여기서  $f_i$ 와  $M_i$ 는 결합부를 따라 작용하는 선하중과 모멘트로서 Dirac delta 함수를 이용하여 다음과 같이 표현된다.

$$f_i^*(x, \theta^*, t) = F_i^s \phi(x) \delta(\theta - \theta_i^*) e^{j\omega t} \quad i=1,2 \quad (5)$$

$$m_i^*(x, \theta^*, t) = M_i^S \phi(x) \delta(\theta - \theta_i^*) e^{j\omega t} \quad i = 1, 2 \quad (6)$$

또한  $U_{ik}$ 는 쉘과 판에 대한 모드형상 함수로서 일반적으로 내평면 변위는 횡방향에 비하여 작기 때문에 무시하여 다음과 같은 횡방향 모드 함수를 사용하였다.

$$U_3^S = \phi(x) \cos(n\theta) \quad (7)$$

$$U_2^P = \phi(x) \cos(n\pi y / b), \quad U_3^P = \phi(x) \sin(n\pi y / b) \quad (8)$$

여기서  $\phi(x)$ 는 판과 쉘의 축방향 고정-자유 경계 조건을 만족하는 보의 모달함수이다.

결합구조물의 진동수방정식을 수식화하기 위하여 식 (2)-(8)을 이용하여 결합부에서 선하중과 모멘트를 받는 경우의 사각판과 원통셀에 대한 동적하중항을 구하고, 식(1)에 대입함으로서 변위성분을 얻을 수 있다. 또한 이들 변위성분을 쉘의 원주방향과 판의 폭방향 함수로서 미분을 취하여 방향별 기울기 성분을 구한다. 두 구조물이 결합되었을 때, 결합부에서는 변위 혹은 기울기의 연속성이 있고, 결합 하중이나 모멘트를 이용하여 결합전 구조물의 동적응답을 얻을 수 있다. 따라서 판과 쉘이 결합된 구조물의 고유진동수는 다음 식으로부터 구할 수 있다.

$$|\alpha_y + \beta_y| = 0 \quad (9)$$

여기서  $\alpha_y$ 와  $\beta_y$ 는 각각 원통셀과 사각판의 동적응답으로서 하중에 대한 변위(혹은 기울기), 모멘트에 대한 변위(혹은 기울기)의 관계식이고, 이 식에는 결합전 두 독립구조물 뿐만아니라 결합 구조물의 고유진동수도 포함하고 있으며, 수치적인 계산에 의하여 결합구조물의 고유진동수를 구할 수 있다.

### 3. 결과 및 고찰

해석적 방법에 의한 계산결과와의 비교를 위하여 주파수 분석기(FFT)를 이용한 충격가진 실험과 상용 유한요소 해석 프로그램인 ANSYS[7]를 이용한 해석을 수행하였다. 실험에 사용된 시편은 원통셀의 중앙에 길이방향으로 사각판이 결합된 형상을 갖도록 몰드에 적층한후 오토클래브에서 성형하였으며, 제작의 편의성

을 고려하여 탄소섬유강화 (GFRP) 평직 복합재료를  $[0_3^{\circ} / \pm 45_3^{\circ} / 90_3^{\circ}]_S$  적층순서로 제작하여 실험하였다. Table 1은 판과 원통셀에 대한 기하학적 형상에 대하여 나타내었고, 물성값은 다음과 같다[5].

$$E_1 = E_2 = 26.2 \text{ GPa}, \quad G_{12} = 4.9 \text{ GPa}, \\ \rho = 1880 \text{ kg/m}^3, \quad \nu_{12} = 0.12$$

Table 2는 외갈 경계조건을 갖는 원통셀의 중앙에 사각판이 결합된 경우의 해석, 실험, 유한요소해석 결과를 나타내었다. 결과들은 진동수의 오름차순으로 6차까지 나타내었으며, 실험 결과에서 P와 S는 각각 판과 쉘의 모드를 가르킨다. 외팔형 결합셀의 가장 낮은 진동수인 기본진동수(fundamental frequency)는 208.7 Hz이고, 이것은 내부 사각판의 1차 굽힘모드, P(1,1)를 보였다. 해석적 방법과 유한요소해석 결과는 기본진동수에 대하여 1.4%의 오차를 보였으나, 실험결과는 해석결과보다 약 12%정도 낮은 진동수를 보였다. 이것은 실험에 있어서 시편제작이나 경계조건 구현의 불확실성 등으로 인한 오차로 생각된다. 결합셀에서 쉘의 모드를 보이는 진동수는 362 Hz였고, 이때 쉘은 길이방향 반파수  $m=1$ 과 원주방향  $n=2$ 인 S(1,2)모드를 보였으나 실험에서는 원통셀의 원주방향 2 모드를 찾지 못하였다. 또한 고유진동수가 증가함에 따라서 판과 쉘의 모드는 연성되어 나타났고, Fig. 2는 실험을 통하여 구한 몇몇 진동수에 대한 모드형상을 나타내었다.

중앙에 판 결합된 GFRP 복합재료 외팔 원통셀에서 내부 사각판의 두께( $h_p$ ) 변화에 따른 진동수 변화를 Fig. 3에 나타내었다. 결합셀의 기본진동수는 각 방향으로 1의 반파수를 갖는 판의 모드를 보였다. 판의 처음 두 모드에 대한 진동수는 판이 두꺼울 때가 얇은 경우보다 증가의 폭이 작았지만, 판의 두께가 증가함에 따라 선형적으로 증가하였다. 또한 판의 두께가 5.0mm 이상이 되면 판의 모드, P(2,1)에서의 진동수는 쉘의 모드, S(1,2)에서의 진동수보다 더 높아지는 결과를 보였다. 결합 원통셀에서 쉘의 가장 낮은 진동수는 원주방향 반파수,  $n=2$ 에서 나타났고, 판의 두께 변화에 대하여 원통셀의 진동수 변화는 판에 비해 덜 민감하게 증가하였다.

판 결합된 원통셀의 자유진동에 미치는 복합재료 섬유방향각( $\Theta$ )의 영향을 평가하기 위하여 주방향과 횡

방향의 강성이 다른 T300/N5208으로 만들어진 CFRP 재료를 고려하였으며, 그 물성은 다음과 같다[8].

$$E_1 = 181.0 \text{ GPa}, E_2 = 10.3 \text{ GPa}, G_{12} = 7.17 \text{ GPa}, \\ \rho = 1600 \text{ kg/m}^3, \nu_{12} = 0.28$$

원통셀과 판은  $[(\Theta/-\Theta)_2]$ 로 대칭 적층되었고, 각 층의 두께는 0.125 mm로 가정하였다. 사각판은 셀의 중앙에 결합되었으며, 고려한 셀의 기하학적 형상은  $L/a=2$ 와  $a/h_s=100$ 를 갖는다.

Fig. 4은 섬유방향각에 따른 결합셀과 결합된 두 구조물의 기본진동수에 대한 결과를 나타내었다. 셀과의 결합 부위가 단순지지되고 축방향으로 고정-자유의 경계조건을 갖는 사각판 만의 진동수는  $\Theta=90^\circ$ 에서 가장 큰 값을 보였고, 고정-자유 지지된 원통셀 만의 진동수는  $\Theta=40^\circ$ 에서 가장 높은 값, 650 Hz를 보였다. 그림에서 괄호안의 숫자는 축방향 반파수,  $m=1$ 에 대한 원주방향 반파수 ( $n$ )을 가르키고, 원주방향 반파수는 섬유방향각이 증가함에 따라서 감소함을 알 수 있다. 이것은 적층각의 증가가 원주방향 강성에 영향을 미쳐, 강성이 감소하기 때문에 발생하는 것이다. 판과 셀이 결합되었을 때 결합된 원통셀의 기본진동수는 사각판 만의 진동수보다 약간 큰 값을 보였고, 적층각의 증가에 따라서 판만의 진동수와 차이가 크게 나타났다. 섬유방향각이  $90^\circ$ 일 때 판 결합 원통셀은 가장 높은 기본진동수를 보였고, 진동수는 203.4 Hz로서 판만의 진동수보다 약 80 Hz증가된 결과를 보였다.

#### 4. 결론

- (1) 고정-자유의 경계조건을 갖는 복합재료 결합 원통셀의 기본진동수는 내부 사각판의 굽힘모드이고, 사각판은 원통셀과의 결합 부위가 단순지지된 것과 같이 진동하였다.
- (2) 내부 사각판의 두께 증가에 따라서 결합셀의 기본진동수는 선형적으로 증가하였고, 원통셀 모드에서의 진동수 변화는 판의 진동수보다 덜 민감하게 증가하였다.
- (3) 섬유방향각의 영향으로 결합셀은  $\Theta=90^\circ$ 에서 가장 높은 값을 보였고, 내부 사각판 만의 진동수보다 약간 높은 값을 보였다.

#### 참고문헌

- [1] Peterson, M.R., and Boyd, D.E., "Free Vibrations of Circular Cylinders with Longitudinal, Interior Partitions", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 60, No. 1, pp.45~62, 1978.
- [2] Irie, T., Yamada, G., and Kobayashi, Y., "Free Vibration of Non-Circular Cylindrical Shells with Longitudinal Interior Partitions", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 96, No. 1, pp.133~142, 1984.
- [3] Missaoui, J., Cheng, L., and Richard, M.J., "Free and Forced Vibration of a Cylindrical Shell with a Floor Partition", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 190, No. 1, pp.21~40, 1995.
- [4] Lee, Y.S., and Choi, M.H., "Free Vibration of a Composite Cylindrical Shell with a Longitudinal, Interior Rectangular Plate", *The First Asian-Australasian Conference on Composite Materials*, Osaka, Japan, pp. 320-1~320-4, 1998.
- [5] 이영신, 최명환, "내부판 구조물이 결합된 강 및 평직 복합재료 원통셀의 진동특성 연구", 한국소음진동공학회지, 제 9 권, 제 1 호, pp. 21~30, 1999.
- [6] Soedel, W., *Vibrations of Shells and Plates*, 2nd ed., Marcel Dekker, Inc., 1993.
- [7] Swanson Analysis Systems Inc. : *ANSYS User's Manual: Volume III Elements*, 1992.
- [8] Tsai, S.W., *Composite Design, Think Composite*, Dayton, Ohio, U.S.A., 1988.

Table 1 Dimensions of combined composite shells

Material	GFRP		
	Length( $L_p$ )	Width(b)	Thickness( $h_p$ )
Plate	360 mm	218 mm	3.5 mm
Shell	Length( $L_s$ )	Radius(a)	Thickness( $h_s$ )
	360 mm	109 mm	3.5 mm

Table 2 Comparison of the natural frequencies of the GFRP plain weave composite cylindrical shell with interior plate at the center.

Mode*	Method	Natural frequency (Hz)		
		Analysis	Exp.	FEM
1 <sup>st</sup>		208.7	182.0	P(1,1) - 205.7
2 <sup>nd</sup>		281.9	302.0	P(2,1) - 292.9
3 <sup>rd</sup>		362.0	-	- 333.1
4 <sup>th</sup>		409.5	442.0	P(3,1) - 444.0
5 <sup>th</sup>		439.9	460.0	P(1,3) S(1,3) 465.4
6 <sup>th</sup>		663.4	590.0	- S(1,3) 593.4

\* : Frequency ascending order

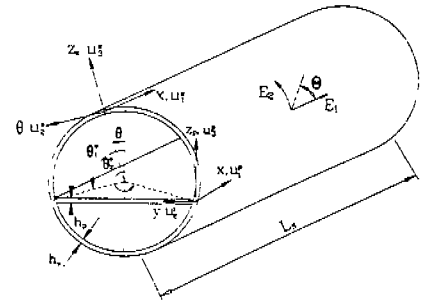


Fig. 1 Geometry of the composite circular cylindrical combined shell.

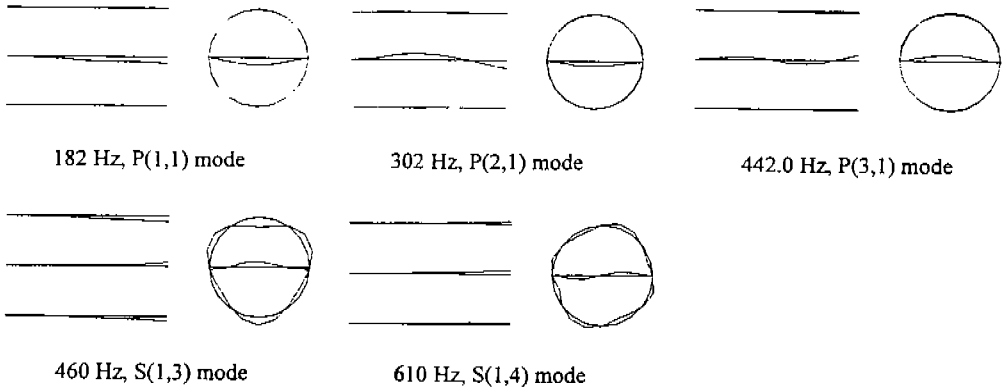


Fig. 2 Typical experimental mode shapes of the GFRP composite combined shell with clamped-free edge conditions.

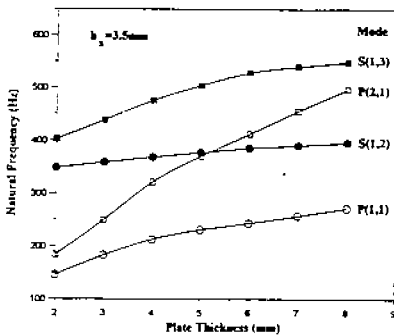


Fig. 3 Effects of the plate thickness( $h_p$ ) on the frequencies of the GFRP plain weave composite cylindrical shell with interior plate at the center.

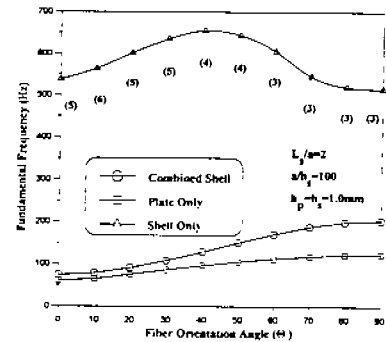


Fig. 4 Fundamental frequencies of the CFRP laminated composite cylindrical shell with the  $[(\Theta / - \Theta)_2]_s$  stacking sequence for various fiber orientation angles.