프랙탈 GIUH 모형의 유도
Derivation of a Fractal GIUH Model

○ 홍일표[1], 고재웅[2]

1. 서론

유역에서 강우에 의한 유출의 반응을 나타내는 지체시간, 도달시간 등 유역의 수문학적인 반응시간은 각각의 정의에 따라 그 물리적인 의미는 다를 수도 있으나, 유역에 내린 강우 입자가 유역의 출구로 이동하는데 소요되는 시간이라 할 수 있다. 이러한 수문학적인 반응시간을 산정하는 대부분의 경험적인 공식들은 유역면적, 유로연장, 하천 혹은 유역 경사 등 유역의 지형학적인 인자들을 이용하고 있다. 이와 같이 유역의 수문학적인 반응시간을 지형특성 등을 이용하여 경험적으로 나타낼 수 있는 것은 유역간에 서로 수문학적인 상사성이 있다는 가설을 수립할 수 있음을 보여준다.

수문학적인 상사성에는 유역의 자기상사성(self-similarity)으로 설명할 수 있는 부분들이 있다. 그런데 유역이 자기상사성을 가지고 있다는 것은 유역의 강우-유출 과정을 프랙탈 특성을 이용하여 해석할 수 있다는 것을 의미한다. 프랙탈이란 복잡하거나 불규칙적인 기하학적 형상들을 규모(scale) 측면에서 특성이나 형태가 비슷한 형상으로 정의할 수 있는데, 이러한 형상들의 특성은 수학적 방법을 통해서 특성화시킬 수 있다. 유역의 도달시간 등 회귀분석 등을 통하여 도출된 많은 경험공식들의 저변에는 유역의 프랙탈 특성이 암시적으로 반영되어 있는 것이라고 할 수 있다.

Horton(1945)은 하천 유역의 구조를 하천 차수, 분기비, 길이비, 면적비, 하천 밀도 등 지형학적인 특성치를 이용하여 정량적인 법칙으로 나타냈다. Horton의 법칙은 유역내 하천과 하도망의 지형학적인 구성에 대한 특성을 반영하는 것으로, 1980년대 후반부터 Horton의 차수법칙을 이용하여 유역의 프랙탈 특성을 나타내는 연구가 활발히 진행된 바 있다.

강우에 의한 유역의 수문학적인 반응을 나타내는 유역의 IUH(Instantaneous Unit Hydrograph)를 산정할 때 Gamma 분포 함수의 형태로 나타내는 모형에는 여러 가지가 있는데, Nash 모형이 가장 대표적이라고 할 수 있다. 이와 같이 유역의 IUH를 Gamma 분포 함수를 이용하여 나타내는 배경에는 IUH가 Gamma 분포 함수와 일치하는 특성이 있으며, 단지 2개의 매개변수만으로 유출 형태를 유연하게 반영하는 특성이 있기 때문이다. 그러나, Nash 모형에서 이들 매개변수는 실측자료 없이는 추정이 불가능한 경우도 있고, 경험적인 공식들이 이용되기는 하지만 이들 방법을 자료가 불충분한 미

1) 한국건설기술연구원 수자원환경연구부 선임연구원
2) 건국대학교 명예교수

계측 지역에 적용하는 것은 곤란하다.

본 연구에서는 2변수 Gamma 분포 함수 모형을 유역의 순간단위도로 이용하고자 하며, 본 연구에서 이 매개변수가 갖는 형태는 기존의 Gamma 분포 함수를 이용한 모형과는 크게 다르지 않다. 그러나, 그 추정 방법이나 해석에 있어서는 많은 차이가 있으며, 하천 길이와 하도망의 프랙탈 차원을 이용함으로써 물리적으로 새로운 개념을 도입하였다.

본 연구의 목적은 유역의 프랙탈 특성을 다각도로 분석·검토하고, Horton의 차수비와 유역 특성인자로 구성된 GIUH-Nash 모형(이후 'Rosso의 모형'과 혼용하여 사용)의 매개변수를 유역의 프랙탈 차원을 이용하여 기존 모형보다 간단하게 산정할 수 있는 프랙탈 GIUH (Fractal GIUH; FGIUH) 모형을 제시하고자 하는 것이다.

2. 프랙탈과 수문지형법칙

GIUH 모형에 이용되는 Horton의 차수비는 프랙탈 분석을 통해서 연관지을 수 있으며, Horton의 차수비로는 분기비(R_B), 길이비(R_L), 면적비(R_A)가 있다. Feder(1988)는 하천 길이의 프랙탈 차원(d)을 식 (1)과 같이 Horton의 길이비와 분기비를 이용하여 구하였다.

$$d = 2\ \frac{\log R_L}{\log R_B} \tag{1}$$

또한, Horton의 지형법칙에 의거하여 La Barbera와 Rosso(1987; 1989)는 하도망의 프랙탈 차원(D)을 식 (2)와 같이 분기비와 길이비의 함수로 나타냈다.

$$D = \min\ [2,\ \max\ [1,\ \log R_B / \log R_L]] \tag{2}$$

Taborton 등(1990)은 개별 하도망의 분기 특성이 Horton의 지형법칙과 관련이 있음을 보이고, 하천의 작은 불규칙성에서 기인하는 프랙탈의 거동을 도입하여 하도망의 프랙탈 차원과 하천 길이의 프랙탈 차원과의 관계를 식 (3)과 같이 제시하였다.

$$\frac{D}{d} = \frac{\log R_B}{\log R_L} \tag{3}$$

또한, La Babera와 Rosso(1990)는 하도망의 프랙탈 차원 산정에 대하여 식 (4)을 제안하였다.

$$D = \frac{1}{2-d}\ \frac{\log R_B}{\log R_L} \tag{4}$$

그러나, 일반적으로 실제 자연 하천에서 하천 길이의 프랙탈 차원이 갖는 값을 약 1.2(Mandelbrot, 1983)라 할 경우, 식 (3)과 식 (4)는 매우 근사한 결과를 나타낸다고 볼 수 있다. 따라서, 식 (3)과 식 (4)는 하도망의 프랙탈 현상을 적정하게 나타낼 수 있으며, 여기서 식 (3)을 이용할 경우 식 (2)는 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$D = \min\ [2,\ \max\ [1, d\ \frac{\log R_B}{\log R_L}]] \tag{5}$$

Rosso 등(1991)은 식 (6)과 같이 하천 길이의 프랙탈 차원은 유역의 하천 길이비와 면적비의 함수로 나타낼 수 있다고 하였으며, box-counting 방법으로 구한 하천 길이의 프랙탈 차원과 비교하여 공식의 적합성을 증명하였다. 또한, 하도망의 프랙탈 차원을 식 (7)과 같이 분기비와 면적비의 함수로 나타내었다.

$$d = \max\left[1,\ 2\frac{\log R_L}{\log R_A}\right] \tag{6}$$

$$D = \min\left[2,\ 2\frac{\log R_B}{\log R_A}\right] \tag{7}$$

Tarboton 등(1990)이 제시한 하도망과 하천 길이의 프랙탈 차원을 Horton의 차수비로 표현한 식 (3)을 $R_B \geq R_L$ 인 범위에 대해서 다시 정리하면 식 (8)과 같이 분기비와 길이비는 서로 하도망과 하천 길이의 프랙탈 차원을 이용하여 나타낼 수 있다. 즉, 하도망과 하천 길이의 프랙탈 차원은 길이비와 분기비만으로 결정될 수 있으며, 이는 하천에서 프랙탈 차원은 유역면적에 대해서는 독립적이라는 것을 알 수 있다. 또한, 동일한 방법으로 길이비와 면적비의 관계를 하천 길이의 프랙탈 차원을 이용해서 식 (9)와 같이 나타낼 수 있다.

$$R_B = R_L^{\ D/d} \tag{8}$$

$$R_L = R_A^{\ d/2} \tag{9}$$

여기서, 식 (8)과 식 (9)를 결합하면 식 (10)과 같이 나타낼 수 있다.

$$R_B = R_A^{\ D/2} \qquad (R_A \geq R_B \geq R_L) \tag{10}$$

위의 식 (8)~식 (10)은 면적비와 길이비, 분기비의 복합적인 관계가 하도망의 규모 특성(scaling property)에 따른 상사성의 특성을 나타내고 있음을 보여주고 있는 것으로, 하도망과 하천 길이의 프랙탈 특성은 유역이 Horton의 차수법칙을 따르는 경우 이를 이용하여 나타낼 수 있다.

3. 프랙탈 GIUH 모형의 유도

3.1 GIUH-Nash 모형

전 유역에 걸쳐서 고르게 내리는 유효강우로 인한 유역 출구에서의 직접유출을 나타내는 IUH의 고전적인 이론은 "집중형 매개변수 모형, 선형 모형, 시불변 모형"과 같은 3가지의 기본적인 가정에 기초를 두고 있다. 일반적으로 IUH에 대해서 보편적이고 널리 이용되는 해석적인 형태는 식 (11)과 같이 2변수 Gamma 분포형 함수로서 유역이 N개의 선형저수지가 직렬로 연결되어 있다고 가정한 Nash(1957)의 모형이다.

$$h(t) = \frac{1}{K\,\Gamma(N)}\left(\frac{t}{K}\right)^{N-1} e^{-\frac{t}{K}} \tag{11}$$

여기서, $h(\cdot)$는 IUH의 종거(T^{-1}), $\Gamma(\cdot)$는 Gamma 함수, N는 저수지 개수, K는 저수지 상수

이다.

Rodriguez-Iturbe와 Valdes(1979)는 자신들이 개발한 GIUH의 첨두유량과 첨두 도달시간의 곱(G_*)을 식(12)와 같이 나타내었다.

$$G_* = 0.58(R_B/R_A)^{0.55}\ R_L{}^{0.05} \tag{12}$$

Rosso(1984)는 Nash 모형에서 IUH의 첨두치와 첨두 도달시간의 무차원 곱을 식 (13)과 같이 Nash 모형의 형상계수만으로 나타냈다.

$$H_* = (N-1)^N \exp(1-N)/\Gamma(N) \tag{13}$$

위의 식을 식 (12)와 연계하여 $H_* = G_*$ 라고 가정하고, 각각의 좌변을 같다고 하면 식 (14)와 같은 형태가 된다.

$$(N-1)^N \exp(1-N)/\Gamma(N) = 0.58\ (R_B/R_A)^{0.55}\ R_L^{0.55} \tag{14}$$

식 (14)에서 독립변수 N과 종속변수 R_A, R_B, R_L 의 관계는 다중회귀분석을 이용하여 식 (15)와 같이 구할 수 있으며, K에 대해서도 같은 방법으로 식 (16)과 같이 구할 수 있다. 여기서, Horton 차수비는 각각 $2.5 \le R_A \le 5.0$, $3.0 \le R_B \le 6.0$, $1.5 \le R_L \le 4.1$ 범위이며, 이 수치들은 일반적으로 자연 하천에서 나타나는 값들이다(Rosso, 1984).

$$N = 3.29\ (R_B/R_A)^{0.78}\ R_L^{0.07} \tag{15}$$

$$K = 0.70\ [R_A/(R_B R_L)]^{0.48}\ v^{-1}\ L_\Omega \tag{16}$$

여기서, N은 Rosso에 의한 Nash 모형의 형상계수, K는 Rosso에 의한 Nash 모형의 규모계수, R_A, R_B, R_L 은 Horton의 차수비, v는 유속, L_Ω는 최고차 하천의 유로연장이다.

식(11)과 같은 Nash 모형은 강우-유출의 역학적인 관계는 선형이고 시간불변이며, 각기 사상이 다른 호우에 대해서 유속이 일정하다는 기본 가정 하에 유도된 것이다. 그러나, IUH는 각기 다른 호우사상에 대해서 시간에 따라 변하는 특성을 가지고 있으므로, 이를 설명하는 주 변수로는 유효우량의 강도에 따라서 시간과 공간적으로 변하는 흐름의 유속이 적합하다. 따라서 식 (15)와 식 (16)의 형태는 Horton의 차수비와 지형인자인 유로연장과 동수역학적 변수인 유속의 항을 도입한 것으로 강우-유출의 동적인 현상을 고려했다고 할 수 있으며, 위와 같은 Rosso 모형은 시간에 따라 불변이고 선형이라는 가정을 신축적으로 적용할 수 있도록 하였다.

3.2 프랙탈 GIUH 모형의 배경 및 제시

본 연구에서 제안하는 하천의 프랙탈 특성을 고려한 GIUH 모형은 유역의 IUH를 Gamma 분포 함수의 형태로 표현하는 기존 Nash 모형을 근간으로 하였다. Rodriguez-Iturbe와 Valdes(1979)는 유역

의 IUH를 지형 특성을 이용하여 나타내는 GIUH 모형을 제시하였으며, Rosso(1994)는 Nash 모형과 Rodriguez-Iturbe와 Valdes(1979)의 GIUH 모형을 연계하여, Horton의 차수법칙과 호우 사상의 동수역학적인 특성을 나타낼 수 있는 유속을 이용하여 Gamma 분포 함수의 매개변수를 산정하는 모형을 제시하였다.

본 연구에서는 Horton의 차수비와 프랙탈 차원의 함수적인 관계를 이용하여 GIUH 모형의 매개변수를 산정할 수 있도록 하였다. 즉 유역의 자기상사성을 나타내는 하천과 하도망의 프랙탈 차원을 직접 수문 모형에 적용하여 GIUH 모형의 매개변수를 추정하였다.

Nash가 제안한 Gamma 분포 함수를 이용한 순간단위도는 앞에서 언급하였듯이 식 (11)과 같으며, Rosso(1984)는 Nash 모형의 형상계수와 규모계수를 Horton의 차수비와 홍수파의 유속, 유로연장 등을 이용하여 식 (15) 및 식 (16)과 같이 제시하였다.

여기서, Rosso가 제시한 N값은 지형 특성치인 Horton의 차수비만의 함수로 결정되며, 이는 한 유역에 대해서 일정한 값을 가지고 있음을 알 수 있다. 또한, K 값은 지형 특성치와 더불어 동수역학적 인자인 유속으로 구성됨을 알 수 있다. 그런데, Rosso가 제시한 식 (15)와 식 (16)에 이용되는 R_A, R_B, R_L 은 4장에서 언급하였듯이 식 (8)~식 (10)과 같이 하천 길이의 프랙탈 차원 및 하도망의 프랙탈 차원과 연관지어 생각할 수 있다.

위의 관계를 이용하여 Rosso(1984)가 제안한 Nash 모형의 매개변수 N과 K를 프랙탈 차원을 이용하여 분기비의 함수로 나타내면 다음 식과 같다.

$$
\begin{aligned}
N &= 3.29\left(\frac{R_B}{R_A}\right)^{0.78} R_L^{0.07} \\
&= 3.29\left(\frac{R_B}{R_B^{\frac{2}{D}}}\right)^{0.78}\left(R_B^{\frac{d}{D}}\right)^{0.07} \\
&= 3.29\ R_B^{\frac{1}{D}(0.78D+0.07d-1.56)}
\end{aligned}
\tag{17}
$$

$$
\begin{aligned}
K &= 0.70\left(\frac{R_A}{R_B R_L}\right)^{0.48} v^{-1} L_\Omega \\
&= 0.70\left(\frac{R_B^{\frac{2}{D}}}{R_B\, R_B^{\frac{d}{D}}}\right)^{0.48} v^{-1} L_\Omega \\
&= 0.70\left(R_B^{\frac{2-D-d}{D}}\right)^{0.48} v^{-1} L_\Omega
\end{aligned}
\tag{18}
$$

4. 결론

Horton의 차수비를 이용하여 Rosso가 제안한 Nash 모형의 매개변수를 하천 길이와 하도망의 프랙탈 차원을 이용하여 길이비 또는 분기비만으로 제시하여, 매개변수 산정을 보다 간단하게 할 수 있도록 하였다. 이는 개개 지형인자 간에 존재하는 상호간의 복잡한 관계를 단일화시킨 것이며, 하천 길이와 하도망의 프랙탈 차원을 직접 강우유출 모형의 매개변수로 활용한 것이다.

본 연구에서는 Horton 차수비들 상호간에 존재하는 상관성의 원인이 유역의 프랙탈 특성에 근거한 자기상사성이란 것을 보였으며, Rosso(1984)가 제안한 Nash 모형의 매개변수를 하천의 프랙탈 특성을 이용하여 산정할 수 있도록 하고, 이를 프랙탈 GIUH 모형이라 하였다.

프랙탈 GIUH 모형은 비교적 간단한 절차를 통해서 유도되었으나, 하천의 프랙탈 특성, 즉 하천 유역이 가지고 있는 자기상사성의 기준 지표라 할 수 있는 프랙탈 차원을 강우-유출 모형의 매개변수로 활용한다는 점에서 큰 의미가 있다고 할 수 있다.

참고문헌

Feder, J. (1988). *Fractals*. Plenum, New York.

Horton, R. E. (1945). "Erosional development of streams and their drainage basins: Hydrolophysical approach to quantitative morphology." *Geological Society of American Bulletin*, Vol. 56, pp. 275-370.

La Barbera, P. and Rosso, R. (1987). "Fractal geometry of river networks." *EOS Trans.* American Geophysical Union, Vol. 68, No. 44, pp. 1276.

La Barbera, P. and Rosso, R. (1989). "On the fractal dimension of stream networks." *Water Resources Research*, Vol. 25, No. 4, pp. 735-741.

La Barbera, P. and Rosso, R. (1990). "Reply." *Water Resources Research,* Vol. 26, pp 224-228.

Mandelbrot, B. B. (1983). *Fractals: Form, chance and dimension*. W. H. Freeman, New York.

Nash, J. E. (1957). "The form of the instantaneous unit hydrograph." *International Association of Science Hydrology*, Pub. 45, Vol. 3, pp. 114-121.

Rodriguez-Iturbe, I. and Valdes, J. B. (1979) "The geomorphologic structure of hydrologic response." *Water Resources Research*, Vol. 15, No. 6, pp 1409-1420.

Rosso, R. (1984) "Nash model relation to Horton order ratios." *Water Resources Research*, Vol. 20, No. 7, pp. 914-920.

Rosso, R., Bacchi, B. and La Barbera, P. (1991). "Fractal relation of mainstream length to catchment area in river networks." *Water Resources Research*, Vol. 27, No. 3, pp. 381-387.

Tarboton, D. G., Bras, R. L. and Rodriguez-Iturbe, I. (1990). "Comment on 'On the fractal dimension of stream networks.' by La Barbera, P. and Rosso, R." *Water Resources Research*, Vol. 26, No. 9, pp. 2243-2244.