

Petrov-Galerkin 기법에 의한 오염물의 2차원 이송 - 확산해석

한 건 연* · ○김 상 호** · 박 재 흥***

1. 서 론

하천에서의 수질모형은 비교적 단순한 해석적 모형으로부터 매우 정교한 부정류 모형에 이르기까지 광범위하다. 하천에서 주된 수질변화 양상은 흐름 방향에 대하여 발생하고, 따라서 단면 평균치를 취한 1차원 모형이 일반적으로 적절하다. 그러나, 이러한 가정이 모의하고자 하는 대부분의 하천 시스템에 대하여 유효하기는 하나, 하천수계로 방류되는 하·폐수의 유입 및 두 개 하천의 합류부와 같은 국부적인 영역에 대한 해석을 위해서는 그 적용에 한계가 있다.

실제 자연현상에 부합하기 위한 수치모의는 비정상상태의 3차원 모형이 요구되지만 이의 해석에는 상당한 노력과 시간이 요구되어진다. 하천에서 수심방향의 혼합은 종·횡방향의 혼합에 비해 무시할 수 있으므로 수심방향에 대해 적분을 취한 2차원 모형을 이용함으로써 자연현상에 근접한 모의를 실시할 수 있다. 따라서, 본 연구에서는 하천에서의 2차원 이송 - 확산방정식에 대한 수치해석을 위해 Petrov - Galerkin 유한요소법을 적용하였고, 이를 해석해 및 기존의 연구모형과 비교 검토하였으며, 주요 오염물질의 동역학적 거동을 비정상 상태로 해석할 수 있는 2차원 수질 해석 모형을 개발하였다.

2. 2차원 이송 - 확산 방정식

수심 평균치를 취한 2차원 이송-확산방정식은 식 (1)과 같이 기술된다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial(hC)}{\partial t} + \frac{\partial(pC)}{\partial x} + \frac{\partial(qC)}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left[h \left(D_{xx} \frac{\partial C}{\partial x} + D_{xy} \frac{\partial C}{\partial y} \right) \right] \\ - \frac{\partial}{\partial y} \left[h \left(D_{yx} \frac{\partial C}{\partial x} + D_{yy} \frac{\partial C}{\partial y} \right) \right] + R = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

* 경북대학교 공과대학 토목공학과 교수

** 경북대학교 공과대학 토목공학과 박사과정 수료

*** 세명대학교 공과대학 토목공학과 조교수

여기서, C 는 오염물의 농도; R 은 오염물의 생성 및 소멸항을 나타내며, D_{xx} , D_{xy} , D_{yx} 및 D_{yy} 는 확산계수이고, x 와 y 는 흐름방향 및 흐름의 횡방향, p 와 q 는 x , y 방향의 단위폭당 유량, h 는 수심을 나타내고 있다. 확산과정이 등방성이라고 가정하면 확산계수는 식 (2)~(4)와 같이 기술된다.

$$D_{xx} = D_L \left(\frac{pb}{Q^2} \right) + D_T \left(\frac{aq}{Q^2} \right) \quad (2)$$

$$D_{yy} = D_L \left(\frac{aq}{Q^2} \right) + D_T \left(\frac{pb}{Q^2} \right) \quad (3)$$

$$D_{xy} = D_{yx} = (D_L - D_T) \left(\frac{bq}{Q^2} \right) \quad (4)$$

여기서 D_L 과 D_T 는 흐름방향과 연직방향으로의 확산계수이다. 이송-확산 방정식인 식 (1)에 Petrov-Galerkin 기법을 적용하면 식 (5)와 같이 표현될 수 있다.

$$\int_{\Omega} N_*^T \left\{ \frac{\partial(hC)}{\partial t} + \frac{\partial(pC)}{\partial x} + \frac{\partial(qC)}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left[h(D_{xx} \frac{\partial C}{\partial x} + D_{xy} \frac{\partial C}{\partial y}) \right] \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left[h(D_{yx} \frac{\partial C}{\partial x} + D_{yy} \frac{\partial C}{\partial y}) \right] + R \right\} d\Omega = 0 \quad (5)$$

이 식에서의 가중함수는 다음과 같다.

$$N_* = N + \frac{1}{Q\sqrt{15}} \left(p \frac{\partial N}{\partial x} + q \frac{\partial N}{\partial y} \right) \quad (6)$$

여기서

$$\Delta x = 2 \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (7)$$

$$\Delta y = 2 \left[\left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (8)$$

이제 식 (5)에서 시간항에 대한 유한차분식을 도입하고 확산항의 미분차수를 줄이기 위해 부분 적분을 적용하면 임의의 요소에 대한 이송-확산 방정식은 식 (9)와 같이 기술될 수 있다.

$$\int_A N_*^T \left[\alpha(hC) - \beta + \frac{\partial(pC)}{\partial x} + \frac{\partial(qC)}{\partial y} + R \right] dA + \int_A N^T h \left(D_{xx} \frac{\partial N}{\partial x} \frac{\partial C}{\partial x} \right. \\ \left. + D_{xy} \frac{\partial N}{\partial x} \frac{\partial C}{\partial y} + D_{yx} \frac{\partial N}{\partial y} \frac{\partial C}{\partial x} + D_{yy} \frac{\partial N}{\partial y} \frac{\partial C}{\partial y} \right) dA = 0 \quad (9)$$

이 식을 통하여 하천 수계에서의 오염물 유입에 따른 이송 및 확산과 같은 오염물질의 거동을 모의할 수 있으며, 각 오염물질의 특성에 따른 반응동역학을 추가하기 위해 생성/소멸항에 대한 고려가 필요하다.

본 연구에서는 하천으로 유입되는 점원 또는 비점원 오염물의 영향으로 인한 수질변화를 시간에 따라 예측할 수 있는 비정상 수질모형을 개발하고자 한다. 이를 위하여 여러 가지 수질항목에 대한 일반화된 동역학적 반응을 고려하기 위해 식 (1)의 R 항은 식 (10)과 같이 각 구성요소에 대한 생성/소멸 및 성장/감쇠의 항으로 도입될 수 있다.

$$R = -hGC - hS \quad (10)$$

여기서 h 는 수심 [L], C 는 수질항목의 농도 [ML^{-3}], G 는 해당되는 수질항목만의 성장/감쇠율 [T^{-1}]을 의미하며, S 는 수질항목간의 상호 동역학적 반응에 의한 생성/소멸 [$ML^{-2}T^{-1}$]을 나타낸다.

3. 모형에 대한 검증

본 연구에서 Petrov-Galerkin 기법에 의해 2차원 이송-확산모형의 검증을 위해 감쇠항을 고려하지 않은 경우와 감쇠항을 고려한 경우에 대한 수치모의를 실시하였다. 2차원 이송-확산모형의 검증을 위하여 해석해와 RMA 모형과 비교하였다. RMA 모형은 혼합보간기법을 적용하고 이를 Galerkin 기법에 의해 해석하는 범용 프로그램이다.

3.1 감쇠항을 고려하지 않은 경우

모형에 대한 적용성을 검증하기 위해 균일수로에 Petrov-Galerkin 모형을 적용하여 계산된 수치해와 해석해를 비교하였다. 먼저 오염물의 감쇠를 고려하지 않은 이송-확산방정식에 대해 비교하여 보았다. 횡방향으로의 이송-확산을 고려하지 않은 일차원 방정식에 대한 해석해는 일차원계에서의 농도 $C(x, t)$ 가 $C(x, t) = 0, x > 0, C(0, t) = C_m, t \geq 0$ 그리고 $C(x \rightarrow \infty, t) = 0, t \geq 0$ 과 같은 초기조건과 경계조건을 만족할 경우 식 (11)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{C}{C_m} = \frac{1}{2} \left[\exp\left\{\frac{ux}{D_x}\right\} \operatorname{erfc}\left\{\frac{x+ut}{2\sqrt{D_x t}}\right\} + \operatorname{erfc}\left\{\frac{x-ut}{2\sqrt{D_x t}}\right\} \right] \quad (11)$$

여기서 u 는 흐름방향으로의 이송속도, D_x 는 흐름방향으로의 확산계수, $\operatorname{erfc}(\xi) =$

$1 - \text{erf}(\xi)$ 이며, $\text{erf}(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi e^{-x^2} dx$ 를 나타낸다. 식 (11)의 해석해와 비교하기 위해 그림 1과 같이 수로의 폭이 18 m, 길이가 100 m인 단순하도의 전체 영역에 수심 1 m이며 유속이 0.5 m/s로 분포되어 있고 상류단에서 연속적으로 C_{in} 의 농도가 주입되고 있는 것으로 가정하였다. 이를 위한 유한요소망은 절점이 410개, 요소의 수는 360개, 절점의 간격 Δx , Δy 는 각각 2.5 m, 2 m이며, 계산시간 간격 Δt 는 0.001 hr (3.6 sec), 흐름방향 확산계수 D_x 는 $1 \text{ m}^2/\text{s}$ 를 사용하였다. 해석해와 본 연구모형의 수치해를 비교결과를 그림 2에 36초, 72초, 108초 후에 대하여 도시하였다. 그림에서 보는 바와 같이 시간이 경과함에 따라 수치해는 해석해와 대체로 일치하고 있는 것으로 나타났으며, RMA 모형의 결과보다 Petrov-Galerkin 모형을 통한 결과가 해석해와 더욱 작은 편차를 가지고 일치되고 있는 것으로 나타났다.

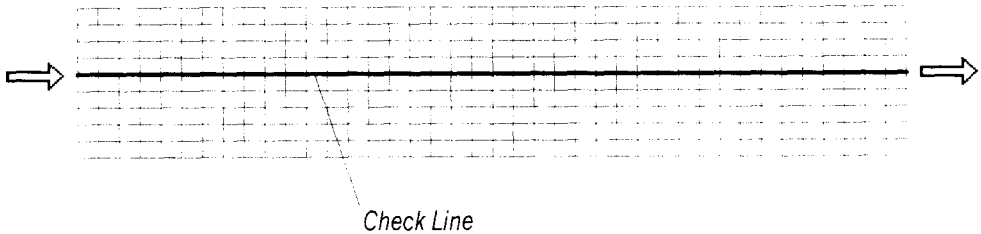


그림 1. 모형의 검증용 하도망의 구성

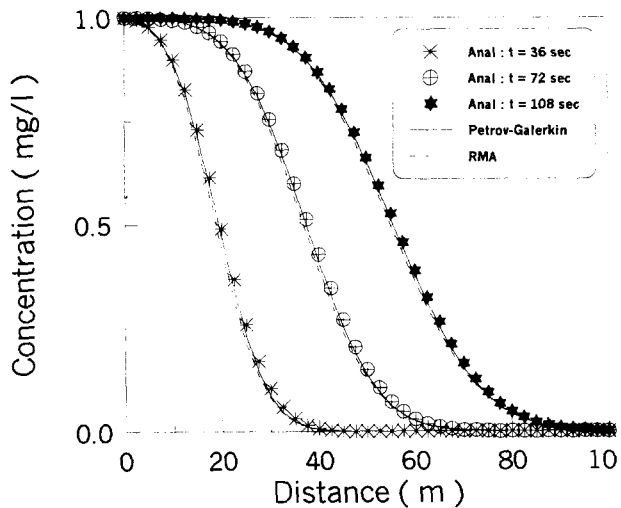


그림 2. 감쇠항을 고려하지 않은 경우에 대한 계산결과

3.2 감쇠항을 고려한 경우

이제 BOD, T-N, T-P 등과 같이 오염물이 흐름내에서 보존되지 않고 감쇠하거나 동역학적으로 반응하는 수질항목을 본 연구모형을 통해 모의할 경우의 모형에 대한 타당성을 검증하고자 한다. 이를 위해 동일한 균일수로를 사용하였으며 BOD 감쇠율 K_1 을 고려하였다. 이러한 감쇠율을 고려하였을 경우의 이송-확산 방정식에 대한 해석해는 식 (12)에서와 같이 나타난다.

$$\frac{C}{C_{in}} = \frac{1}{2} \left[\exp\left\{\frac{ux}{2D_x}(1+\mu)\right\} \operatorname{erfc}\left\{\frac{x+ut\mu}{2\sqrt{D_x t}}\right\} + \exp\left\{\frac{ux}{2D_x}(1-\mu)\right\} \operatorname{erfc}\left\{\frac{x-ut\mu}{2\sqrt{D_x t}}\right\} \right] \quad (12)$$

여기서 $\mu = \sqrt{1+4K_1D_x/u^2}$ 을 의미하며, 이에 대한 수치해와의 비교는 그림 3에 도시하였다. 그림에서와 같이 감쇠항을 고려한 경우에 대한 36초, 72초, 108초에서의 해석해에 대한 본 연구모형과 RMA 모형을 통한 수치해를 비교하여 나타내고 있다. 그림에서 보는 바와 같이 본 연구모형이 RMA 모형보다 해석해와 더욱 잘 일치되고 있음을 확인할 수 있었다.

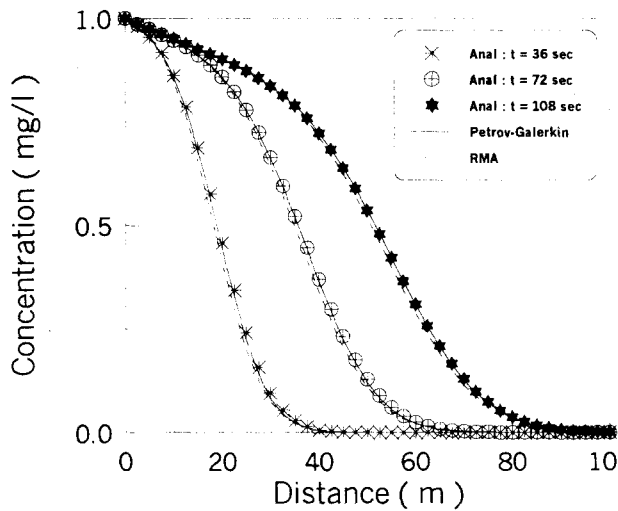


그림 3. 감쇠항을 고려한 상태에 대한 계산결과

4. 결 론

본 연구에서는 하천으로 유입되는 오염물의 이송 - 확산 특성을 규명하고 주요 오염물질의 동역학적 거동을 비정상 상태로 해석할 수 있는 Petrov - Galerkin 유한요소법에 의한 2차원 수질해석 모형을 개발하였다. 개발된 모형에 대한 검증을 위해 균일수로에 대해 해석해 결과와 비교하였으며, Petrov - Galerkin 모형에 의한 수치해는 해석해와 거의 정확하게 일치하였으며, 감쇠항을 고려한 경우에 대한 결과는 RMA 모형의 결과보다 해석해에 더욱 일치되고 있음을 확인할 수 있었다.

5. 참고문헌

- 한건연, 박재홍, 이종태. (1996). "개수로내의 점변 및 급변 부정류에 대한 유한요소해석 I: 이론 및 수치안정성 해석." **한국수자원학회논문집** 제29권, 제6호, pp. 167~178.
- 한건연, 박재홍, 이올래. (1997). "개수로내의 점변 및 급변 부정류에 대한 유한요소해석 II: 적용 예." **한국수자원학회논문집** 제30권, 제1호, pp. 35~44.
- Fisher H.B. et al. (1979). *Mixing in Inland and Coastal Waters*, Academic Press.
- Hicks, F.E., and Steffler, P.M. (1992). "Characteristic dissipative Galerkin scheme for open channel flow." *J. of Hyd. Eng., ASCE*, Vol. 118, No. 2, pp. 337-352.
- Katopodes, N.D. (1984). "Two-Dimensional Surge and Shocks in Open Channels", *J. of Hyd. Eng., ASCE*, Vol.110, No.HY6, pp. 794-812.
- Katopodes, N.D. (1987). "Analysis of transient flow through broken levees.", *Turbulence Measurements and Flow Modeling*, C. J. Chen, L. D. Chen, and F. M. Holly, Jr., eds., Hemisphere Publishing Corp., Washington, D. C., pp. 301-310.
- King, I.P., and Norton, W.R. (1978). "Recent Application of RMA's Finite Element Models for Two-Dimensional Hydrodynamics and Water Quality", *Finite Element in Water Resources*, (eds. Brebbia, C.A and others), Pentech Press. pp. 2.81-2.99.