

감쇠형 Galerkin 기법에 의한 2차원 댐파괴류 해석

한건연^{*} · 박재홍^{**} · 이을래^{***} · 김상호^{***}

1. 서론

하천에서 급변부정류에 대한 2차원적 흐름특성을 파악하는데 있어서는 2차원적으로 유동특성을 해석하는 경우가 대부분이다. 이때 수심과 수심평균치를 취한 $x - y$ 방향의 유속을 독립변수로 취한 2차원 천수방정식을 사용하면 홍수터를 포함한 하천에서의 다양한 흐름 특성을 파악할 수 있다. 2차원 천수방정식의 수치해석을 위해서는 유한차분법과 유한요소법이 고려될 수 있겠으나, 유한요소법이 자연하도에서의 불규칙 경계조건의 처리, 기하학적 변화양상 및 흐름의 경사변화가 큰 영역에서 세밀한 요소의 크기를 효율적으로 처리할 수 있고 거리 및 시간에 대한 오차가 작을 뿐 아니라, 수치해석의 안정성면에서도 우수하다. 따라서, 본 연구에서는 댐 파괴류에 따른 홍수류 해석을 위해 2차원 천수방정식을 기본식으로 하고, 이를 감쇠형 Galerkin 유한요소기법에 의하여 해석하였다.

2. 감쇠형 Galerkin 기법

수심평균치를 취한 2차원 천수방정식은 자유수면을 가진 유체의 운동을 기술하는 3차원 Navier-Stokes 식을 수심방향으로 적분함으로써 유도될 수 있는데, 이를 위해서는 연직방향의 가속도항은 무시하여 정수압 분포로 처리하는 가정이 필요로 한다. 2차원 천수방정식을 보존형으로 표시하면 식 (1)과 같다.

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + D = 0 \quad (1)$$

* 경북대학교 토목공학과 교수

** 세명대학교 토목공학과 조교수

*** 경북대학교 토목공학과 박사과정 수료

$$\text{여기서, } U = \begin{pmatrix} h \\ p \\ q \end{pmatrix} \quad F_x = \begin{pmatrix} p \\ \frac{p^2}{h} + \frac{gh^2}{2} \\ \frac{pq}{h} \end{pmatrix} \quad F_y = \begin{pmatrix} q \\ \frac{pq}{h} \\ \frac{q^2}{h} + \frac{gh^2}{2} \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} gh \frac{\partial z_0}{\partial x} + gn^2 \frac{p(p^2 + q^2)^{1/2}}{h^{7/3}} - \frac{p}{h} \left(\frac{i}{2} \right) \\ gh \frac{\partial z_0}{\partial y} + gn^2 \frac{q(p^2 + q^2)^{1/2}}{h^{7/3}} - \frac{q}{h} \left(\frac{i}{2} \right) \end{pmatrix}$$

본 연구에서는 Bubnov-Galerkin 방법의 비감쇠 특성을 개선하기 위하여 식 (2)와 같은 불연속적 보간함수와 상향가중항을 도입한 감쇠형 Galerkin 기법을 적용하였다.

$$N^* = N + \omega_x A^T \frac{\partial N}{\partial x} + \omega_y B^T \frac{\partial N}{\partial y} \quad (2)$$

여기서 ω_x 와 ω_y 는 감쇠도이고 이 식은 C^{-1} 연속성을 만족하는 조건식이 된다. 식 (2)에서 적절한 감쇠값의 설정이 문제가 되는데 식 (3)과 같은 격자의 크기와 파속에 의하여 결정될 수 있다.

$$\omega_x = \frac{\Delta x}{(u+c)\sqrt{15}}, \quad \omega_y = \frac{\Delta y}{(v+c)\sqrt{15}} \quad (3)$$

이제 식 (2)의 가중함수에 의하여 식 (1)을 유한요소방정식으로 표시하면 식 (4)와 같다.

$$\sum_{\Omega} \int_{\Omega} (N^*)^T \left[\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial N}{\partial x} + B \frac{\partial N}{\partial y} + D \right] d\Omega = 0 \quad (4)$$

여기서, NE는 전체 요소의 수, Ω 는 요소의 면적이고, $A = \partial F_x / \partial x$, $B = \partial F_y / \partial y$ 로 기술된다. 그리고, 시간미분항에 대한 Galerkin 기법의 적용은 유한차분형으로 나타나므로 가중치 θ 를 도입하여 음해형으로 기술하면 식 (5)와 같다.

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^{n+1} = \alpha U^{n+1} - \beta \quad (5)$$

$$\text{여기서, } \alpha = \frac{1}{\theta \Delta t}, \quad \beta = \alpha U^n + \frac{1-\theta}{\theta} \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^n$$

제시된 유한요소기법에 대한 해는 식 (6), (7)과 같이 Newton-Raphson 방법에 의하여 그 해를 구할 수 있다.

$$J(U^k)\Delta U^k = -f(U^k) \quad (6)$$

$$U^{k+1} = U^k + \Delta U^k \quad (7)$$

여기서, J' 는 Jacobian 매트릭스, U^k 는 초기추정 벡터값, U^{k+1} 은 개선된 벡터값, k 는 반복 계산 횟수이고 ΔU^k 가 허용한계 이내에 들 때까지 계산을 반복 수행하여 그 해를 구하게 된다.

이제 global 매트릭스의 해는 frontal 기법의 변형형태로서 non-pivoting과 all core routine을 사용함으로써 계산용량을 줄일 수 있었고 계산속도에서의 효율성을 증대시켰다.

3. 모형의 적용에

흐름모형의 안정성, 정확도, 적용성 등을 검증하기 위하여 다양한 수치실험이 실시되었다. 흐름모형을 2차원 하도에 적용하여 본 모형의 수치적 특성을 분석하였다. 수치실험을 위한 조건으로서는 정진동수치실험을 통해서 모형의 검정을 실시하였고, 댐 파괴의 경우에 대해서 적용하였다.

3.1 정진동 해석

단순하도에서 본 모형의 수렴성을 계산하기 위하여 다음과 같이 양단이 폐쇄된 1차원적인 하도의 직사각형 단면의 수평수로에서 정진동실험을 실시하였다. 하도의 길이(L)는 10 km, 단면폭(b)은 100 m, 수로바닥경사(S_0)는 수평으로 하였다. Manning의 조도계수(n)는 0.0001과 0.035, 계산격자간격 $\Delta x, \Delta y$ 를 각각 50 m, 계산 시간간격은 5초, 상류단, 하류단경계는 폐쇄단 경계로 하였고 초기수위를 cosine 함수로 주어 초기수위에 의해 파의 변화를 시험하였다.

그림 1, 2는 정진동 실험결과 나타난 시간에 따른 파의 변화양상을 조도계수에 따라 나타내고 있다. 그림 1에서 보는 바와 같이 조도계수 n 값이 0.0에 가까울때는 수위의 감쇠가 거리에 따라 매우 작은 값을 나타내고 있었고 시간이 경과함에 따라 수면경사의 감소는 나타나지 않았다. 그림 2에서는 증가된 조도계수값을 사용하여 시간의 따른 수위의 변화를 도시하였다. 그림에서 보는 바와 같이 시간에 따라 큰 수위감쇠를 나타내고 있어 본 모형이 정진동 실험에서 흐름방정식을 잘 해석하고 있음을 알 수 있었다.

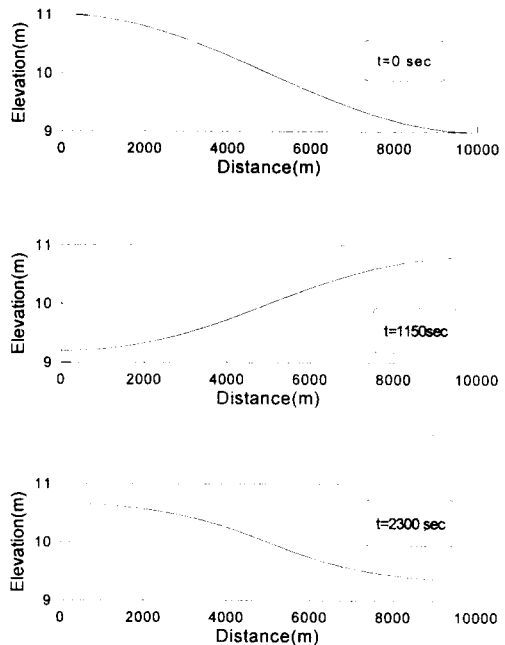
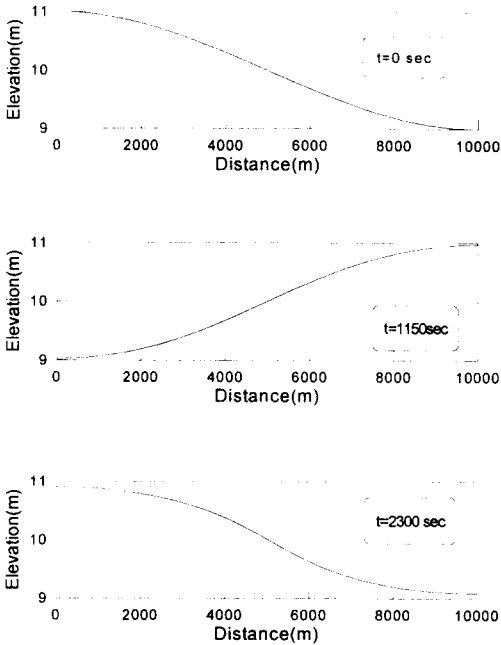


그림 1. 조도계수에 따른 파의 변화($n=0.0001$) 그림 2. 조도계수에 따른 파의 변화($n=0.035$)

3.2 댐 파괴류의 경우

댐파괴에 따른 적용의 경우는 좁고 긴 직사각형 수로의 하류부에 넓고 수심이 얇은 제내지가 존재할 경우이다. 이 경우 급격한 댐파괴의 축소단면을 하천제방 또는 댐 파괴의 경우로 보고 하류단을 폐쇄단으로 처리해서 제내지에서의 수위 및 유속분포 상황을 모의하였다. 본 수치실험의 목적은 흐름의 급격한 확대로 인해 비선형항의 영향이 증대되고 서로 다른 상하류단 경계조건이 존재하는 비교적 복잡한 흐름 상황에서 모형의 계산수행 능력을 평가하고자 함에 있다. 초기조건은 유속이 '0'이고 수로에서의 수위를 3 m, 홍수터에서의 수위를 50 cm로 가정하였고 상류단 수로에서 수문의 급격한 제거로 댐 파괴 효과를 모의하였다. 계산 절점간격은 1 m, 계산 시간 간격은 0.1초로 하였다. 본 모형을 가상하도에 적용하여 시험한 결과가 그림 3에 나타나 있다. 그림에서 계산시작 0.5초 후의 흐름양상이 나타나 있다. 급격한 댐 파괴로 인해 주수로에서 빠른 유속과 급한 수면경사를 가진 흐름이 발생하여 댐 파괴후의 초기 현상을 재현하였으며 시간이 경과함에 따라 주수로의 흐름이 발달하였고 유속분포도 댐 파괴부 상,하류단으로 확산되고 있다. 계산 시작 3.5초 후에는 주수로의 흐름이 제내지에 도달하였고 축소부의 빠르고 급한 수면경사를 가진 흐름이 단면이 급확대된 제내지에 도달하여 계산이 수렴되고 있음을 알 수 있었다. 계산시작 5.5초 후에는 주수로에서의 흐름이 제내지내로 확산되어 가고 있고 급확대부 가장자리에서 난류의 영향으로 활발한 와류

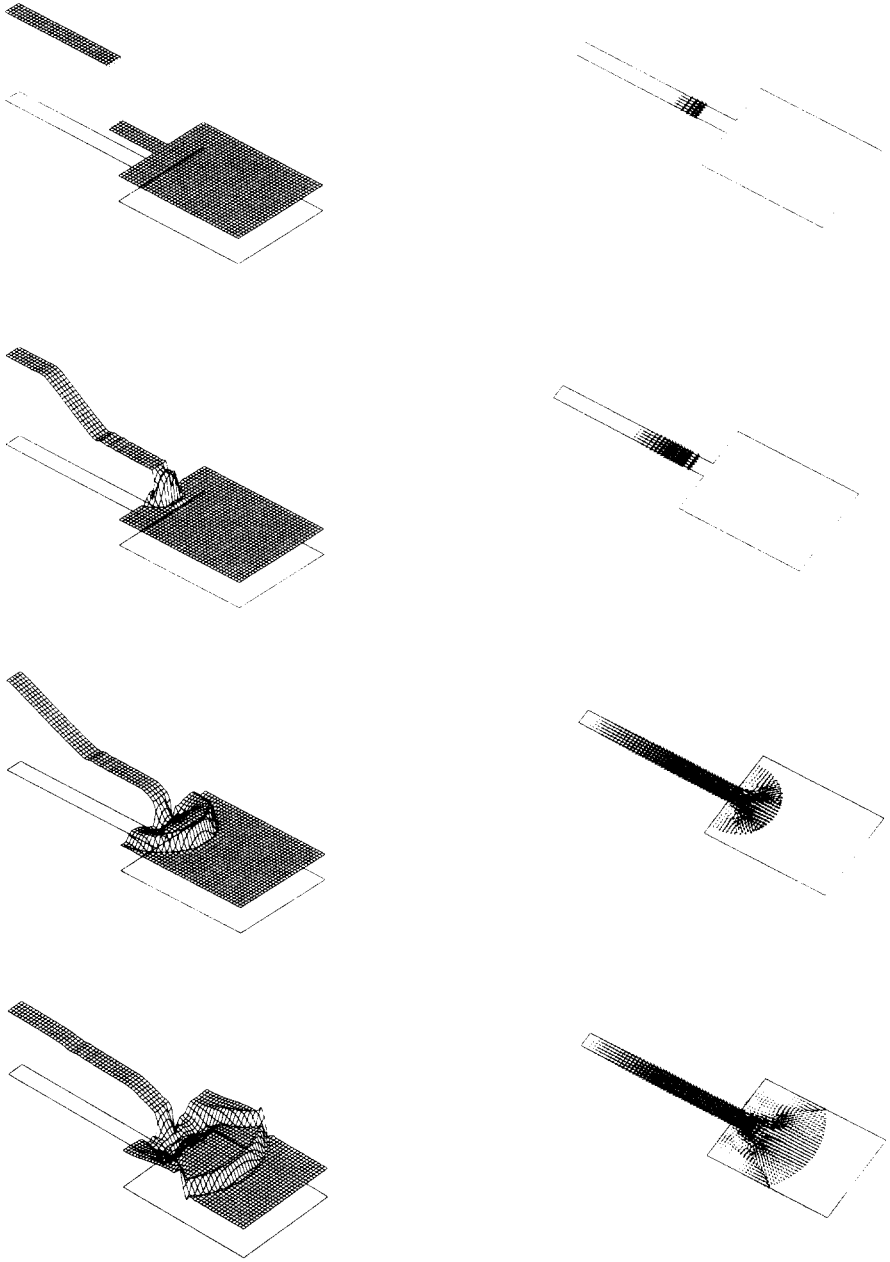


그림 3. 댐 파괴에 의한 수위 및 유속분포 (t=0.5, 3.5, 5.5, 8.5 초)

가 발생하고 있다. 제내지의 흐름 선단부에서는 선단부마찰의 영향으로 수면경사가 급하고 유속이 느린 것을 잘 재현하고 있다. 계산시작 8.5초 후에도 그림에서 주수로와 제내지의 수심과 유속을 나타내고 있다. 제내지에서는 폐쇄단 경계의 영향으로 벽면에서 반사된 흐름과 주수로에서의 확산된 흐름이 서로 경계를 이루고 확산되고 있으며 중앙부에서 주수로 흐름 운동력의 영향으로 제내지 중앙부에서 주수로 흐름의 영향이 크게 미치고 있다.

전체적으로 보면 초기상태에서는 흐름은 수로를 채우면서 흐르다가 확대부로 유입될 때 확산이 발생하면서 제내지의 침수가 시작되었다. 시간경과에 따라 제내지에서의 침수영역이 확대되고 폐쇄단 경계의 반사된 흐름과 수로에서의 주류와 경계를 이루면서 흐름 확산현상이 재현되고 있었으며 이 연구결과는 Fennema(1987), Almeida와 Franco(1993) 등의 연구결과와 잘 일치되고 있었다.

4. 결 론

본 연구에서는 감쇠형 Galerkin 기법을 댐 파괴에 대한 2차원 급변부정류에 적용하여 해석하였다. 모형의 검정을 위해서 정진동실험을 실시하였는데 시간에 따른 수면경사의 변화를 수행한 결과 정진동 실험에서 흐름방정식을 잘 해석하고 있음을 알 수 있었다. 불연속적인 가중함수는 급격한 불연속을 가지는 천수방정식의 해석에 있어서 만족할 만한 결과값을 제시하였다. 댐 파괴류의 경우에는 댐 파괴로 인해 주수로의 흐름이 제내지로 퍼져나가는 복잡한 흐름현상을 모의하였는데 이 경우에도 본 모형은 댐 파괴로 인한 주수로에서 제내지로의 확산현상을 잘 모의하고 있었으며, 본 실험과 같은 한계적인 경우에도 수렴성이 뛰어난 것을 알 수 있다. 향후 본 모형은 실제하천에의 적용과 더불어 오염물의 전파해석 및 토사의 이동해석에 적용함으로써 종합적인 수자원 관리측면에서 합리적인 하천에서의 유동현상에 대한 예측을 할 수 있는 표준적인 모의기법으로 발전될 수 있을 것으로 사료되었다.

5. 참고문헌

- Katopodes, N.D. (1984). "Two-dimensional surge and shocks in open channels." *J. of Hyd. Eng.*, ASCE, Vol. 110, No. 6, pp. 794-812.
- Garcia, R. and Kahawita, R.A. (1986). "Numerical solution of the St. Venant equations with the MacCormack finite difference scheme." *Int. J. for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 6, pp. 259-274.
- Fennema, R.J. (1987). "Numerical solution of two-dimensional transient free surface flows." *Ph. D. Thesis, Washington State Univ., Pullman, WA.*
- Almeida, R.J., and Franco, A.B. (1993). "Modeling of dam-break flow." *Proc. of the NATO Advanced Study Institute on Computer Modeling of Free Surface and Pressurized Flows, Pullman, WA, June 28~July 9.*