다지관로 해석의 정격화

유 동 훈* 강 찬 수**

1. 서론

수위와 수압이 다른 여러 개의 수조로부터 연결된 관로가 하나 또는 두 개 이상의 접합점으로 모이는 관로계를 다지관로라 칭한다. 각 관로는 관경과 관의 종류가 다를 수 있으며, 해를 구하기 위하여는 상당한 반복 시산과정이 필요하다. 더욱이 반복 시산과정에 있어 전통적인 방법은 조정량의 산정과 시산순서의 불명확성으로 반복 시산과정이 불합리하게 이루어질 가능성이 높다.

일찍이 Hardy와 Cross(1936)는 관망해석을 위하여 Taylor series를 이용하여 반복 시산을 위한 조정치를 산정하는 방법을 개발하였는데, 본 연구에서는 동일 방법을 다지관로 해석에 이용하여 조정치를 산정하고 시산순서의 명확성을 부여하는 정격화된 방법을 제시하였다. 이 경우 최종해는 각 관로의 유량과 손실수두이다. Hardy-Cross 방법에 의한 관망해석에서는 조정치로서 유량을 취하여 유량을 먼저 결정하고 손실수두를 산정한다. 반면에 본 연구에 의한 다지관로 해석에서는 조정치로서 손실수두를 취하며, 각 관로의 손실수두 또는 접합점의 수두를 먼저 결정한 후 각 관로의 유량을 산정한다.

2. 본론

다지관로를 통한 흐름은 다지관 연결점에서의 동수경사선(또는 에너지선)의 높이 X_J에 따라 흐름의 유입과 유출이 결정된다. 즉 연결점 동수경사선의 높이보다 높은 곳에 위치한 수조로 연결된 관의 흐름은 수조에서 연결점으로 유입하게 되고, 낮은 곳에 위치한 수조로 연결된 관의 흐름은 연결점에서 수조로 유출하게 된다. 다지관로의 해석에는 연결점에서의 동수경사선의 높이 X_J에 따라 흐름 방향이 결정되고, 이에 의해 각각의 관로에 흐르는 유량 Q_i를 산정할 수 있다. 이때 각 관에 대해 Darcy-Weisbach 공식과 연속방정식이 만족되어야 하며, 이 관로계의 주된 문제는 각 수조의 높이 z_i가 주어졌을 때 각각의 관을 통과하는 유량 Q_i를 구하는 것이다.

---

* 아주대학교 공과대학 환경도시공학부 부교수

** 아주대학교 공과대학 토목공학과 석사과정

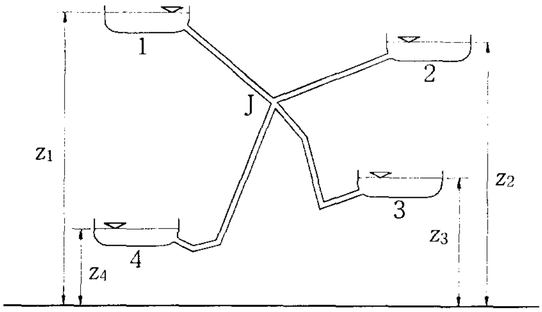

그림 1. 다지관로 배치도

그림 1에 제시된 바와 같이 연결점 J에서와 각 수조 사이에 Bernoulli 방정식을 적용하면 속도수두항은 무시되며 손실수두 h가 압력수두와 각 수조 연결점의 높이차에 대한 함수가 된다. 즉 각 수조 수면의 압력, 즉 대기압은 동일하다고 가정하였을 때 부차손실을 고려하면 각 수조에서의 손실수두 h는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} h_1 &= z_1 - \left(\frac{p_J}{\rho g} + z_J\right) = \left(f_1\frac{L_1}{D_1} + K_1\right)\frac{V_1|V_1|}{2g} \\ &\cdots \qquad\qquad\quad \cdots \\ &\cdots \qquad\qquad\quad \cdots \\ h_n &= z_n - \left(\frac{p_J}{\rho g} + z_J\right) = \left(f_n\frac{L_n}{D_n} + K_n\right)\frac{V_n|V_n|}{2g} \end{aligned} \tag{1}$$

여기서 z는 수직기준면으로부터의 높이, p는 압력, ρ는 유체의 밀도, g는 중력가속도이며, f는 Darcy-Weisbach 마찰계수, K는 부차손실계수, V는 단면평균유속이고, L과 D는 관의 제원으로서 각각 관로 길이와 관경이다. 식 (1)에서 V^2 대신 $V|V|$로 표기한 이유는 전술한 바와 같이 동수경사선의 높이에 따라 흐름 방향이 결정되기 때문이다. 즉 연결점으로 유입하는 흐름을 (+), 유출하는 흐름을 (-)로 정한다. 연결점 J에서의 동수경사선의 높이를 X_J라 표기하면 식 (1)은 다음과 같이 간단히 나타낼 수 있다.

$$h_i = z_i - X_J = \left(f_i\frac{L_i}{D_i} + K_i\right)\frac{V_i|V_i|}{2g} \qquad (i = 1, n) \tag{2}$$

또한 상기의 부호관계를 고려했을 때, 연속방정식에 의해 연결점 J에서 유입하는 유량과 유출하는 유량은 같아야 하므로 유입과 유출 유량의 총합은 항상 0이 되어야 한다. 즉, 연결점 J에서는 다음과 같은 산정식이 성립된다.

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\pi}{4} D_i^2 V_i = 0 \tag{3}$$

식 (2)와 식 (3)의 (n+1)개의 식을 연립해 풀면, 연결점 J에서 동수경사선의 높이와 각 관의 유량 Q_i를 결정할 수 있다.

식 (2)에서 무차원수 C=fL/D로 대치하고, V에 대해서 이항하여 정리하면 다음과 같이 표현된다.

$$V_i = h_i\sqrt{\frac{2g}{(C_i+K_i)|h_i|}} \tag{4}$$

상기식 (4)를 식 (3)에 대입하여 정리하면 다음과 같은 산정식이 구해진다.

$$\sum_{i=1}^{n} r_i h_i |h_i|^{-0.5} = 0 \tag{5}$$

여기서 r_i는 다음과 같다.

$$r_i = \frac{D_i^2}{\sqrt{C_i+K_i}} \tag{6}$$

식 (5)를 풀기 위해 먼저 연결점 J에서의 동수경사선의 높이 즉, X_J를 가정한 후 식 (2)로부터 각 관의 손실수두 h_i를 결정하고 이로부터 각 관의 유속 V_i 및 마찰손실계수 f_i를 결정한 후 이 결과를 식 (5)에 재대입하여 이 식의 좌변이 0이 되는지 또는 우리가 원하는 범위안(0에 가까운 값)에 있는지를 점검한다. 식 (5)의 계산결과가 우리가 원하는 범위에 들지 않으면 동수경사선의 높이를 재가정하여 시산해야 하며, 식 (5)의 좌변이 0보다 크다면 동수경사선의 높이를 낮추고, 이와 반대로 0보다 작다면 동수경사선의 높이를 높여주면 된다.

식 (5)를 직접 풀어 다지관의 미지수 h_i, Q_i를 산정할 수 있으나 비선형이라 쉽지 않다. 따라서 $h_i^{0.5}$를 선형으로 가정하고 Taylor 급수전개하면 다음과 같다.

$$h_i^{0.5} = [(h_i)_0 + \Delta h]^{0.5} = (h_i)_0^{0.5} + 0.5(h_i)_0^{-0.5}\Delta h \tag{7}$$

여기서 $(h_i)_0$는 h_i의 초기 손실수두의 가정치이고, Δh는 손실수두의 보정치이다. 식 (7)을 식 (5)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\sum_{i=1}^{n} r_i h_i^{0.5} = \sum_{i=1}^{n} r_i [(h_i)_0^{0.5} + 0.5 (h_i)_0^{-0.5} \Delta h] \tag{8}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} r_i (h_i)_0^{0.5} + 0.5 \sum_{i=1}^{n} r_i (h_i)_0^{-0.5} \Delta h = 0$$

식 (8)로부터 손실수두의 보정치 Δh는 부호를 고려하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Delta h = -\frac{\sum_{i=1}^{n} r_i (h_i)_0 |(h_i)_0|^{-0.5}}{0.5 \sum_{i=1}^{n} r_i |(h_i)_0|^{-0.5}} \tag{9}$$

이상과 같이 전개된 다지관 해석의 단계를 요약하면 먼저 X_J를 가정하고 가정된 X_J를 이용하여 각 관의 $(h_i)_0$를 결정하며, 식 (9)로부터 구한 보정치 Δh를 초기치에 더하여 새로운 손실수두의 가정치를 수정한 후 Δh가 0 또는 0에 가까울 때까지 반복한다. 다지관 해석은 어차피 반복해서 해를 구하여야 하기 때문에 더 진보된 단순화 과정이 필요없으며 매 반복과정에서 적절한 방법으로 마찰계수 f를 산정하고 부차손실계수도 포함하여 식 (6)으로 표기되는 r_i를 산정한 후 식 (9)를 이용하여 보정치 Δh를 산정한다.

3. 결론

다지관로의 경우는 어차피 반복해서 해를 구해야 되기 때문에 반복 시산과정의 정격화에 주안점을 두고 Taylor series를 이용하여 반복시산을 위한 손실수두 조정치를 산정하는 방법을 개발하였다. 이로써 다지관로 해석시 보다 간편하고 명확한 시산과정을 통하여 해를 구할 수 있게 되었으며, 다지관로 해석을 위한 수치모형 구축시 최종해에 접근하는 수렴속도의 향상을 기대할 수 있게 되었다.

4. 참고문헌

Hardy and Cross (1936), "Analysis of Flow in Networks of Conduits or Conductors", Univ. Ill. Bull. 286.

Streeter, V. L. and Wylie, E. B. (1979), Fluid Mechanics, 7th Edition, Mcgraw-Hill.