

비압축성 유체의 애니메이션

김진수, 최광진, 김동렬, 고흥석
 서울대학교 전기공학부 휴먼애니메이션 연구단

1. 서론

본 논문은 물과 같은 비압축성 유체를 유체운동 방정식(Navier-Stokes equation)을 통해 시뮬레이션하여 사실적인 애니메이션을 생성하는 방법에 대해 논한다. 공학적 목적과는 달리 애니메이션의 생성은 사람의 시각이 인지할 수 있는 수준의 정밀도만이 요구되며, 그에 따라 여러가지 근사적인 방법이 이용된다. 여기서는 공간을 성긴 격자로 분할하고 차분유체운동방정식을 통해 격자면에서의 유속을 구한 뒤, 각 셀(cell)의 질량을 보존하도록 핫지 분할(hodge decomposition)을 이용한 사영법(projection method)을 사용하여 유속과 압력을 보정하는 방법을 제시한다. 이렇게 구해진 저해상도의 유속은 보간을 통해 고해상도의 사실적인 유체의 운동을 표현하는데 이용되며, 기존의 유체 렌더링 알고리즘에 쉽게 적용 가능하다.

2. 수치적 알고리즘

2.1 유체운동 방정식

물의 역동적인 움직임을 애니메이션하기 위하여 다음의 유체운동 방정식을 푼 결과를 이용하여 물의 흐름을 표현한다.

$$u_t = -(u \cdot \nabla)u + \nu \Delta u - \nabla p,$$

$$\nabla \cdot u = 0.$$

여기서 ν 는 점성(viscosity)을 나타내며, 이 방정식으로부터 유속 $u = (u_1, u_2, u_3)$ 와 압력 p 를 구하고자한다. 첫 번째 식은 운동량 보존법칙을 기술하며 두 번째 식은 유체의 비압축성을 보장하는 방정식이다. 나비아-스톡스 방정식을 풀기 위하여 차분법(finite difference method)을 이용한다. staggered grid를 이용하여 전체 영역을 셀(cell)로 나누고 속도를 속도성분과 수직인 셀의 표면에 정의하고 각 셀의 중심에 압력을 정의한다. 각 셀을 물이 완전히 차있는 셀(Full cell)과 부분만 차있는 셀(Surface cell)로 구분하여 각각 F와 S로 마킹하고 나비아-스톡스 방정식은 F안에서 풀어서 속도를 구한다. 이때 사영법을 사용하여 차분법에서 나오는 비압축성 조건을 만족하도록 압력을 분배하여 다음 시간의 속도를 결정한다. 이 F의 속도로부터 S의 속도를 비압축성 조건을 만족하도록 구한다. 사영법을 이용하기 위해서는 중간 스텝의 정보가 필요하며 이는 다음 식으로 구한다.

$$u^{n+1/2} = u^n + \Delta t/2(- (u \cdot \nabla)u + \nu \Delta u)^n - \Delta t/2 \nabla p^{n-1/2}.$$

여기서 Δt 는 시간 간격의 크기이며 $u^n = u(\cdot, \cdot, \cdot, n\Delta t)$ 이다. 또한 잠정적인 해(provisional field) u^* 를

$$u^* = u^n + \Delta t(- (u \cdot \nabla)u + \nu \Delta u)^{n+1/2} - \Delta t \nabla p^{n-1/2}$$

로 정의한 후, 이를 비확산 함수 공간으로 사영시킨 것을 다음 스텝의 해 u^{n+1} 로 놓는다. 이는 임의의 벡터 함수를 비확산 함수(divergence-free function)와 그래디언트 포텐셜 함수(gradient potential

function)로 분리할 수 있으므로 가능하다. 즉 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$u^* = u^{n+1} + \nabla \phi.$$

포텐셜 ϕ 는 포아송 방정식(poisson equation)으로부터 구한다.

2.2. 경계조건

방정식이 잘 정의되기 위해서는 경계조건이 필요하다. 여기서는 경계의 경우가 네가지 존재한다. 하나는 고정된 경계(rigid boundary)로 물이 스며들지않는 경계이고 다른 하나는 물의 표면이 이루는 자유 경계(free boundary)이다. 고정된 경계에서는 접속도에 대해서 free-slip과 no-slip 조건이 있는데 이루고자 하는 목적에 따라서 자유로이 부여할 수 있고, 다른 한편으로는 물이 경계를 통과할 수 없으므로 법속도(normal velocity)에 대해서는 절대적으로 0을 준다. 자유경계(free boundary)에서는 보간법(interpolation)과 외삽법(extrapolation)을 적절히 사용한다. 그리고 나머지 두가지는 유입경계(inflow boundary)와 유출경계(outflow boundary)로 사용자가 원하는 속도를 원하는 시간동안 임의로 조절할 수 있다. 동시에 압력에 대한 경계조건도 같이 고려하여 포아송 방정식이 잘 정의(well-posed)되도록 하고 알고리즘 구현시에는 SOR(Successive Overrelaxiation Method)을 사용하여 푼다.

2.3. 입자

물의 움직임을 보기 위하여 무게 없는 입자들(massless particles)을 시스템에 도입하여 위에서 구한 속도들을 이용하여 입자들의 움직임을 기술한다. 속도는 각 셀의 평면 중심에만 정의되어 있으므로 셀 안의 임의의 위치에 있는 입자들의 속도를 구하기 위하여 주변의 정의된 네 개의 셀의 속도로부터 보간법(interpolation)을 사용한다. 이 입자들은 물의 경계면을 추적하는 데에도 사용된다. 자유경계면을 삼각형으로 이루어진 그물모양(mesh)으로 나타내고 각 꼭지점들을 무게 없는 입자들로 생각하여 유체의 속도에 따라서 그 움직임을 포착한다. 삼각형들의 정규성을 보존하기 위해서 입자간의 간격이 멀어지거나 가까워지면 적절히 새로운 입자들을 도입하거나 기존의 입자들을 없앤다.

전체적인 알고리즘은 다음과 같다. 먼저 전체 영역의 셀들을 마킹하고 나비아-스톡스 방정식으로부터 구한 속도를 이용하여 입자들을 움직여서 유체의 운동 및 자유경계면을 새로이 구성한다. 그리고 입자들을 이용하여 다시 셀들을 마킹하는 작업을 하고 위의 작업을 반복한다.

3. 애니메이션

실제로 유체운동방정식을 시뮬레이션하기 위해서는 많은 수의 격자가 필요하다. 그러나 여기서는 애니메이션을 위한 것이므로 $7 \times 7 \sim 11 \times 11$ 정도의 격자로 나누어 2장에서 설명한 방법을 사용하여 구현한다. 실제로 그림에서 보듯이 이 정도만의 성긴 격자로 나누어도 아주 사실적인 유체의 운동을 묘사할 수 있다. (그림 1, 2 참조)

4. 결론

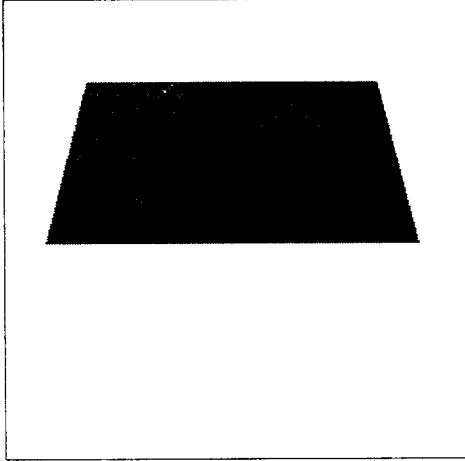
물의 애니메이션은 많은 사람들의 관심을 끌고 있지만 이에 비해서 연구결과는 미미한 실정이다. 수치적 유체운동학(CFD: Computational Fluid Dynamics)에서는 유체운동의 시뮬레이션에 대한 많은 연구결과가 있으나 보통 2차원에 대한 결과들이고 자유경계에 대한 명확한 해석이 없는 실정이다. 비록 훌륭한 결과들이 나와 있을지라도 이를 직접 애니메이션에 사용하는 데에는 많은 제약이 따른다. 실제로 애니메이션에서 원하는 물의 운동은 아주 역동적인 동작을 요구하나 이를 일반적으로 접근하는 방법은 아직 없고 특수한 경우의 결과를 이용한다고 해도 이를 실제로 구현하기 위해서는 많은 계산시간

과 메모리를 필요로 한다. 그리고 수치적인 안정성을 논하기 위해서는 CFD의 전문가 못지 않은 능력을 갖추어야 한다. 그리하여 기존의 유체 애니메이션은 보통 비물리적인 모형을 임의로 도입하여 물의 운동을 묘사하고자 하였다. 이러한 비물리적인 모형은 사실적인 유체운동을 묘사하는데 어려움이 있었고 본 논문은 이를 극복하기 위한 일련의 연구의 초석이 되고자 한다. 본 연구는 아직 시작 단계이며 앞으로 더 높은 수준의 애니메이션을 하기 위한 방법을 고려하고 있다.

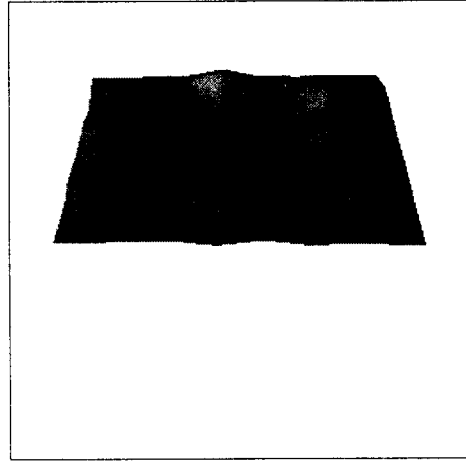
참고문헌

- [1] A. N. Almgren, J. B. Bell, P. Colella, L. H. Howell, and M. J. Welcome, A Conservative Adaptive Projection Method for the Variable Density Incompressible Navier-Stokes Equations, *J. Comput. Physics*, 142 (1998), pp. 1-46.
- [2] P. Colella and K. Pao, A Projection Method for Low Speed Flows, *J. Comp. Physics*, 149 (1999), pp. 245-269.
- [3] V. Girault and P. A. Raviart, *Finite element methods for Navier-Stokes equations: theory and algorithms*, Springer-verlag, Berlin Heidelberg NewYork Tokyo, 1986.
- [4] M. H. Kobayashi, M. C. Pereira, and C. F. Pereira, A Conservative Finite-Volume Second-Order-Accurate Projection Method on Hybrid Unstructured Grids, *J. Comput. Physics*, 143 (1999), pp. 40-75.
- [5] J. L. Lopez and J. Shen, An Efficient Spectral-Projection Method for the Navier-Stokes Equations in Cylindrical Geometries, *J. Comput. Physics*, 139 (1998), pp. 308-326.
- [6] M. L. Minion, A Projcetion Method for Locally Refined Grids, *J. Comput. Physics*, 127 (1996), pp. 158-178.
- [7] R. J. Murray, Explicit Generation of Orthogonal Grids for Ocean Models, *J. Comput. Physics*, 126 (1996), pp. 251-273.
- [8] H. N. Najm, P. S. Wyckoff, and O. M. Knio, A Semi-implicit Numerical Scheme for Reacting Flow, *J. Comput. Physics*, 143 (1998), pp. 381-402.
- [9] E. G. Puckett, A. S. Almgren, J. B. Bell, D. L. Marcus, and W. J. Rider, A Higher-Order Projection Method for Tracking Fluid Interfaces in Variable Density Incompressible Flows, *J. Comput. Physics*, 130 (1997), pp. 269-282.
- [10] R. Kupferman, Simulation of Viscoelastic Fluids: Couette-Taylor Flow, *J. Comput. Physics*, 147 (1998), pp. 22-59.
- [11] R. Temam, *Navier-Stokes equations: Theory and Numerical Analysis*, North-Holland-Amsterdam, New York Oxford, 1984.

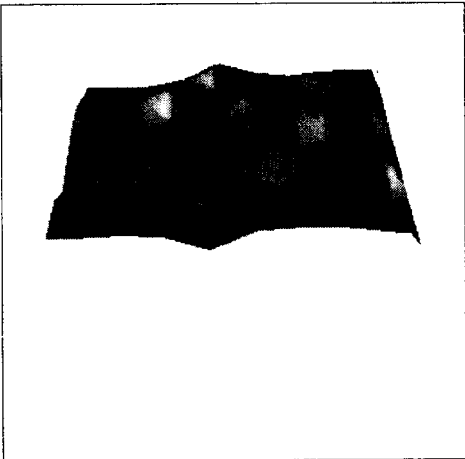
t=0.0



t=0.15



t=0.2



t=0.25

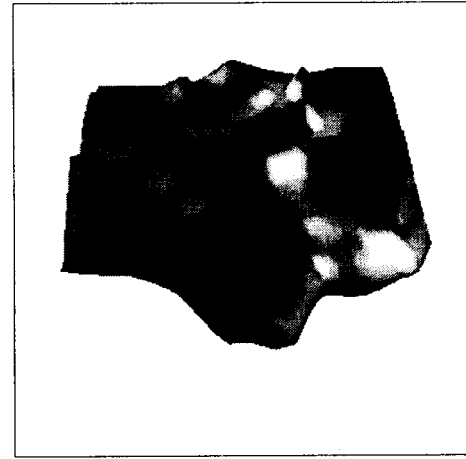


그림 1. 유입 경계와 유출 경계가 동시에 존재하는 영역에서 유체의 자유 경계면 추적. (OpenGL의 smooth shading 사용)

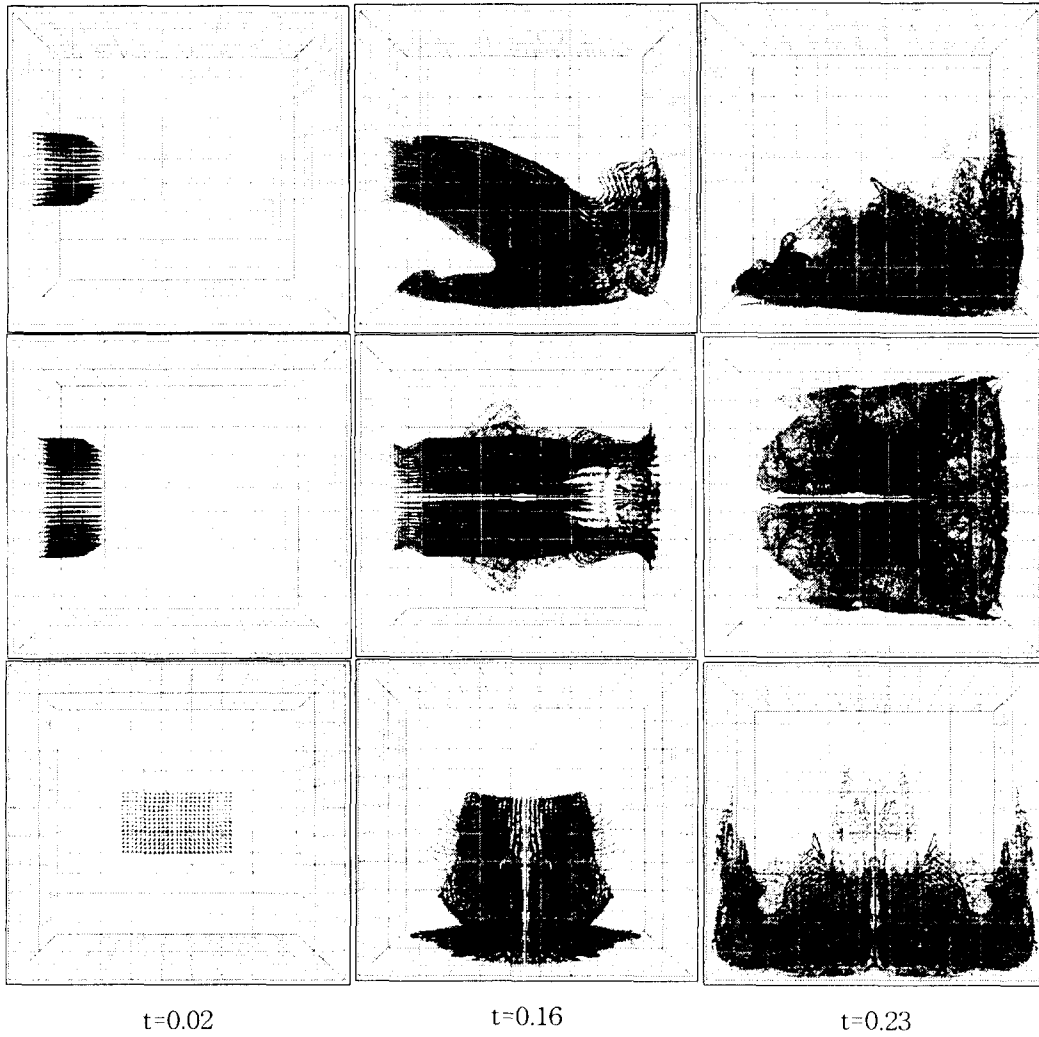


그림 2. 빈 공간의 한쪽 벽면의 일부분에 유입 경계조건을 0.15초간 유지시켰을 때의 마커 입자(marker particle)들의 변화.

(위 : 유입 경계의 옆에서 본 그림,
 가운데 : 유입 경계의 위에서 본 그림,
 아래 : 유입 경계의 맞은편에서 본 그림)