

# 완만한 곡면의 마들링을 위한 개선된 FDTD 앨거리즘

길 병 수\* · 이 상 설\*

\* 한양대학교 전자 전기 공학부

전화 : (02)2290-0361 / 팩스 : (02)2281-9912

## The improved FDTD algorithm for modeling of a smooth curved surface

Byung-soo Kil · Sang-seol Lee

E-mail : bskil@hymail.hanyang.ac.kr · yiss@taurus.hanyang.ac.kr

### Abstract

The traditional FDTD method in the stair case, the CP-FDTD method, the modified CP-FDTD method, and Dey method have been developed to analyze smooth-curved-surface structures. These methods have some disadvantages such as inaccuracy of the stair-case FDTD, instability of the modified CP-FDTD, and complexity of Dey method. The improved algorithm presented here is a mixed-form of the modified CP algorithm and Dey algorithm. It is to avoid collinear borrowing approximations and to manipulate field update equations. All of preceding methods are applied to the E-plane sectoral horn antenna to get far-field patterns. The validity and applicability of the presented one is to be shown by comparing computed far-field patterns with measured values.

**Keywords** : FDTD, CP-FDTD, 근접전계대여

### I. 서론

완만한 곡면을 갖는 물체에 대해 기존의 FDTD법을 적용함에 있어서 가장 문제가 되는 점은 실제 해석하고자 하는 물체의 곡면을 계단형(stair-case)으로 근사화시켜야 하는 점이다. 좀 더 정확한 곡면 마들링을 위한 기법중에서 국부적 변형 격자 기법은 물체 표면상의 격자들만 물체 곡면에 맞게 변형하고, 나머지 모든 공간 격자에 대해서는 직사각 격자를 그대로 사용하는 기법이다. 이러한 방법중의 하나가 궤적경로 유한-차분 시간-영역법(Contour-Path Finite-Difference Time-Domain Method, CP-FDTD)이며[1], 유한-차분 시간-영역법(Finite-Difference Time-Domain Method, FDTD)의 일반화된 방식이라 할 수 있다. 이러한 CP-FDTD법은 근접 전계 대여(collinear borrow)근사법을 사용함으로써 발생하는 불안정성 때문에 많이 사용되지 않는다. 이러한 문제를 해결하기 위해 CP-FDTD를 약간 변형한 방법[2]과 최근 Dey 와 Mittra 에 의해 발표된 일명 Dey 법[3]이 있다. 변형된 CP-FDTD법은 근접 전계 대여 근사법을 그대로 사용하는 단점이 있고, Dey 법은

격자 마들링과 갱신 식의 유도가 복잡한 단점이 있다. 이 연구에서는 이러한 단점들을 보완하고, 좀 더 효율적이고 정확한 마들링을 위해, 또 하나의 개선된 CP-FDTD법을 제시한다.

기존 FDTD법과 CP-FDTD법, 변형된 CP-FDTD법, Dey 법 그리고 이 연구에서 제시한 개선된 CP-FDTD법을 E-면 혼 안테나에 적용시키며, 원거리-근거리 휠드 변환 앨거리즘을 사용해서 구한 각각의 원거리 휠드 패턴을 측정치와 비교함으로써 제안된 앨거리즘의 효율성과 정확도를 비교, 검증한다.

### II. 개선된 유한-차분 시간-영역법(FDTD)

유한 차분 방식은 1966년 무 손실 매체에 대한 맥스웰 방정식을 효율적으로 풀기 위해서 Yee 에 의해 도입되었다[4]. 이 방식은 연속적 전자계를 공간격자의 등간격점 그리고, 등 시간 간격으로 샘플링 하는 것이었다. 이런 유한 차분 방식을 맥스웰 방정식에 적용한 방법이 FDTD법이다. 이러한 기존 FDTD법의 치명적 단점은 모든 계산영역에 직사각 격자를 사용하므로, 곡면이 계단형으로 근사화 될 수밖에 없다는 점이다.

#### 1. 궤적-경로 유한-차분 시간-영역 법(CP-FDTD)

기존 FDTD법의 단점인 곡면에 대한 계단형근사를 보완하기 위한 방법중의 하나로 도입된 방법은 국부적으로 격자를 변형시키는 방법인 CP-FDTD법이다. 기존 FDTD법이 미분형 맥스웰 방정식을 사용하는 반면, CP 앨거리즘은 맥스웰 방정식의 적분형 즉, 패러데이 법칙과 암페어 법칙에 기초한다.

그림 1 은 CP-FDTD법을 이용한 원통형 물체의 단면 해석이다. 이것은 TE 문제를 해석하기 위한 2차원 격자이며, 흰색 화살표로 표시된 전계값들은 이 전계의 갱신 식에서 요구되는  $H_z$  성분들 중에 하나 또는 모든 값이 도체 안에 존재하기 때문에 사용 불가능함을 나타내며, 또한 일반적인 갱신 식을 사용해서 직접 계산할 수 없음을 나타낸다. 이런 전계값들에 대해서는 동일선상에 있는 근접 전계를 대여하는 방법을 사용한다.

사각격자 중심의 숫자는 패러데이 궤적의 면적을 나타내며, 격자선 옆에 쓰인 숫자는 자유공간 영역에 포함된 궤적의 한 변의 길이를 나타낸다. 그 값들은 변형되지 않은 격자의 면적과 길이에 상응하는 값, 즉 100 으로 정규화 되어 있다.

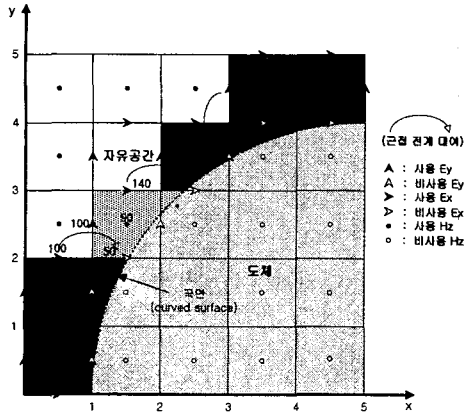


그림 1. 곡면에 대한 CP-FDTD법 구현의 예  
 $H_z(1.5, 2.5)$ 의 갱신 식은 다음과 같다.

$$H_z^{n+1}(1.5, 2.5) = H_z^n(1.5, 2.5) + \frac{\Delta t}{\mu\Delta} \left( \frac{100}{90} E_y^{n+\frac{1}{2}}(1, 2.5) + \frac{140}{90} E_x^{n+\frac{1}{2}}(1.5, 3) - \frac{50}{90} E_x^{n+\frac{1}{2}}(0.5, 2) \right) \quad (1)$$

여기서,  $E_x(0.5, 2)$ 는 대역한 노드이며,  $\Delta t$ 는 시간스텝이고,  $\Delta$ 는 공간스텝이다. 기존 CP-FDTD에서의  $E_x(0.5, 2)$ 을 위한 갱신 식은 다음과 같다.

$$E_x^{n+\frac{1}{2}}(0.5, 2) = E_x^{n-\frac{1}{2}}(0.5, 2) + \frac{\Delta t}{\epsilon\Delta} (H_z^n(0.5, 2.5) - H_z^n(0.5, 1.5)) \quad (2)$$

이 식에는 갱신하기 위해  $E_x(0.5, 2)$  값을 대역하는  $H_z(1.5, 2.5)$ 의 영향은 포함되지 않는다. 따라서, 비논리적, 비상호적 결과가 발생하여 수치적으로 불안정하고, 에너지 보존 법칙도 성립하지 않는다.

## 2. 변형된 CP-FDTD법

CP-FDTD법의 근접 전계 대역 근사법 사용과 표면상에서 확장 또는 축소되는 격자의 사용은 시간 스텝의 크기에 상관없이 에너지 보존법칙을 위반하는 결정적 역할을 한다. 이러한 문제를 해결하기 위해 제안된 방법이 기존 CP-FDTD법에서 대역되는 전계의 갱신 식을 약간 변형시키는 방법으로,  $E_x(0.5, 2)$ 의 갱신 식(식(2))에  $H_z(1.5, 2.5)$  값을 다음과 같이 포함시킨다.

$$E_x^{n+\frac{1}{2}}(0.5, 2) = E_x^{n-\frac{1}{2}}(0.5, 2) + \frac{\Delta t}{\epsilon\Delta} \left( \frac{100}{150} H_z^n(0.5, 2.5) + \frac{50}{150} H_z^n(1.5, 2.5) - H_z^n(0.5, 1.5) \right) \quad (3)$$

여기서, 두 개의  $H_z$  성분은 가중 평균치로 취해지며, 가중치는  $E_x$ 와 두 개의  $H_z$  값 사이의 의존도 세기에 상응하는 비로

결정된다. 즉, 격자 총 길이 150에서  $H_z(0.5, 2.5)$ 는 의존도 100을,  $H_z(1.5, 2.5)$ 는 의존도 50을 갖고 있다.

이러한 방식이 직관적으로 더 합리적이고, 커패시터와 자이 레이터로만 구성된 수동소자회로와 등가이므로[5], 에너지 보존 법칙도 성립한다.

## 3. Dey 법

변경된 CP-FDTD의 단점으로 지적된 사항은 갱신 식 유도과정, 메쉬생성, 프로그래밍이 기존 CP-FDTD법에 비해 매우 복잡한 점이다. 그래서 최근 Dey와 Mittra는 Dey 법을 제안하였다.

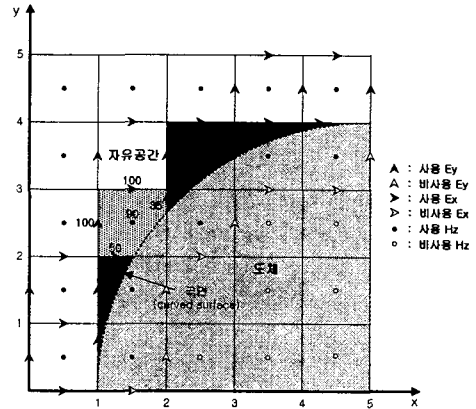


그림 2. 곡면에 대한 Dey 법 구현의 예

격자의 중앙점(자계)이 자유공간 영역이든, 도체 영역이든 상관없이 자유공간(계산)영역이 조금이라도 포함되어 있는 격자에 대해서는, 도체로 채워진 부분을 제거한 직사각 격자의 중앙에 자계를 위치시키며, 격자 영역 상에서 일정한 값을 유지한다고 가정한다. 전계는 자유공간 영역에 부분적으로 포함된 격자 상에서는 일정한 값이며, 곡면 상(도체의 점선전계성분)에서는 0의 값을 갖기 때문에 특별한 갱신 식이 필요 없다. 그러므로, 자계를 갱신하기 위해서는 격자의 길이로 적절히 가중치가 적용된, 변형된 격자상의 전계값을 일반적인 CP-FDTD 갱신 식에 적용한다.

그림 2의  $H_z(1.5, 2.5)$ 와  $E_x(1.5, 2)$ 를 위한 갱신식은 다음과 같다.

$$H_z^{n+1}(1.5, 2.5) = H_z^n(1.5, 2.5) + \frac{\Delta t}{\mu\Delta} \left( \frac{100}{90} E_x^{n+\frac{1}{2}}(1.5, 3) - \frac{50}{90} E_x^{n+\frac{1}{2}}(1.5, 2) + \frac{100}{90} E_y^{n+\frac{1}{2}}(1, 2.5) - \frac{35}{90} E_x^{n+\frac{1}{2}}(2, 2.5) \right) \quad (4)$$

$$E_x^{n+\frac{1}{2}}(1.5, 2) = E_x^{n-\frac{1}{2}}(1.5, 2) + \frac{\Delta t}{\epsilon\Delta} (H_z^n(1.5, 2.5) - H_z^n(1.5, 1.5)) \quad (5)$$

이 방식에서는 모든 자계값이 어떠한 주변 전계값의 대역없이 갱신되기 때문에 더 이상 불안정성에 관한 문제는 발생되지 않는다.

4. 개선된 CP-FDTD법

이 연구에서는 위에서 제시된 변형된 CP-FDTD법, Dey법과 더불어 CP-FDTD법의 근접 전계 대역 근사법의 불안정성을 보완하기 위한 방법으로 변형된 CP-FDTD 엘거리즘과 Dey 엘거리즘을 혼합한 또 하나의 방식을 제시한다. CP-FDTD법에서 문제가 되는 근접 전계 대역 근사를 필요로 하지 않는 엘거리즘으로, 이웃 전계값을 대역하는 전계값에 대해 특별한 엘거리즘을 적용한다.

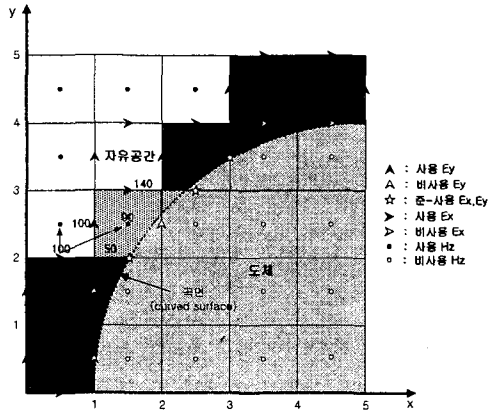


그림 3. 곡면에 대한 CP-FDTD법의 대안 구현의 예

그림 3에서  $E_x(1.5, 2)$  값은 갱신에 필요한  $H_z$  값 중 하나가 도체 안에 존재하여 수치적으로 사용 불가능하므로,  $H_z(1.5, 2.5)$  값의 갱신을 위해 근접 전계 대역 근사가 필요하다. 이러한 근접 전계 대역을 피하기 위해서, 이 연구에서 제시한 방법은  $H_z(1.5, 2.5)$  값을 갱신할 때,  $E_x(1.5, 2)$  값을 사용 가능한 것으로 일시가정하고, 그대로 갱신 식에 사용한다. 여기서,  $E_x(1.5, 2)$  성분은 사용불가와 사용가능한 중간단계로 준-사용 전계값으로 정의할 수 있다. 그림 3에서 별표가 준-사용 전계 값을 표시한다.

$E_x(0.5, 2)$  값과  $E_x(1.5, 2)$  값의 갱신을 위해, 식 (3)을 단순히 좌표점 (0.5, 2)의  $E_x$  값으로 간주하지 않고, 식 (7)과 같이 격자길이 150 상의 전체  $E_x$  값으로 간주한다. 그러므로,  $E_x(0.5, 2)$  값은 식 (3)의 100/150을,  $E_x(1.5, 2)$  값은 식 (3)의 50/100 만큼의 값을 갖는 것으로 생각할 수 있다.

$H_z(1.5, 2.5)$ ,  $E_x(0.5, 2)$ 와  $E_x(1.5, 2)$ 의 갱신 식은 다음과 같다.

$$H_z^{n+1}(1.5, 2.5) = H_z^n(1.5, 2.5) + \frac{\Delta t}{\mu\Delta} \left( \frac{100}{90} E_x^{n+\frac{1}{2}}(1, 2.5) + \frac{140}{90} E_x^{n+\frac{1}{2}}(1.5, 3) - \frac{50}{90} E_x^{n+\frac{1}{2}}(1.5, 2) \right) \quad (6)$$

$$E_x^{n+\frac{1}{2}}(0.5 \sim 1.5, 2) = E_x^{n-\frac{1}{2}}(0.5 \sim 1.5, 2) + \frac{\Delta t}{\epsilon\Delta} \left( \frac{100}{150} H_z^n(0.5, 2.5) + \frac{50}{150} H_z^n(1.5, 2.5) - H_z^n(0.5, 1.5) \right) \quad (7)$$

$$E_x^{n+\frac{1}{2}}(0.5, 2) = \frac{100}{150} E_x^{n+\frac{1}{2}}(0.5 \sim 1.5, 2) \quad (8)$$

$$E_x^{n+\frac{1}{2}}(1.5, 2) = \frac{50}{150} E_x^{n+\frac{1}{2}}(0.5 \sim 1.5, 2) \quad (9)$$

III. 수치해석 결과

이 연구에서는 기존 FDTD(계단형 근사), CP-FDTD법, 변형된 CP-FDTD법, Dey 법, 그리고 이 연구에서 제안된 개선된 CP-FDTD법을 E-면 혼 안테나에 적용하여 비교, 분석한다. 분석에 쓰인 E-면 혼 안테나의 사양은 다음과 같다. 도파관 장축의 길이  $a=22.86\text{mm}$ , 단축의 길이  $b=10.16\text{mm}$  이고, 어퍼취의 수치는  $a'=22.86\text{mm}$ ,  $b'=76.2\text{mm}$ 이다. 도파관의 길이는  $83\text{mm}$ , 홀래이 부분의 길이는  $114.3\text{mm}$  이고, 홀래이 각도는  $16.113^\circ$ 이다. 직각 WR-90 도파관(0.9 inch×0.4 inch)으로 급전되고, 주파수 대역은 X-밴드(8.2GHz-12.4GHz)이며, 중심 주파수는 10 GHz ( $\lambda = 30\text{mm}$ )이다. FDTD 마들링을 위한 공간스텝은  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 1.27\text{mm}$ 인 정육면체 Yee 셀을 사용했으며, 이 값은 중간주파수(10 GHz) 파장의 1/23.6이다.

시간 스텝  $\Delta t$ 의 값은  $2.444 \times 10^{-12}$ 을 사용한다. 전체 계산 영역의 셀 수는  $90 \times 55 \times 195$ 이며, 사용된 흡수 경계조건은 완전 정합층(PML)이며[6], 안테나의 급전은  $Z_0 = 50\Omega$ 인 동축선을 사용한다.

소스 마들링은 개선된 단순 급전 마들링을 사용했으며[7], 인가 전압은 미분된 가우시안 펄스를 사용했다. 중간 주파수 10 GHz에서의 원거리 필드 패턴을 계산하기 위해서 주파수영역 근거리-원거리 필드 변환 엘거리즘을 사용했다[8].

1. 시간 스텝에 따른 전자파 진행 과정

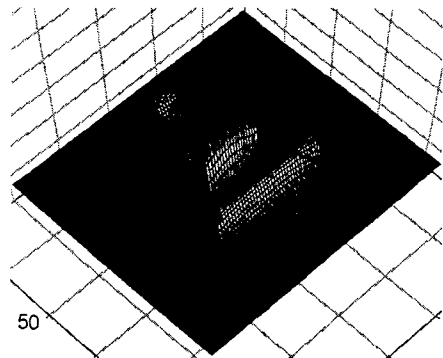


그림 4.  $400\Delta t$ 에서 E-평면상의 전계  $E_x$ 의 크기

그림 4는 전자파가 어퍼취에 도달한 상태를 나타내며, 그림 5

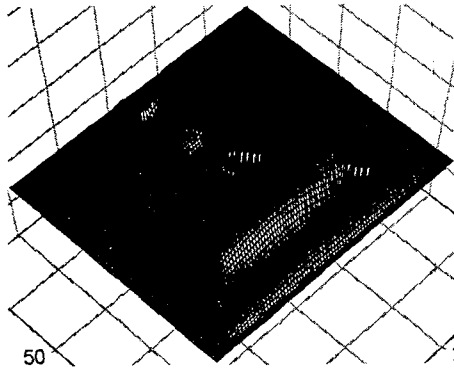


그림 5. 600MHz에서 E-평면상의 전계 Ex의 크기

는 어퍼취 양 모서리에서의 회절현상을 잘 보여주고 있다. 이러한 회절현상은 혼 안테나의 후엽준위에 주요인이 된다.

2. 원거리 필드 패턴 비교 ( $\phi = 90^\circ, -180 \leq \theta \leq 180$ )

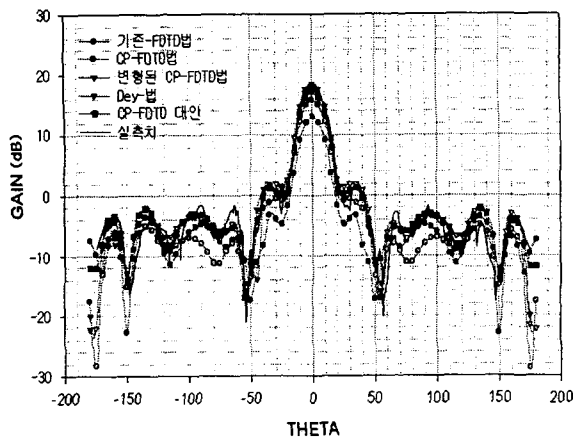


그림 6. 원거리 필드 패턴

그림 6 은 각각의 방법으로 구한 원거리 필드 패턴이다. 계산에 쓰인 공간 스텝값이 안테나 해석을 위해서는 상대적으로 큰 값이므로( $\lambda/20$ ), 기존 FDTD(계단형 근사)의 정확도가 가장 떨어짐을 알 수 있으며, 그 다음으로는 CP-FDTD법, 변형된 CP-FDTD법, 개선된 CP-FDTD법, 그리고 Dey 법 순이다. 주엽 패턴에서는 변형된 CP-FDTD법, Dey 법, 그리고 개선된 CP-FDTD법들이 대략 0.1 dB 차이를 보이며, 부엽 패턴에서 개선된 CP-FDTD법이 다른 방법에 비해 측정치에 더 잘 부합된다. 전체적으로는 3 가지 방법 모두 측정치와 잘 부합됨을 알 수 있다.

IV. 결론

이 연구에서는 완만한 곡면을 갖는 물체의 필드 해석을 위한 여러 가지 FDTD법을 소개했다. 기존 FDTD법의 계단형 근사화를 보완하기 위한 CP-FDTD법, 그리고 CP-FDTD법의 불안

정성을 보완하기 위한, 변형된 CP-FDTD법과 Dey법, 그리고 이 연구에서 제시된 개선된 CP-FDTD법을 각각 E-면 혼 안테나에 적용시켰다. 앨거리즘의 프로그래밍면에서는 기존 FDTD(계단형 근사)법이 가장 용이했으며, CP-FDTD법이나 변형된 CP-FDTD법, Dey법, 그리고 개선된 CP-FDTD법에서는 특정 셀(곡면근처)의 전자계 성분에 대한 갱신 식이 개개의 셀에 적용되므로, 갱신 식에 많은 주의가 필요했다. Dey 법은 위의 앨거리즘과 다른 격자 마들링을 사용하므로, 새로운 프로그래밍이 필요했으나, 나머지 방법들에서는 갱신 식을 약간 조작하면 된다. 계산시간은 기존 FDTD법(계단형 근사)에 비해, 나머지 방법들은 1.5배 가량 증가되었다. 계산시간에 가장 많은 부분은 복소수가 포함된 근거리-원거리 필드 변환에서 소모된다. 계산 결과  $\lambda/20$  으로서 아주 큰 공간 스텝의 선택에도 불구하고, 기존의 FDTD법만 제외하고는 측정치에 더욱 근접함을 볼 수 있었다. 변형된 CP-FDTD법, Dey 법, 개선된 CP-FDTD법의 정확도는 별 차이를 보이지 않았고, 가장 뛰어난 정확도를 보인 앨거리즘은 Dey 법이었다.

참고 문헌

- [1] T. G. Jurgens, A. Taflove, K. Umashankar, and T. G. Moore, "Finite-difference time domain modeling of curved surfaces," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 40, no. 4, pp. 357-366, Apr. 1992.
- [2] C. J. Railton and I. J. Craddock, "Stabilized CPFDTD algorithm for the analysis of arbitrary 3-D PEC structures," *Proc. Inst. Elect. Eng. Microwave Antennas Propagat.*, vol. 143, pt. H, no. 5, pp. 367-372, Oct. 1996.
- [3] S. Dey and R. Mittra, "A locally conformal finite difference time domain (FDTD) algorithm for modeling 3-D objects with curved surfaces," in *IEEE Antennas Propagat. Soc. Int. Symp., Montreal, Canada*, July 1997, vol. 4, pp. 2172-2175.
- [4] K. S. Yee, "Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-14, pp. 302-307, May. 1966.
- [5] C. J. Railton and I. J. Craddock, "Derivation and application of a passive equivalent circuit for the FDTD algorithm," *IEEE Microwave Guided Wave Lett.*, 1996.
- [6] Daniel S. Katz, Eric T. Thiele, and Allen Taflove, "Validation and Extension to three dimensions of the Berenger PML absorbing boundary condition for FDTD Meshes," *IEEE Microwave and Guided wave Letters*, vol. 4, no. 8, pp. 268-270, Aug. 1994.
- [7] James G. Maloney, Kurt L. Shlager and Glenn S. Smith, "A simple FDTD model for Transient excitation of antennas by transmission lines," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 42, no. 2, pp. 289-292, Feb. 1994.
- [8] Allen Taflove, *Advances in Computational Electrodynamics (The Finite-Difference Time-Domain Method)*. Boston, London : Artech House, pp 432-434, 1998.