슬라이딩모드를 갖는 로봇 팔의 제어기 설계

서원창*, 임규만**, 정영창*
*호서대학교 전자공학과, **초당대학교 전자공학과
*전화 : (0654) 450-7511, **전화 : (0636) 450-1288

Design of the Controller with Sliding Mode for Robot Arm

Weon-Chang Seo*, Kyu-Mann Im**, Young-Chang Jung*
Dept. of Electronics Engineering, Hoseo and Chodang University
*E-mail : swc@sunny.howon.ac.kr

Abstract

In this paper, robust vibration control of a one-link flexible robot arm based on variable structure system is discussed. We derive dynamic equations of it using a Lagragian assumed modes method based on Bernoulli-Euler beam theory. The optimal sliding surface is designed and the problem of chattering is also solved by the adoptation of a continuous control law within a small neighborhood of the switching hyperplane.

1. 서 론

로봇 매니퓰레이터는 미래의 우주공간에서의 작업에 중요한 역할을 할 것이다. 우주공간에서는 매니퓰레이터가 적은 에너지 소모를 필요로하고 있기 때문에 매니퓰레이터의 구조가 가능한 한 가볍게 구성되어야 한다. 이러한 매니퓰레이터는 구조상의 유연성 때문에 바람직하지않은 저주파진동이 발생하게 된다. 이러한 진동은 매니퓰레이터의 정밀한 작업과 안정성을 보장할 수 없게 할 것이다. 따라서 이러한 진동을 제어할 수 있는 제어기의 개발이 요구된다. 본 논문에서는 상태가 슬라이딩 평면에 도달한 후 수렴시간을 가능한 한 빠르게 하기 위해서 최적의 슬라이딩 평면을 최적이론에 근거하여 설계하고 가변구조제어 이론을 바탕으로 제어기를 설계한다. 또한 불완전한 스위칭 때문에 일어날 수 있는 채터링현상을 극복하기 위해 연속적인 입력을 사용한다. 2장에서는 [7-11]에서 소개된 단일관절 유연성 로봇 팔에 대한 동력학 방정식을 소개하고 3장에서는 2장에서 소개된 단일관절 유연성 로봇 팔에 대한 비선형 동력학 방정식을 테일러급수와 좌표변환을 이용하여 canonical form으로 바꾸고 궤적이 슬라이딩 평면에 도달한 후부터 가장 빠른 수렴시간을 갖도록 하는 최적의 슬라이딩 평면을 Ricatti 방정식과 Hamilton-Jacobi-Bellman[3] 방정식을 이용하여 설계한다. 4장에서는 슬라이딩 모드를 갖는 제어기를 설계하고 채터링현상을 제거하기위해 불연속적인 제어입력으로 수정하여 제어기를 설계한다. 5장에서는 VSS 제어법칙을 설계하였으며, 6장에서는 결론을 맺는다.

2. 유연한 One-Link 로봇 ARM의 동력학방정식

Bernoulli-Euler Beam 방식은 유연성 로봇에 대한 동력학적 방정식을 유도하는 방식 중 하나로써 대다수의 로봇 연구에서 이방식을 사용하고 있다. 본 장에서는 Bernoulli-Euler Beam 이론 및 가정모드 방식을 이용하여 그림 2.1과 같이 관절 끝부분에 부하를 갖는 단일관절 유연한 로봇 팔에 대한 동력학적 모델을 근거로 유도된 단일관절 유연성 로봇 팔에 대한 동력학 방정식은 식(2.1)과 같다.[7]

본 논문에서는 로봇 팔 길이: L, 허브의 관성모멘트: J_h, 관절의 단위 길이당 질량 : ρ, 관절의 Young 의 계수: E, 관절의 횡면적: A, 그리고 횡면적 관성 모우멘트: I 로 정의하였다.

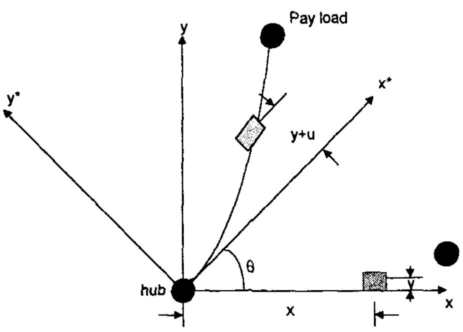

그림 2.1 단일관절 유연한 로봇 팔

시스템에 동력학 방정식은 다음과 같이 표현할 수 있다.[7]

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -\frac{d_{12}M_L\phi^2x_2^2x_3}{-d_{12}^2+cd_{22}+d_{22}M_L\phi^2x_3^2} - \frac{2d_{22}M_L\phi^2x_2x_3x_4}{-d_{12}^2+cd_{22}+d_{22}M_L\phi^2x_3^2} + \frac{d_{12}(x_4f_1+x_3k_1)}{-d_{12}^2+cd_{22}+d_{22}M_L\phi^2x_3^2} + \frac{d_{22}u}{-d_{12}^2+cd_{22}+d_{22}M_L\phi^2x_3^2}$$
$$\dot{x}_3 = x_4$$
$$\dot{x}_4 = \frac{M_L\phi^2x_2^2x_3(c+x_3^2M_L\phi^2)}{-d_{12}^2+cd_{22}+d_{22}M_L\phi^2x_3^2} + \frac{2d_{12}M_L\phi^2x_2x_3x_4}{-d_{12}^2+cd_{22}+d_{22}M_L\phi^2x_3^2} - \frac{(kx_3+fx_4)(c+x_3^2M_L\phi^2)}{-d_{12}^2+cd_{22}+d_{22}M_L\phi^2x_3^2} - \frac{d_{12}u}{-d_{12}^2+cd_{22}+d_{22}M_L\phi^2x_3^2} \quad (2.1)$$

여기서

$$c = J_h + J_b + J_L + M_LL^2$$

$$x_1 = \theta,\ x_2 = \dot{\theta},\ x_3 = \delta,\ x_4 = \dot{\delta}.$$

Remark : 식(2.1)을 평형점 0 에서 테일러 급수에 의해서 선형화한 뒤 controllability를 조사해본 결과, 시스템이 $d_{12}^2 = cd_{22}$ 가 되도록 설계된다면 평형 점에서 제어가 불가능하다는 사실을 알 수 있다. ■

3. 동력학 방정식의 선형화

본 장에서는 2장에서 소개된 동력학 방정식으로부터 시스템의 *uncertainty*와 *disturbance*를 하나의 항으로 표현하기 위해서는 다음과 같은 정합조건(matching condition)을 이용하여 진동모드 Modal(δ_1) 만을 고려한 동력학방정식으로 표현하고, 평형점(equilibrium point) "0"에서 테일러 급수(Taylor's series)에 의해서 선형화하고, 선형 좌표변환에 의하여 다시 표현된 동력학방정식을 제안한다.

$$\dot{x}(t) = (A + \triangle A(t,x))x(t) + f(t,x,u) + B[u(t) + w(t,x,u)] \quad (3.1)$$

여기서 $x \in R^n$, $u \in R$ 이고 $\triangle A(t,x)$ 는 시스템의 불확실한 항이고 $f(t,x,u)$ 는 시스템의 비선형성을 고려한 항이고 $w(t,x,u)$ 는 입력잡음을 고려한 항이다. $\triangle A$ 와 f, 그리고 w 는 연속적인 함수라고 가정하고 다음과 같은 Matching condition을 고려한다.

가정1 : 식(3.2), 식(3.3)을 만족하는 다음과 같은 함수가 존재한다.

$$h(\cdot): R^1 \times R^n \times R^1 \to R^m$$
$$d(\cdot): R^1 \times R^n \to R^m$$
$$f(t,x,u) = Bh(t,x,u)$$
$$\triangle A(t,x)x = Bd(t,x) \quad (3.2)$$

$$\mathbf{v}(t,x,u) = \begin{bmatrix} v_1(t,x,u) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_m(t,x,u) \end{bmatrix} = h(t,x,u) + d(t,x) + w(t,x,u) \quad (3.3)$$

가정2 : 다음과 같은 식을 만족시키는 연속성을 갖는 양실함수 $r_i(\cdot)$, $\rho(\cdot)$ 가 존재한다.

$$|v_i(t,x,u)| < r_i(t,x), \quad i = 1, \cdots, m$$
$$\|v(t,x,u)\| \le \rho(t,u)$$

위와 같은 가정 하에서 식(3.1)은 식(3.4)과 같이 표현될 수 있다.

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}[u(t) + v(t,x,u)] \quad (3.4)$$

여기서 $v(t,x,u)$ 는 비선형항과 불확실한 항이 정합조건에

의해서 통합된 벡터이다.

위에서 소개된 유연한 로봇 팔의 비선형 방정식을 테일러 급수와 좌표변환을 이용하여 다음과 같은 canonical form으로 선형화 할 수 있다

$$\dot{z}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \cdot & & & & \cdot\\ \cdot & & & & \cdot\\ \cdot & & & & \cdot\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\end{bmatrix} z(t)+\begin{bmatrix}0\\0\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ 0\\ 1\end{bmatrix} \cdot (u(t)+v(t,x,u)) \quad (3.5)$$

4. 슬라이딩 평면 설계

본 장에서는 최적제어 입력(u^*)에 의해서 3장에서 cannonical form 식(3.5)이 다음과 같은 슬라이딩 평면 ($s=0$)에 유한 시간 내에 도달할 수 있다고 가정하고 슬라이딩 평면을 다음과 같이 설계하였다.

$$s(x) = z_n + \sum_{i=1}^{n-1} c_i z_i = 0 \quad (4.1)$$

(3.5)과 같은 시스템은 최적제어 입력(u^*)에 의해서 슬라이딩 평면에 도달하면 다음과 같이 변환된다.

$$\begin{bmatrix}\dot{z}_1\\ \dot{z}_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \dot{z}_{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \cdot & & & & \cdot\\ \cdot & & & & \cdot\\ \cdot & & & & \cdot\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ z_{n-1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ 1\end{bmatrix} z_n \quad (4.2)$$

$$\dot{z}(t) = A\,z(t) + B\,z_n(t) \quad (4.3)$$

여기서 $\mathbf{z} = [\,z_1\ z_2\ z_3 \cdots z_{n-1}]^T$

$$z_n = -c_1 z_1 - c_2 z_2 \cdots - c_{n-1} z_{n-1}.$$

다음과 같은 performance measure를 설정하고 상태를 가장 빨리 수렴하도록 만드는 z_n 을 구하면 된다.

$$J=\int_{t_s}^{\infty}\frac{1}{2}\left(z^T Q z + z_n^T R z_n\right)dt \quad (4.4)$$

Hamilton-Jacobi-Bellman의 방정식으로부터 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$z_n = -R^{-1}B^T K\ z \quad (4.5)$$

$$= -c_1 z_1 - c_2 z_2 \cdots - c_{n-1} z_{n-1}$$

여기서 K 는 다음과 같은 Ricatti 방정식의 해가 된다.

$$0 = \dot{K}(t) + Q - K(t)BR^{-1}B^T K(t) + K(t)A + A^T K(t) \quad (4.6)$$

5. VSS 제어법칙 설계

본 장에서는 최적 슬라이딩 평면에 도달하는 입력을 설계하고 이에 따라 발생하는 채터링 현상을 없애기 위해서 불연속 입력을 슬라이딩 평면의 미소 경계 내에서 연속적인 입력으로 설정하였다. 선형화된 동력학 방정식은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B[u(t) + v(t,x,u)] \quad (5.1)$$

스위칭평면은 다음과 같이 설정하였다.

$$s = CX \quad (5.2)$$

$\dot{s} = 0$ 로부터 u_{eq} 를 구하면 다음과 같다.

$$u_{eq} = -(CB)^{-1}C(AX + Bv) \quad (5.3)$$

선형화된 방정식에 대한 입력을 다음과 같이 고려한다.

$$u = u_{eq} - k\,\mathrm{sgn}(s) \quad (5.4)$$

여기서 $s\dot{s} < -\eta|s|$ 로부터 k를 구하면 다음과 같다.

$$k \geq \max[\,\eta + v(t,x,u)] \quad (5.5)$$

여기서 η는 양수이다.

위와 같은 입력을 사용하면 채터링현상이 발생할 수 있으며 결과적으로 시스템의 모델 링에서 무시되었던 고주파성분을 포함하게 된다. 이러한 채터링현상을 줄이기 위해서 다음과 같이 미소구간 ε 내에서 연속적인 입력으로 수정한 다음과 같은 입력을 사용한다.

$$u = u_{eq} - k\tanh(s/\varepsilon) \quad (5.6)$$

이러한 입력을 이용하면 nonideal한 sliding motion이 일어난다. 그러나 ε이 아주 작게 설계된다면 ideal한 sliding 모션의 trajectory와 거의 일치할 수 있다. 이것은 다음과 같이 증명될 수 있다.

[증명]

첫째 이상적인 슬라이딩 모션(ideal sliding motion)의 경우

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \tag{5.7}$$

식(5.7)의 해는 다음과 같다.

$$\hat{x}(t) = e^{At}\hat{x}(0) \tag{5.8}$$

둘째 비이상적인 슬라이딩 모션(nonideal 슬라이딩 모션 ($s \neq 0$)) 인 경우

$$\dot{X} = AX + Hs \tag{5.9}$$
$$H = [0 \;\; 0 \;\; \cdots \;\; 1]^T$$

식(5.9)의 해는 다음과 같다.

$$\tilde{X}(t) = e^{At}\tilde{X}(0) + \int_0^t e^{A\tau}Hs(t-\tau)d\tau \tag{5.10}$$

다음과 같은 *triangular inequality* 성질을 적용하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\|\tilde{X}(t) - \hat{X}(t)\| \le \|e^{At}\| \, \|\tilde{X}(0) - \hat{X}(0)\| + \|\int_0^t e^{A\tau}Hs(t-\tau)\|$$

$\|\tilde{X}(0) - \hat{X}(0)\| \le p\varepsilon$ p : positive number

$\|\tilde{X}(t) - \hat{X}(t)\| \le N\varepsilon$ N : positive number

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \tilde{X}(t) = \hat{X}(t).$$

6. 결 론

유연성 로봇 매니퓰레이터에 대한 동력학방정식이 복잡한 비선형 형태로 유도되는 것을 알 수 있었으며, 이로 인하여 제어기 설계는 더욱 어려운 문제로 대두됨을 알 수 있었다. 또한 유연성 로봇의 경우 유연성 때문에 기인하는 비최소위상(nonminimum phase) 성질을 가지고 있어 제어기 설계를 더욱 어렵게 만든다는 사실을 알게 되었으며, 동력학 방정식을 유도하고 보면 입력은 하나이면서 제어를 해야하는 대상은 두 개(δ와 θ)가 되는 어려운 문제가 된다. 따라서 본 논문에서는 유연성 팔이 비록 무한수의 진동모드를 가질 수 있으나 진동 정도가 모드중 첫 번째 모드에 90% 이상을 가지고 있으므로 첫 번째 진동모드(δ_1)만을 고려하여 동력학 방정식을 유도하였다. 유도된 동력학 방정식이 복잡한 비선형으로 인하여 본 논문에서는 Taylor's series 전개를 활용하여 동력학 방정식을 선형화 하였으며, 이를 토대로 VSS 이론인 슬라이딩 평면 설계에 최적제어를 활용하여 제어기를 설계하므로서 선형 형태의 제어기를 설계에 대한 방법론을 제시하였다. 또한, 선형화된 동력학 방정식에 대해서 제어 불가능성과 제어가능성(controllability)에 대해서도 판별할 수 있었다.

앞으로의 연구는 선형화를 통하지 않고 제어기를 설계할 수 있는 연구와 안정도를 바탕으로한 제어기 설계에 대해서 연구를 진행할 계획이다. 또한 미분기하학 이론을 통한 비선형 시스템에 대한 연구가 활발히 진행되고 있는 바 미분기하학 이론을 바탕으로한 제어기 설계에 대해서도 연구할 계획이다.

참고문헌

[1] U. Itkis, *Control Systems of Variable Structure*. New York Wiley & Sons, 1976.

[2] V.I. Utikin and K.D.Yang, "Methods for Constructing Discontinuity Planes Multidimensional Variable Structure Systems," *Automat. Remote Control*, pp. 1466-1470,1979.

[3] Donald E. Kirk, Optimal Control Theory, 1970.

[4] S.V. Emel'yanov, and M.B.Gritsenko, "Principles of the Design of Autonomous Automatic Control Systems of Variable Structure for the Control of Multiply Connected Objects," *Proceedings International Conference on Multivariable and Discrete Auto. Control Systems Section B Prague, 1965.*

[5] S.V. Emel'yanov, S.K.Korovin, A.L. Nersisian and Yu.E. Nisenzon, "Output Feedback Stabilization of Uncertain Plants: a Variable Structure Syetem Approach, "*Int.J. Contr.*, Vol. 55, No. 1, pp. 61-81, Jan., 1992.

[6] F.Harashima, H.Hashimoto, and S.Kondo,"MOSFET Converter - Fed Position Servo System with Sliding Mode Control," *IEEE Trans. Ind. Electron.*, Vol. IE-32, No. 3, pp. 238-224, 1985.

[7] W.C. Ham and J.J Lee, "Adaptive nonlinear control of one-link flexible arm," IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robotics and Systems, Vol.1, pp.3-7, Yokohama, June, 1993.

[8] Kang-Bark Park and Ju-Jang Lee, "Continuous Sliding Mode Control System Using Virtual Reconstruction," *IEEE Int. Workshop on VSS*, pp.160-163, 1996.

[9] 소일영, 임규만, 함운철, "슬라이딩 모드를 갖는 Bang-Bang 제어," *제어.자동화, 로보틱스 연구회 합동학술대회논문집*, pp. 98-102, 1996.

[10] 이주장, 황동환, "가변구조제어 시스템에 있어서 위상 변상의 도달 시간감소," *대한전기학회 논문지*, Vol.38, No. 1, pp. 51-59, 1989.

[11] 김성태, 한종길, 임규만, 함운철, "비선형 스위칭 평면을 이용한 슬라이딩 모드제어기 설계,"*제어.자동화, 로보틱스연구회 합동학술대회 논문집*, pp. 36-40, 1997.