

DS/CDMA 통신에서 AWGN Rayleigh faded 신호의 수신단의 확률적 분석

홍창우, 장승용, 김운경

고려 대학교 전기·전자·전파공학부 통신신호처리 연구실

서울 특별시 성북구 안암동 5 가 1 번지 고려대학교

전화: (02) 927-6443/ 팩스: (02) 927-0544

Probabilty analysis for receiver of jointly disributed AWGN Rayleigh faded signals on DS/CDMA

Chang-woo Hong, Seung-Yong Chang, Woon-Kyung Kim

Communication Signal Processing Lab(CSP Lab)

School of Electrical Engineering, Korea University

E-mail: cwhong@davinci.korea.ac.kr

Abstract

Direct-Sequence code-division multiple access(DS/CDMA) is considered by many to be a promising technology for future wireless communication networks. In this paper, we report new analysis for probability of BPSK CDMA hypothesis test in jointly distributed AWGN Rayleigh-fading received signal. In previous method, analysis is performed on AWGN or Rayleigh-faded signal in separately. In this paper, we propose model for hypothesis test system of the AWGN Rayleigh-faded received signal.

서론

DS/CDMA 통신 방식은 변조하기전 신호에 직접 PN 코드를 곱하여 대역을 확산하는 통신 방식이다. 따라서 대역을 축소하기 위해 RF 신호의 변환이후 PN 코드의 time delay 를 고려하여 수신된 신호의 PN 코드와 수신기에서 발생시킨 PN 코드와의 synchronization 을 맞추어 주는 것이 필수적이다. 따라서 synchronization 을 맞추기 위해 일반적으로 hypothesis test 를 하게 된다. 기존의 방식은 AWGN 또는 Rayleigh-fading 환경에서 최적화 되어있다. 본 논문은 AWGN 과 Rayleigh-faded signal 이 jointly distributed 되어 있는 환경에서의 최적화된 hypothesis test 시스템을 제안할 것이다. hypothesis test 시스템의 분석을 위해서 송수신단의 분석할 시스템은 BPSK CDMA 통신 시스템을 가정한다. 수신된 신호는 AWGN

Rayleigh-faded 신호로 가정하며 넉코해럴트 방식으로 수신된 AWGN Rayleigh-faded 신호 hypothesis test 를 위한 확률적 모델을 세우고 분석을 할 것이다.

본론

1. BPSK system model

다음과 같이 DS/CDMA BPSK 송신기를 고려했을 때 송신되는 신호는 다음과 같다[1].

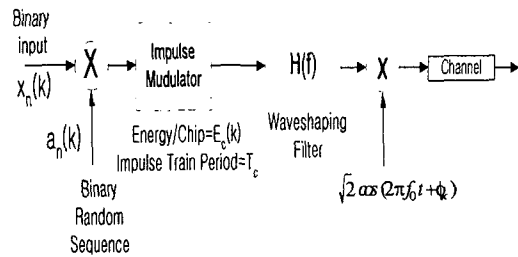


그림 1 BPSK 송신기 모델

$$s(t) = \sum_n \sqrt{E_c(k)} x_n(k) a_n(k) h(t - nT_c) \times \sqrt{2} \cos(2\pi f_0 t + \phi_k) \quad (1)$$

여기서 $x_n(k)$ 는 k 번째 사용자의 n 번째 sampling time에서의 +1 또는 -1 값을 가지는 binary input data 이고 $a_n(k)$ 는 k 번째 사용자의 n 번째 sampling time 에 해당 하는 PN 코드의 값이다.

2. Hypothesis test 모델 설정

synchronization의 획득(acquisition)은 binary hypothesis 테스트를 포함하고 있다. synchronization의 획득은 신호가 존재하느냐 하지 않느냐의 hypothesis를 테스트한다. hypothesis 테스트 모델은 신호에 대해 벡터 $\vec{y} = [y_1, y_2, y_3, \dots, y_N]$ 로 표시되는 N measurements를 가지고 있고 각 measurements에 대한 두 개의 hypothesis, '신호가 존재하느냐', '신호가 존재하지 않느냐'의 conditional probability density를 알고 있다고 가정한다. 이러한 conditional probability density, $f_s(\vec{y})$, $f_o(\vec{y})$ 는 보통 likelihood function이라 한다. '신호가 존재하느냐', '신호가 존재하지 않느냐'의 priori 확률이 equally likely하다고 가정한다면 다음과 같이 ML(maximum likelihood) rule을 사용하여 threshold를 이용한 신호의 존재여부를 판단하게 된다[2].

$$\Lambda(\vec{y}) \triangleq \frac{f_s(\vec{y})}{f_o(\vec{y})} \leq \phi \tag{2}$$

식(2)는 '신호가 존재하지 않을때'가 참일 때 '신호가 존재한다'를 선택하는 고정된 확률(false alarm probability)에 대해 '신호가 존재'할 때 '신호가 존재하지 않는다'를 선택하는 확률(miss probability)을 최소화하는 criterion을 찾는 것이다. 여기서 ϕ 는 hypothesis 테스트에서 최적화 시키는 변수에 의해 변하는 numerical threshold이다. 또, measurements $y_1, y_2, y_3, \dots, y_N$ 가 상호 독립적이라고 가정하면 likelihood ratio는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\ln \Lambda = \sum_{j=0}^N \ln [p_o(y_j) / p_1(y_j)] \leq \theta, \text{ where } \theta = \ln \Psi \tag{3}$$

2.1 Received signal model

$s(t)$ 가 채널을 통과한 전송된 신호 $r(t)$ 는 다음과 같이 표현될 수 있다[1][8].

$$r(t) = \sum_n \sqrt{2E_c(k)} x_n(k) a_n(k) h(t - nT_c) + ICI + O.U.I + v_n \tag{4}$$

여기서 ICI는 interchip interference 이고 O.U.I는 다른 사용자에 의한 interference 이고 v_n 은 background white noise이다. 여기서 수신기의 $y_n(k)$ 의 확률적 분석은 다음과 같다.

$$E[y_n(k)|x_n(k)] = \sqrt{E_c(k)} x_n(k) \int_{-\infty}^{\infty} H(f) |f|^2 df \tag{5}$$

$$Var[y_n(k)|x_n(k)] = V_I + V_N + V_O \tag{6}$$

where

$$V_I = E_c(k) a_n(k) \sum_{m=0}^{\infty} a_{n+m}(k) x_{n+m}(k) \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi m f T_c) |H(f)|^2 df$$

$$V_N = N_0/2, \quad V_O = \sum_{j \neq k} E_c(k) \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^4 df / (2T_c)$$

여기서 V_I 는 ICI에 의한 noise의 분산을 나타내며 V_N 은 background noise의 분산을 그리고 V_O 는 다른 사용자에 의한 noise의 분산을 나타낸다.

2.2 AWGN에서의 최적화된 hypothesis test 모델
amplitude가 고정되어 있고 phase가 uniformly 랜덤하다고 가정한다면 likelihood function은 다음과 같이 쓸수있다[1].

(i)신호가 있을 때

$$f_s(Z) = \frac{\exp[-(Z + M^2)/V]}{V} J_0\left(\frac{2\sqrt{M^2 Z}}{V}\right) \tag{7}$$

where

$$J_0(x) \triangleq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(x \cos \phi) d\phi, \quad Z = Y^{(I)^2} + Y^{(Q)^2}, \quad M^2 = N^2 E_c$$

(ii) 신호가 없을 때

$$f_o(Z) = \frac{\exp[-Z/V]}{V} \tag{8}$$

식(3)에 (i), (ii)의 결과를 대입하면,

$$\ln \Lambda = \ln [f_s(Z) / f_o(Z)] = \ln J_0\left(\frac{\sqrt{M^2 Z}}{V}\right) - M^2/V \leq \theta \tag{9}$$

$J_0(k\sqrt{Z})$ 는 양수의 Z에 대해 단조 증가함수 이므로, hypothesis test를 approximation시킬 수 있다.

$$Z/V = z \leq \hat{\theta} \tag{10}$$

그림 2에 식(10)에 의해 주어지는 hypothesis test 모델을 나타내었다.

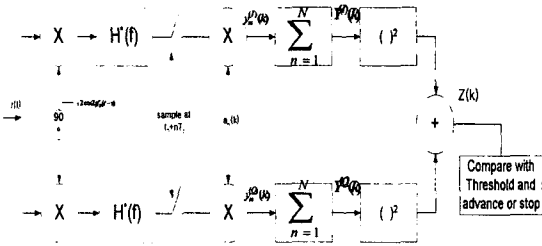


그림 2 AWGN 환경하에서 BPSK hypothesis test 모델

2. AWGN Rayleigh-faded 수신 신호의 최적화된

Hypothesis Test 모델

2.1 수신 신호의 확률적 모델링

AWGN Rayleigh-faded 수신 신호의 분석을 위해 time delay(τ) 와 frequency error(Δf)가 없고 signal phase(ϕ)가 random 변수로 주어지는 BPSK 통신환경을 가정한다. 또 각 measurements 는 독립적이라고 가정한다.

(i) 신호가 존재할 때

이 경우 AWGN 과 Rayleigh fading 변수가 jointly distributed 된 것으로 볼수 있다. 따라서 다음과 같이 likelihood function 을 모델링 할 수 있다.

$$y_n^{(I)}(k) = \alpha_n \sqrt{E_c(k)} x_n(k) \cos \phi + v_n^{(I)} \quad (10)$$

$$y_n^{(Q)}(k) = \alpha_n \sqrt{E_c(k)} x_n(k) \sin \phi + v_n^{(Q)} \quad (11)$$

식 (7), (8)에서 α_n 은 Rayleigh 분포를 하고 있으며 $v_n^{(I)}, v_n^{(Q)}$ 는 zero-mean white gaussian 분포를 하고 있다. 따라서 $y_n^{(I)}, y_n^{(Q)}$ 는 $\alpha X + v$ 형태의 joint 된 확률분포를 가진다[6].

$$f_s(y_n^{(I)}(k)) = \int_0^\infty \frac{1}{X} f_\alpha \left(\frac{y_n^{(I)}(k) - v_n^{(I)}}{X} \right) f_{v_n^{(I)}}(v_n^{(I)}) dv_n^{(I)} \quad (12)$$

$$\text{where } f_\alpha(\alpha_n) = \frac{2\alpha_n}{\sigma^2} e^{-\frac{\alpha_n^2}{\sigma^2}} \quad f_{v_n^{(I)}} = \frac{1}{\sqrt{\pi I_0}} e^{-\frac{v_n^{(I)2}}{I_0}}$$

$$X = \sqrt{E_c(k)} x_n \cos \phi, \quad x_n(k) = 1 \text{ or } -1$$

$$f_s(y_n^{(I)}(k)) = \frac{1}{\sqrt{\pi I_0}} \frac{2}{\sigma^2} \int_0^\infty (y_n^{(I)} - v_n^{(I)}) e^{-\left\{ \frac{(y_n^{(I)} - v_n^{(I)})^2}{E_c(k) \sigma^2 \cos^2 \phi} + \frac{v_n^{(I)2}}{I_0} \right\}} dv_n^{(I)} \quad (13)$$

식 (13)을 정리하면 다음과 같다.

$$f_s(y_n^{(I)}(k)) = \frac{1}{E_c(k) \cos^2 \phi} \frac{1}{\sqrt{\pi I_0}} \frac{2}{\sigma^2} \exp\left\{ \frac{b^2}{4a} - c \right\} \times \frac{1}{2a} \left[1 + \frac{b\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} \right] \quad (14)$$

$$\text{where } a = \frac{1}{E_c(k) \sigma^2 \cos^2 \phi} + \frac{1}{I_0}, \quad b = -\frac{2y_n^{(I)}}{I_0}, \quad c = \frac{y_n^{(I)2}}{I_0}$$

I channel 과 Q channel 은 대칭적이므로 식 (14)을 이용하여 $f_s(y_n^{(Q)}(k))$ 를 구할수 있다.

$$f_s(y_n^{(Q)}(k)) = \frac{1}{E_c(k) \sin^2 \phi} \frac{1}{\sqrt{\pi I_0}} \frac{2}{\sigma^2} \exp\left\{ \frac{b'^2}{4a'} - c' \right\} \times \frac{1}{2a'} \left[1 + \frac{b'\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a'}} \right] \quad (15)$$

$$\text{where } a' = \frac{1}{E_c(k) \sigma^2 \sin^2 \phi} + \frac{1}{I_0}, \quad b' = -\frac{2y_n^{(Q)}}{I_0}, \quad c' = \frac{y_n^{(Q)2}}{I_0}$$

(ii) 신호가 존재하지 않을 때

이 경우에는 신호의 amplitude 에 Rayleigh fading random 변수가 없기 때문에 AWGN 의 확률밀도함수만 고려해 주면 된다[6].

$$f_o(y_n^{(I)}(k)) = \frac{1}{\sqrt{\pi I_0}} \exp\left[-\frac{y_n^{(I)2}}{I_0} \right] \quad (16)$$

$$f_o(y_n^{(Q)}(k)) = \frac{1}{\sqrt{\pi I_0}} \exp\left[-\frac{y_n^{(Q)2}}{I_0} \right] \quad (17)$$

(i), (ii)에서 얻은 결과를 식(6)에 대입하기 위해 정리하면 다음과 같다.

$$f_s(\bar{y}^{(I)}, \bar{y}^{(Q)}) = f_s(y_1^{(I)}(k), y_2^{(I)}(k), \dots, y_N^{(I)}(k), y_1^{(Q)}(k), \dots, y_N^{(Q)}(k)) \\ = f_s(y_1^{(I)}(k)) \cdot f_s(y_2^{(I)}(k)) \cdots f_s(y_N^{(I)}(k)) \cdot f_s(y_1^{(Q)}(k)) \cdots f_s(y_N^{(Q)}(k))$$

$$f_s(\bar{y}^{(I)}, \bar{y}^{(Q)}) = \left\{ \prod_{n=1}^N \frac{1}{4aa'} \left(1 + \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}I_0} y_n^{(I)}(k) \right) \times \left(1 + \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a'}I_0} y_n^{(Q)}(k) \right) \right\} \quad (18)$$

$$\exp \left[\frac{1}{4aa'} \left[\left(\frac{a'}{I_0^2} - \frac{4aa'}{I_0} \right) \sum_{n=1}^N (y_n^{(I)}(k))^2 + \left(\frac{a}{I_0^2} - \frac{4aa'}{I_0} \right) \sum_{n=1}^N (y_n^{(Q)}(k))^2 \right] \right]$$

$$f_o(\bar{y}^{(I)}, \bar{y}^{(Q)}) = f_o(y_1^{(I)}(k), y_2^{(I)}(k), \dots, y_N^{(I)}(k), y_1^{(Q)}(k), \dots, y_N^{(Q)}(k))$$

$$= f_o(y_1^{(I)}(k)) \cdot f_o(y_2^{(I)}(k)) \cdots f_o(y_N^{(I)}(k)) \cdot f_o(y_1^{(Q)}(k)) \cdots f_o(y_N^{(Q)}(k))$$

$$f_o(\bar{y}^{(I)}, \bar{y}^{(Q)}) = \left\{ \frac{1}{\pi I_0} \right\}^N \prod_{n=1}^N \exp\left[-\frac{(y_n^{(I)}(k))^2 + (y_n^{(Q)}(k))^2}{I_0} \right] \quad (19)$$

where $a = \frac{1}{E_c(k)\sigma^2 \cos^2 \phi} + \frac{1}{I_0}$, $b = -\frac{2y_n^{(I)}}{I_0}$, $c = \frac{y_n^{(I)^2}}{I_0}$,

$a' = \frac{1}{E_c(k)\sigma^2 \sin^2 \phi} + \frac{1}{I_0}$, $b' = -\frac{2y_n^{(Q)}}{I_0}$, $c' = \frac{y_n^{(Q)^2}}{I_0}$

식(18), (19)을 식(3)에 대입하여 정리해보면,

$$\ln \Lambda(\bar{y}) = \sum_{n=1}^N \left\{ \ln \frac{1}{4aa'} + \ln \left(1 + \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}I_0} y_n^{(I)}(k) \right) + \frac{1}{4aa'} \right. \\ \left. + \ln \left(1 + \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a'}I_0} y_n^{(Q)}(k) \right) \right\} \\ \times \left\{ \left(\frac{a'}{I_0^2} - \frac{4aa'}{I_0} \right) \sum_{n=1}^N \{y_n^{(I)}(k)\}^2 + \left(\frac{a}{I_0^2} - \frac{4aa'}{I_0} \right) \sum_{n=1}^N \{y_n^{(Q)}(k)\}^2 \right\} \\ + N \ln(\pi I_0) + \frac{1}{I_0} \left\{ \sum_{n=1}^N \{y_n^{(I)}(k)\}^2 + \sum_{n=1}^N \{y_n^{(Q)}(k)\}^2 \right\} \quad (20)$$

식(20)을 아래 식(21)로 approximation 할 수 있다.

$$\ln \Lambda(\bar{y}) \approx \sum_{n=1}^N \left[\frac{E_c(k)\sigma^2 \cos^2 \phi}{4I_0(I_0 + E_c(k)\sigma^2 \cos^2 \phi)} \times \left\{ y_n^{(I)}(k) + \sqrt{\frac{\pi I_0(I_0 + E_c(k)\sigma^2 \cos^2 \phi)}{E_c(k)\sigma^2 \cos^2 \phi}} \right\}^2 \right. \\ \left. + \frac{E_c(k)\sigma^2 \sin^2 \phi}{4I_0(I_0 + E_c(k)\sigma^2 \sin^2 \phi)} \times \left\{ y_n^{(Q)}(k) + \sqrt{\frac{\pi I_0(I_0 + E_c(k)\sigma^2 \sin^2 \phi)}{E_c(k)\sigma^2 \sin^2 \phi}} \right\}^2 \right] \\ \leq \theta \quad \text{where } \theta = \ln \Psi \quad (21)$$

이제 식 (21)에 근거하여 다음과 같이 hypothesis test 시스템을 제안한다.

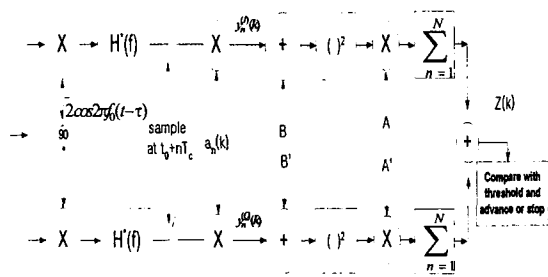


그림 3 BPSK hypothesis test 모델링

where

$$A = \frac{E_c(k)\sigma^2 \cos^2 \phi}{4I_0(I_0 + E_c(k)\sigma^2 \cos^2 \phi)}, B = \sqrt{\frac{\pi I_0(I_0 + E_c(k)\sigma^2 \cos^2 \phi)}{E_c(k)\sigma^2 \cos^2 \phi}}$$

$$A' = \frac{E_c(k)\sigma^2 \sin^2 \phi}{4I_0(I_0 + E_c(k)\sigma^2 \sin^2 \phi)}, B' = \sqrt{\frac{\pi I_0(I_0 + E_c(k)\sigma^2 \sin^2 \phi)}{E_c(k)\sigma^2 \sin^2 \phi}}$$

식(21)에 의한 그림 3 의 DS/CDMA hypothesis test 시스템은 AWGN Rayleigh-faded 수신 신호에 대한 ML rule 에 근거한 최적화된 hypothesis test 시스템이다.

결론

본 논문은 수신된 AWGN Rayleigh-faded 신호에 대한 모델링과 신호의 확률적 분석 및 네펜코herent 방식의 BPSK DS/CDMA 수신기의 hypothesis test 를 위해 AWGN Rayleigh-faded 신호에 최적화된 시스템을 제안하였다. 시스템의 최적화를 위해 ML rule 을 사용하였다. 계속할 수 있는 연구로서는 본 논문에서 제시한 최적화된 시스템에서 trade-off 를 통한 복잡한 시스템의 간략화 및 성능분석을 추진하고 있다. 또한 다른 환경(Rician fading 등등)에서의 jointly distributions 되었을때 위 시스템의 성능저하를 막는 또다른 block 를 구현해 내는 연구가 필요하다.

Acknowledgements

본 논문은 현대전자(주)의 지원으로 수행된 산학연구과제 “PCS 기술연구개발: 소프트웨어 시뮬레이션 분야”와 학술진흥연구재단의 “ 위성 수신 시스템 통신 기반 기술: 디지털 위성 통신 변복조, 부복호화, 암호화 기반 기술에 관한 연구” 결과중 일부입니다.

참고문헌

- [1] A. J. Viterbi, *CDMA: Principles of Spread Spectrum Communication*. Addison-Wesley, 1995.
- [2] Hellstrom, C. W. , *Statistical Theory of Signal Detection*. Pergamon, London
- [3] Pursley, M. B. , “Performance Evaluation for Phase-Coded Spread-Spectrum Multiple Access Communication-Part I: System Analysis.”, *IEEE Trans. Comm.* **COM-25**, 795-799
- [4] Marcum, J. I. , “A Table of Q-function”, *Rand Corp. Report*. RM-339, January
- [5] Neyman, J. , and Pearson, E. S. “On the Problem of the Most Efficient Tests of Statistical Hypotheses”, *Phil. Trans. Roy. Soc. London, Series A* **231**, 289-337
- [6] A. Papoulis, *Probability, Random Variables, and Stochastic Process*. McGraw-Hill, Inc. , 1991
- [7] Chi-Tsong Chen, *Linear System Theory and Design*. Oxford University Press, 1984
- [8] John G. Proakis and Masoud Salehi, *Digital Communications*. McGraw-Hill, Inc. ,1995