

도시 철도의 정밀 정차 제어에 있어서의 ATO 프로파일의 선택

The selection of ATO profile on precision stop controller for urban railway

이태연¹⁾ 김용민²⁾ 박준영³⁾ 박재홍⁴⁾
Lee, Taeyeon Kim, Yongmin Park, Junyoung Park, Jaehong
한성호⁵⁾ 박현준⁶⁾ 안태기⁷⁾ 온정근⁸⁾ 백종현⁹⁾
Han, Seoungho Park, Hyunjune An, Taeki Ohn, Jungghun Baek, Jonghyun

Abstract

This paper is mainly concerned with the development of the ATO(Automatic Train Operation) profile on precision stop controller. The ATO system is used for automatic or driverless operation of a train. In this paper, the algorithm for ATO controller is presented and three speed profiles on precision stop controller are compared. One profile is based on the maximum jerk control, another on the constant control input, and the third on the optimal control for the minimum energy consumption. These profiles are simulated and analyzed in view of the stop time, control input, jerk, propulsion and braking.

1. 서론

도시 철도 차량(지하철)의 전동차 자동 운전(Automatic Train Operation, ATO)은 운전자의 조작을 최소화하여 전동차를 자동 운전 및 무인 운전으로 운행하기 위한 장치를 말한다. ATO는 전동차 운행 위해 가감속 제어 및 목표 속도 제어, 정밀 정차 제어의 역할을 수행하는 제어 알고리즘을 구현하는데, 제어 알고리즘은 추종 입력 생성기 부분과 추종 제어기 부분으로 나누어 설계한다. 추종 입력 생성기는 속도 프로파일을 생성하는 부분이며, 추종 제어기는 생성된 속도 프로파일을 추종하는 부분이다. 추종 입력 생성기에서 생성하는 속도 프로파일에는 가감속 제어 및 목표 속도 제어를 위한 것과 정밀 정차 제어를 위한 것이 있다.

본 논문에서는 구현의 난이도 및 그 역할로 보아 ATO의 핵심 요소인 정밀 정차 제어를 위한 속도 프로파일을 세 가지 선정하여 비교 분석한다. 선정한 속도 프로파일은 정차 거리 중심 및 제어 입력 중심, 제어 에너지 중심으로 각각 하나씩 고른 것이다. 첫 번째는 최대 jerk를 고려하여 정밀 정차 제어에 사용되는 정밀 정차 표시기(Precision Stop Marker, PSM)를 중심으로 속도가 변화되도록 작성한 속도 프로파일이며, 두 번째는 정차할 거리 및 시간이 주어졌을 때 필요한 제동력을 정차 구간 내내 일정하게 되도록 계산하여 얻은 속도 프로파일이며, 세 번째는 정차 구간 내에서 사용하는 최적 제어 기법을 이용하여 정차에 사용한 소모 에너지가 최소가 되도록 계산하여 얻은 속도 프로파일이다.

이 세 가지 속도 프로파일을 비교 분석하기 위해 각각 모의 실험을 통해 정밀 정차를 수행하고, 그 결과에 대하여 정차 시간 및 제어 입력의 RMS의 제곱, 최대 jerk, 최대 전인력, 최대 제동력 등의 기준으로 특성을 조사한다.

- 1) 서울대학교 전기공학부 박사과정 2) 서울대학교 전기공학부 박사과정 3) 서울대학교 전기공학부 석사과정
4) 서울대학교 전기공학부 부교수 5) 한국철도기술연구원 선임연구원 6) 한국철도기술연구원 책임연구원
7) 한국철도기술연구원 주임연구원 8) 한국철도기술연구원 주임연구원 9) 한국철도기술연구원 연구원

모의 실험 조건은 실제 서울 지하철 8호선 노선 데이터를 참조하여 적당한 범위 내의 것으로 PSM1을 만난 후 정차 시간 60초, 제동 거리 546 미터, 전동차 총 질량 200톤, PSM1을 만날 때의 초기 속도 조건 70km/h 등이다. 모의 실험 결과를 비교 분석한 결과, 정차 시간에서는 프로파일 2 및 3이 1에 비해 조정이 용이하며, 소모 에너지인 제어입력의 RMS의 제공에서는 프로파일 2 및 3이 1에 비해 각각 92.44%와 92.17%로 낮게 나타났다. 또한 최대 jerk는 프로파일 2, 3, 1의 순으로 낮게 나타났으며, 최대 견인력 및 최대 제동력에서는 프로파일 2 및 3이 1에 비해 각각 39.53%, 65.21%으로 낮게 나타났다.

본 논문의 구성은 2절에서 ATO 제어 알고리즘을 구성하는 전동차 모델과 추종 입력 생성기 및 추종 제어기를 각각 설명하고, 3절에서 정밀 정차를 구현하기 위한 세 가지 속도 프로파일을 작성하는 방법을 자세히 살펴본다. 4절에서 모의 실험을 수행한 결과를 보이고 비교 기준에 의해 얻어진 각 속도 프로파일의 특성을 분석한다.

2. ATO 제어 알고리즘

전동차의 속도제어 및 정밀 정차 제어에 있어서의 기본적인 목적은 전동차의 동작, 특히 정차 위치 및 정차 시간, 속도, 가속도, jerk 등의 여러 다양한 요구 사양을 충족시키면서 전동차를 운행하는 것이다. 하지만 전동차에서 얻을 수 있는 정보는 속도계에서 직접 얻을 수 있는 속도 정보 외의 정보는 일반적으로 직접 주어지는 경우가 드물다. 또한 제어 입력으로 전동차에 인가할 수 있는 것은 견인력 및 제동력 즉 가속도뿐이므로 여러 변수에 대한 요구 사양을 충족시키면서 전동차를 원하는 대로 운행하는 것은 이론적으로 어렵다.

따라서 가장 효과적인 방법은 전동차와 관련된 물리량 중에서 가장 쉽게 정보를 얻을 수 있는 속도만을 정확히 제어하는 것이다. 이렇게 되면 제어입력과 제어해야 하는 상태변수의 수가 같아지기 때문에 원하는 대로 제어하는 것이 가능해진다. 그리고 나머지의 물리량에 대한 조건을 만족시키기 위해 이들을 고려하여 전동차의 속도변화의 형태, 즉 속도 프로파일을 미리 정해 놓은 후 제어기를 이용하여 정확히 이 속도의 형태를 따르게 하면 제어할 수 있다.

본 논문에서 설계한 전동차속도제어기는 세 부분으로 구성되어 있다. 첫째는 제어 대상이 되는 전동차 모델이며, 둘째는 가감속 시에 적합한 속도 프로파일을 만들어서 이를 전동차의 추종입력으로 제어기에 공급하는 추종입력생성기이고, 셋째는 생성된 추종입력을 따라갈 수 있도록 전동차의 제어입력을 만들어주는 추종제어기이다. 그림 1)은 전동차속도제어기의 전체적인 구조를 나타낸 그림이다.

전동차 모델은 전동차의 동특성, 즉 전동차에 가해지는 견인력 및 제동력과 속도와 거리의 관계를 나타내는 것이다. 추종입력생성기는 외부로부터 전달되는 속도코드와 PSM으로부터 오는 신호를 참조하여 가감속 시와 정차 시에 필요한 추종입력 즉 속도 프로파일을 계산하여 추종제어기에 넘겨준다. 추종제어기는 추종입력생성기로부터 오는 속도 프로파일과 실제 전동차의 속도간의 오차를 0으로 만들어줄 수 있도록 시스템에 투입되는 입력을 계산하여 하부 제어기에 넘겨주는 역할을 한다.

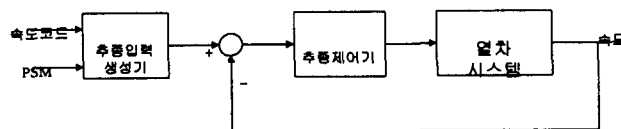


그림 1) 전동차속도제어기의 구조

본 논문에서 사용한 대상 시스템으로서의 전동차 모델은 점질량(point mass)을 가정한 전동차의 모델이다. 뉴우턴의 운동 방정식을 토대로 이 점질량의 시간에 따른 위치와 속도에 대한 미분방정식을 세우면 식(1)과 같다. $x(t)$ 는 전동차의 위치, $v(t)$ 는 전동차의 속도, r 은 저항계수, M 은 전동차의 질량, $u(t)$ 는 전동차에 가해지는 힘을 나타낸다.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= v(t) \\ \frac{d}{dt}v(t) &= -rv(t) + \frac{u(t)}{M} \end{aligned} \quad (1)$$

실제의 전동차는 추진기의 장착 여부, 전동차의 질량 여부 등의 각기 다른 물리적 성질을 갖는 여러 개의 량이 결합되어 나타나며, 모터를 기본으로 하는 추진기와 제동기 등이 포함되므로 매우 복잡한 형태를 띠게 된다. 그러나, ATO는 운전사가 현재의 속도 정보를 이용하여 가감속을 반복하면서 전동차의 속도를 제어하는 상황을 컴퓨터를 이용하여 모사하는 것이므로 (1)식을 통한 간단한 모델을 사용하는 것이 가능하다.

추종 입력 생성기는 전동차가 추종해야 할 속도 프로파일을 생성하는 부분이다. 속도 프로파일은 가감속제어와 정밀정차제어에 필요한 것으로, 정차위치 및 속도, 가속도, jerk 등의 여러 다양한 요구 사양을 충족시키면서 전동차를 운행하기 위해 적절히 생성되어야 한다.

가감속 제어의 경우는 속도 코드가 바뀌어 전동차의 운행 속도를 바꾸어야 하는 경우를 말한다. 이 경우 속도 코드는 계단식으로 변화하는 모양으로 주어지는데, 이를 부드럽게 변화하는 속도 프로파일로 생성하여 전동차가 추종하도록 하여 jerk 및 가속도 요구 사양 내에서 제어할 수 있도록 한다. 정밀정차제어의 경우는 역내에 지정된 위치에 정차해야 하는 경우를 말한다. 일차적으로 정확한 위치에 정차해야 함은 물론 jerk 및 가속도 사양을 만족하는 속도 프로파일을 생성하는데, 일반적으로 거리 오차를 수정하기 위해 PSM 정보를 참조한다.

추종 제어기는 내부모델원리(internal model principle)에 의해 추종하고자 하는 입력의 동특성을 제어기 내부에 포함시키는 방식으로 설계된다. 즉 앞서 만들어진 추종 입력과 현재의 상태를 비교하여 그 차이를 0으로 만드는 것이다. 이를 위해 제어 대상시스템이 다음과 같은 선형미분방정식의 형태로 주어졌다고 가정한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (2)$$

단, $x(t)$ 가 상태변수, $u(t)$ 는 입력, $y(t)$ 는 출력이다. A, B, C, D 는 시스템 행렬이다.

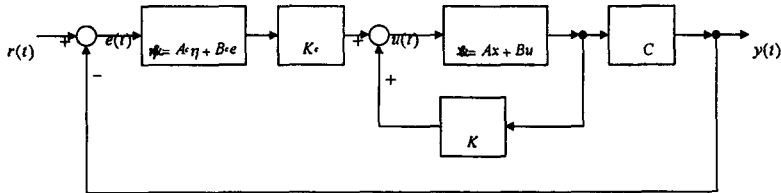


그림 2) 추종제어기의 구조

이 시스템에 대한 추종제어기의 형태는 그림 2)와 같다. 여기서 K 는 상태피환 이득을 나타내고 K_c 는 feed forward 이득을 의미한다. η 가 포함된 첫 번째 블록은 보상기의 동특성을 나타내는 부분으로 추종입력인 $r(t)$ 와 시스템의 출력 $y(t)$ 의 오차인 $e(t)$ 를 입력으로 받고 feed forward 이득을 통해 시스템에 필요한 보상입력을 생성하게 된다. 그림 2)에서와 같이 이 부분은 다음과 같이 상태방정식으로 모델링한다.

$$\dot{\eta} = A_c \eta + B_c e \quad (3)$$

이 때

$$A_c \triangleq \text{blockdiag} [\tilde{A}_c, \tilde{A}_c, \dots, \tilde{A}_c], \quad B_c \triangleq \text{blockdiag} [\tilde{B}_c, \tilde{B}_c, \dots, \tilde{B}_c] \quad (4)$$

$$\tilde{A}_c \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\delta_1 & -\delta_2 & -\delta_3 & \dots & \delta_k \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_c \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

여기서 $\delta_1, \dots, \delta_k$ 는 상수로서 다음과 같이 상쇄시키고자 하는 불안정한 극점들의 특성 다항식을 통해 결정된다.

$$s^k + \delta_k s^{k-1} + \dots + \delta_2 s + \delta_1 \triangleq \prod_{i=1}^k (s - \lambda_i^*) \quad (6)$$

이제 보상기를 포함한 페루프 시스템을 안정화시키기 위해 대상시스템과 보상기를 직렬로 연결한 시스템을 다음과 같이 정리한다.

$$A_a = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B_c C & A_c \end{bmatrix}, \quad B_a = \begin{bmatrix} B \\ B_c D \end{bmatrix}, \quad C_a = [C \ 0], \quad K_a = [K \ K_c] \quad (7)$$

여기에서 추종이득 중 불안정한 극점만을 모아 (3)식과 같은 추종입력의 모델을 구성하여 (7)식과 같이 시스템과 합친 후 전체 시스템을 안정화시킬 수 있는 상태궤환이득인 K_a 를 구하면 추종제어기를 구성할 수 있다.

지금까지 설명한 추종제어기의 설계 알고리즘의 특징은 추종입력의 특성만 모델링하여 보상기에 포함시키면 완전한 추종성을 보장되는 것으로, 이는 안정성이 확보되는 한도에서 시스템에 얼마간 변동이 발생한다 하더라도 유지된다. 다만 추종입력의 모델링에 오류가 있다든지, 아니면 보상기에 포함시키지 않은 추종입력을 추종해야 할 경우에는 정상 상태에서 약간의 오차가 발생할 수 있다.

3. 속도 프로파일 선정

ATO 정밀 정차 제어 알고리즘에 있어서 속도 프로파일의 영향을 살펴보기 위해 본 논문에서는 다음과 같이 세 종류를 선정하였다. 첫 번째는 미리 PSM을 통과할 때의 속도를 지정하고 그 지점에 도달하기 전에 지정된 속도로 감속하면서 정지하는 방식이고, 두 번째는 정차할 거리 및 시간이 주어졌을 때 필요한 제동력을 정차 구간 내내 일정하게 유지하는 방식이고, 세 번째는 최적 제어 기법을 이용하여 정차에 사용한 소모 에너지가 최소가 되도록 제동력을 설정하는 방식이다.

본 논문에서는 네 개의 PSM을 가정하였으며 이를 PSM1 ~ PSM4로 나타내기로 한다. 각각의 위치는 PSM1은 정차위치로부터 546m, PSM2는 108.5m, PSM3은 21m, PSM4는 3.5m에 위치하고 있다. 이중에서 PSM1, PSM2, PSM4 정보가 정밀정차에 필요한 프로파일 생성에 활용된다.

3.1. 구간별 속도 지정을 이용한 속도 프로파일

구간별 속도 지정을 이용한 속도 프로파일은 각 PSM을 시작으로 하여 각 구간에 진입할 때의 속도를 미리 지정하고 다음 구간으로 진행할 때까지 그 속도로 감속하는 방식으로 정밀 정차를 수행할 때 나타나는 프로파일을 의미한다. 본 논문에서 사용한 정차 방식은 다음과 같다. 우선 PSM1에 해당하는 구간이 시작될 때 40km/h로, PSM2의 구간에서는 5.4km/h로, PSM4의 구간에서는 정차지점까지 0km/h를 유지하도록 속도 코드를 지정한다.

각 구간의 경계에서 속도 코드가 급격히 변하므로 이를 완만하게 이어주기 위해 다음과 같이 시각에 따른 가중함수 $W(t)$ 를 도입하여 속도 프로파일 $v(t)$ 를 다음과 같이 계산하도록 한다.

$$v(t) = W(t - t_{off})v_{new} + (1 - W(t - t_{off}))v_{old} \quad (8)$$

여기서 v_{old} 는 이전의 속도코드, v_{new} 는 갱신된 속도코드를 의미한다. $W(t)$ 가 $0 \leq W(t) \leq 1$ 의 조건을 만족시키고 $W(0) = 0$ 이면서 시간에 따른 단조증가함수로 설정하면 속도 프로파일 $v(t)$ 는 v_{old} 에서 v_{new} 로 변화하게 된다.

본 논문에서는 가중함수를 선정할 때 각 PSM에 해당하는 구간에 진입하면서 일정한 감속 시간을 설정하고 이를 3등분 한 후 첫 번째 부분에서는 일정한 jerk를 주고, 두 번째 구간에서는 jerk를 0으로, 마지막 세 번째 구간에서는 반대로 jerk를 음의 방향으로 가하는 형태를 사용하였으며 첫 번째와 세 번째 구간의 jerk의 값은 서로 반대이면서 절대값은 서로 같도록 설정하였다. PSM1 ~ PSM2 구간을 위한 가중함수 $W_{PSM2}(t)$ 는 다음과 같이 선정하였다.

$$W_{PSM12}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} g(t-t_{PSM1})^2 & t_{PSM1} \leq t < t_{PSM1} + \frac{1}{4} t_a \\ \frac{1}{4} g t_a (t - \frac{1}{3} t_a - t_{PSM1}) + \frac{1}{32} g t_a^2 & t_{PSM1} + \frac{1}{4} t_a \leq t < t_{PSM1} + \frac{3}{4} t_a \\ -\frac{1}{2} g t_a (t - t_a - t_{PSM1})^2 + \frac{6}{32} g t_a^2 & t_{PSM1} + \frac{3}{4} t_a \leq t < t_{PSM1} + t_a \end{cases} \quad (9)$$

$$g = \frac{16}{3t_a^2}, \quad t_a = 11 + \frac{5}{6}(v(t_0) - \frac{40}{3.6}) \quad (10)$$

t_a 는 가속구간의 길이, t_{PSM1} 는 PSM1에 해당하는 구간에 진입한 시각이며 $v(t_0)$ 는 PSM1에서의 초기 속도 조건이다. 이 가중함수를 이용하여 PSM1 ~ PSM2 구간의 속도 프로파일은 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$v(t) = \frac{40}{3.6} W_{PSM24}(t) + v(t_0)(1 - W_{PSM24}(t)) \quad (11)$$

다음으로 PSM2를 지나면 다음의 PSM4를 만날 때까지 5.4km/h(1.5m/sec)까지 감속을 하여 정차직 전까지의 속도에 이르게 한다. PSM2 ~ PSM4 구간을 위해 $W_{PSM24}(t)$ 를 설정하면 다음과 같다.

$$W_{PSM24}(t) = \begin{cases} \frac{16}{5t_a^2}(t-t_{PSM2})^2 & t_{PSM2} \leq t < t_{PSM2} + \frac{1}{4} t_a \\ \frac{8}{5t_a}(t - \frac{1}{4} t_a - t_{PSM2}) - \frac{1}{5} & t_{PSM2} + \frac{1}{4} t_a \leq t < t_{PSM2} + \frac{1}{2} t_a \\ -\frac{8}{5t_a^2}(t-t_a-t_{PSM2})^2 + 1 & t_{PSM2} + \frac{1}{2} t_a \leq t < t_{PSM2} + t_a \end{cases} \quad (12)$$

t_{PSM2} 는 PSM2에 해당하는 구간에 진입한 시각이다. 이 가중함수를 이용하여 PSM2 ~ PSM4 구간의 속도 프로파일은 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$v(t) = 1.5 W_{PSM12}(t) + \frac{40}{3.6}(1 - W_{PSM12}(t)) \quad (13)$$

여기서 가속구간은 모의 실험을 통해 $t_a = 16.8$ 로 정했다. 다음으로 PSM4를 만나면 정차위치까지 3.5m 구간에서 속도를 직선적으로 감속시켜 최종 정차를 수행한다. PSM4 ~ 정차지점 구간의 속도 프로파일은 다음과 같다.

$$v(t) = -0.33(t - t_{PSM4}) + 1.5 \quad (14)$$

여기서 t_{PSM4} 는 PSM4에 해당하는 구간에 진입한 시각이며 0.33은 모의실험에 의해 선정한 값이다.

3.2. 일정 제동력을 이용한 속도 프로파일

일정 제동력을 이용한 속도 프로파일은 정차하는 동안 제동력을 일정하게 유지했을 때 나타나는 프로파일을 의미하며 가속도 변화가 적기 때문에 jerk의 영향을 줄일 수 있으며, 제어도 간단하게 수행할 수 있다. 일정한 가속도 입력이 인가되므로 식(1)의 $u(t)$ 를 상수라고 가정하여 u 라고 하고 정차구간의 초기 속도를 $v(t_0)$ 라고 하면 식(1)에서 $v(t)$ 를 얻을 수 있다.

$$v(t) = A e^{-rt} + \frac{u}{M} \quad (15)$$

단, $A \triangleq v(t_0) - \frac{u}{rM}$ 이다.

이때 정차할 거리를 s , 정차 시간을 T 라고 하면 다음을 만족한다.

$$s = \int_{t_0}^T v(t) dt = \int_{t_0}^T (A e^{-rt} + \frac{u}{rM}) dt = -\frac{A}{r}(e^{-rT} - 1) + \frac{u}{rM} T \quad (16)$$

여기에서 초기 속도 조건 $v(t_0)$ 를 고려하면 가속도 입력 u 는 다음과 같다.

$$u = rM \frac{rs + (e^{-rT} - 1)v(t_0)}{rT + e^{rT} - 1} \quad (17)$$

따라서 속도 프로파일은 다음과 같다.

$$v(t) = v(t_0)e^{-rt} + (r - e^{-rT}) \frac{rs + (e^{-rT} - 1)v(t_0)}{rT + e^{rT} - 1} \quad (18)$$

3.3. 에너지를 최적화한 속도 프로파일

에너지를 최적화한 속도 프로파일은 정차 중에 소모되는 에너지의 양을 최소화하기 위한 가속도 입력을 생성할 때 나타나는 프로파일을 의미하는 것으로 최초 정차 구간에 진입했을 때의 속도를 초기 조건으로 설정하고, 정차 구간의 길이를 최종 조건으로 설정한 후 일정한 시간 동안 초기 조건에서 최종 조건으로 진행되는 과정에서의 최적 제어 문제를 계산함으로써 얻을 수 있다.

이를 위해 식(1)을 다음의 상태 방정식으로 표현한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A x(t) + B u(t) \\ x(t) &= \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -r \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

이 때 $t = t_0$ 에서의 초기 조건과 $t = T$ 에서의 최종 조건은 (19)식과 같이 설정할 수 있다.

$$x(t_0) = [0 \quad v(t_0)]^T, \quad x(T) = [s \quad 0]^T \quad (19)$$

최적 제어를 위한 비용 함수는 다음과 같이 가속도 입력의 제곱을 시간에 대해 적분한 형태를 사용한다.

$$J(t_0) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^T u^2(t) dt \quad (20)$$

지금까지 제시된 최적 제어 문제를 해결하는 방법이 참고문헌[1]에 제시되어 있으므로 여기서는 이 문제의 해를 직접 적용하도록 한다. 우선 비용 함수와 상태 방정식을 이용하여 다음과 같이 Hamiltonian을 구성한다.

$$H(t) = \frac{1}{2} u(t)^T u(t) + \lambda(t)^T (A x(t) + B u(t)) \quad (21)$$

여기서 $\lambda(t)$ 를 costate라고 하며 이에 대한 방정식은 다음과 같이 정의된다.

$$-\dot{\lambda}(t) = \frac{\partial H(t)}{\partial x(t)} = A^T \lambda(t) \quad (22)$$

이 미분 방정식의 해는 다음과 같이 주어진다.

$$\lambda(t) = e^{A^T(T-t)} \lambda(T) \quad (23)$$

단, $\lambda(T)$ 는 미지수이다. 또한 최적 입력이 나타나는 데 필요한 필요조건인 stationary condition은 다음과 같다.

$$\frac{\partial H(t)}{\partial u(t)} = u(t) + B^T \lambda(t) = 0 \quad (24)$$

이 식을 통해 $u(t) = -B^T \lambda(t)$ 라는 식을 얻을 수 있고 식(17)의 결과를 이용하면 상태 방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\dot{x}(t) = A x(t) - B B^T e^{A^T(T-t)} \lambda(T) \quad (25)$$

이 일차 미분 방정식의 해는 다음과 같다.

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0) - \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B B^T e^{A^T(T-\tau)} d\tau \lambda(T) \quad (26)$$

이제 미지수인 $\lambda(T)$ 를 구하기 위해 다음과 같이 $x(T)$ 를 계산한다.

$$x(T) = e^{A(T-t_0)} x(t_0) - G(t_0, T) \lambda(T) \quad (27)$$

여기서 상수 $G(t_0, T)$ 는 계산의 편의를 위해 다음과 같이 정의한 것이다.

$$G(t_0, T) = \int_{t_0}^T e^{A(T-\tau)} B B^T e^{A^T(T-\tau)} d\tau \quad (28)$$

$G(t_0, T)$ 의 역행렬이 존재한다면, $x(T)$ 는 주어진 벡터이므로 다음과 같이 (26)식에서 직접 $\lambda(T)$ 를 구할 수 있다.

$$\lambda(T) = -G^{-1}(t_0, T) [x(T) - e^{A(T-t_0)} x(t_0)] \quad (29)$$

이제 식(23), (24), (29)를 종합하면 (14)식에 제시된 비용 함수를 최소화하는 입력 $u(t)$ 를 다음과 같이 결정할 수 있다.

$$u(t) = B^T e^{A^T(T-t)} G^{-1}(t_0, T) [x(T) - e^{A(T-t_0)} x(t_0)] \quad (30)$$

이를 식(1)에 적용하면 속도 프로파일 $v(t)$ 를 얻을 수 있는데 계산 결과가 매우 복잡하므로 각 시각에 따른 속도를 수치적으로 계산한 후 이를 이용하여 프로파일을 작성한다.

4. 모의 실험 결과

모의 실험에서는 앞서 설명한 세 가지 속도 프로파일을 본 논문에서 설계 구현한 추종 제어기를 통하여 정밀 정차를 수행해 보았다. 정밀 정차 모의 실험 조건은 실제 서울 지하철 8호선 노선 데이터를 참조하여 적당한 범위 내에서 설정한 것으로 다음과 같다. PSM1을 만난 후 정차 시간 60초, 제동 거리 546 미터, 전동차 총 질량 200톤, PSM1을 만날 때의 초기 속도 조건 70km/h 등의 조건에서 모의 실험을 수행하였다.

모의 실험 수행 결과 얻어진 속도 프로파일을 프로파일 1~3에 대해 각각 그림 3~5에 나타내었다. 그림 3~5를 살펴보면 3절에서 설명한 바와 같이 프로파일 1의 경우 PSM을 중심으로 속도가 평평한 그래프로 나타났으며, 프로파일 2의 경우 정차 구간 내내 속도의 변화가 직선의 형태로 나타났고, 프로파일 3의 경우 약간 완만한 형태의 속도 변화를 나타냈다.

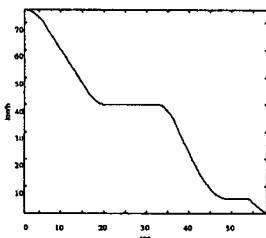


그림 3) 프로파일 1의 모의 실험 결과(시간 대 속도 그래프)

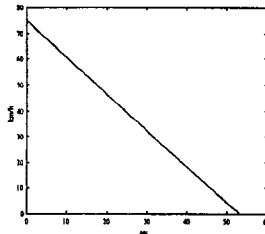


그림 4) 프로파일 2의 모의 실험 결과(시간 대 속도 그래프)

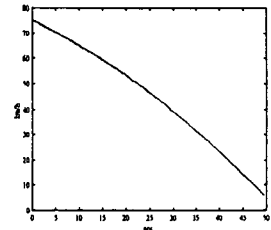


그림 5) 프로파일 3의 모의 실험 결과(시간 대 속도 그래프)

모의 실험 결과를 비교 분석하기 위해 정차 시간 및 제어 입력의 RMS의 제곱, 최대 jerk, 최대 견인력, 최대 제동력 등의 기준으로 각 프로파일의 특성을 살펴보았다. 먼저 정차 시간은 PSM1을 만나면서 완전히 속도가 0이 될 때까지의 시간으로 정의하기로 한다. 다음은 제어입력의 제곱의 적분을 생각할 수 있다. 이 값의 제곱근을 취하면 제어입력의 RMS가 되며, 물리적인 의미로서 이 값이 정확하게 전동차에 가해지는 에너지를 계산한 것은 아니지만 에너지의 경향을 파악할 수는 있다.

또한 전동차의 승차감과 직접 관련되는 jerk는 절대값의 최대 값을 비교의 대상으로 선택하였다. Jerk는 전동차 가속도의 미분으로 주어지기 때문에 모의 실험을 통해 얻어진 전동차의 속도를 두 번 미분하여 그 결과 값을 사용하였다. 다음으로 제어입력의 경우는 가속도의 형태로 주어지는 것으로, 절대값의 크기보다는 양의 값일 때의 최대 값인 최대 견인력과 음일 때의 절대값의 최대 값인 최대 제동력의 크기를 각각 따져 비교해 보았다.

비교 분석 기준에 따라 계산한 값을 표 1)에 나타내었다. 먼저 정차 시간을 살펴보면 프로파일 3, 2, 1의 순서로 짧게 나타났다. 프로파일 1의 경우는 정밀한 정차를 수행하기 위해 PSM1~2 사이에서 속도를 충분히 유지하여 안정한 상태로 있는 것이 필요하므로 정차 시간의 조절이 어렵지만, 프로파

일 2 및 3의 경우는 정차 시간을 처음부터 속도 프로파일 계산식에 대입하는 것이 가능하므로 정차 시간의 조절이 간단하다. 따라서 프로파일 2 및 3의 경우가 프로파일 1의 경우에 비해 정차 시간 측면에서는 더 유리하다.

제어입력의 RMS의 제곱은 제어입력을 제곱하여 적분하면 얻어지는 것으로 제어에 사용된 에너지의 경향을 살펴볼 수 있다. 본 논문에서는 모의 실험 단계에서 각 시각에 대해 제어입력을 제곱하여 수치 적분하였다. 그 결과를 살펴보면 프로파일 1을 기준으로 프로파일 2 및 3은 각각 92.44%와 92.17%만 사용되었음을 볼 수 있다. 따라서 에너지 효율은 프로파일 3, 2, 1의 순으로 우수하다.

최대 jerk는 가속도의 변화율을 나타내는 것으로 프로파일 2, 3, 1의 순으로 적게 나타났다. 프로파일 2의 경우는 일정한 제동력을 사용하도록 작성한 것이므로 가장 작게 나타났으며, 프로파일 3의 경우도 jerk의 값은 매우 미미하게 나타났다. 프로파일 1의 경우는 0.4의 jerk를 이용하여 작성한 속도 프로파일이므로 지정한 값이 나타났다. 최대 견인력 및 제동력에서는 프로파일 1에 비해 프로파일 2 및 3이 각각 39.53%, 65.21%의 제동력을 사용한 것으로 나타났다. 이는 제어입력의 크기를 말하는 것으로 프로파일 2, 3, 1의 순으로 더 작은 가속도를 사용하여 제어할 수 있음을 의미한다.

5. 결론

본 논문에서는 ATO 제어 알고리즘을 구성하는 전동차 모델과 추종 입력 생성기 및 추종 제어기를 각각 설계하였다. 제어의 대상인 전동차 모델은 점질량을 이용하였으며, 추종 입력 생성기는 속도 프로파일을 생성하는 부분으로, 추종 제어기는 생성된 속도 프로파일을 내부모델원리를 이용하여 추종하는 부분으로 각각 설계하였다.

다음으로 ATO 제어의 핵심적인 요소인 정밀 정차를 구현하기 위한 세 가지 속도 프로파일을 선정하여 각각 작성하는 방법을 자세히 살펴보았다. 선정한 속도 프로파일은 최대 jerk를 고려한 속도 프로파일 및 일정한 제동력을 이용한 속도 프로파일, 최소 에너지 속도 프로파일이며, 이들을 이용하여 모의 실험을 수행한 결과를 보이고 비교 기준에 의해 얻어진 각 속도 프로파일의 특성을 분석하였다. 비교 분석 기준은 정차 시간 및 정차 오차, jerk, 소모 에너지 측면이다.

선정한 세 가지 속도 프로파일을 비교 분석한 결과, 첫째로 최대 jerk를 고려한 속도 프로파일의 경우는 정차 위치를 확실하게 하기 위해 미리 속도를 감속하여 안정한 상태로 들어간 후 정차하는 프로파일로 다른 특성 비교 기준을 아예 고려하지 않았으므로 성능이 가장 나쁘게 나타났다. 둘째로 일정한 제동력을 이용한 속도 프로파일의 경우, 단순한 제어를 목적으로 제어입력을 상수로 가정한 결과로 얻은 프로파일이므로 jerk 및 견인력, 제동력의 기준에서는 높은 성능을 나타내는 것이 당연하나, 의외로 에너지 측면에서 세 번째 프로파일과 비슷한 높은 성능을 나타냈다. 셋째로 최소 에너지 속도 프로파일을 이용한 경우, 당연히 에너지 측면에서 가장 높은 성능을 나타냈으나 계산이 너무 복잡하고 두 번째의 프로파일에 비해 월등한 성능을 나타내지 못했다.

표 1) 세 가지의 프로파일의 특성 비교

	프로파일 1	프로파일 2	프로파일 3
정차 시간 (sec)	56.8	53.0	51.2
제어입력의 RMS의 제곱 (m/sec ⁴)	3.2440e+11	2.9988e+11	2.9901e+11
최대 jerk (m/sec ⁴)	0.4	0.0	0.0057
최대 견인력 (m/sec ⁴)	3.7500e+4	.	.
최대 제동력 (m/sec ⁴)	1.6209e+5	0.6408e+5	1.0570e+5

참고문헌

1. Frank L. Lewis(1986), "Optimal Control", A Wiley-Interscience publication, pp.180-185
2. 우진산전 부설 기술연구소(1998), "종합제어장치 연구개발 보고서 - ATO 분야"