

곡선 강상자거더의 뒤틀림 유한요소해석

Finite Element Analysis of Distortion of Curved Steel Box Girders

최 영준*, 정 래영*, 황 선호**, 강 영종***

Choi YoungJoon*, Jung RaeYoung*, Hwang SunHo**, Kang YoungJong***

ABSTRACT

In this study, new finite element formulations are carried out to analyze the distortion of the curved steel box girders which are susceptible to the torsional loading. For the exact analysis of curved box girders, additional degrees of freedom are added besides the conventional 6 degrees of freedom of general-purpose finite analysis programs, which are torsional warping, distortional warping, and distortion. New formulations were coded into a computer programs. Several numerical examples were presented to demonstrate the validity of developed program.

1. 서론

최근 도로교 및 철도교 등에서 곡선교의 필요성이 증대되고 있으며 이에 부응하여 건설이 활발히 이루어지고 있다. 상자형 거더로 구성된 곡선교는 거더 자체의 휨강성 뿐 아니라, 순수 비틀림 강성이 매우 커 국내에서 시공되는 곡선교 형식의 대부분을 차지하고 있다. 그러나 폐단면의 곡선 상자거더에서는 개단면을 갖는 다른 거더에서는 그 영향이 미미한 거동현상이 주요한 부분을 차지하면서 발생하게 된다. 즉, 개단면의 거더에서는 특별히 고려하지 않아도 되나 상자형의 곡선거더에서는 반드시 고려해야 하는 거동현상이 존재하게 된다. 그 대표적인 경우가 뒤틀림으로서 단면이 변형후에 변형전의 원형을 유지하지 않고 왜곡되는 현상이 발생하게 된다. 뒤틀림은 단면에 축방향 뒤틀림선응력 뿐만 아니라 거더를 구성하는 개개의 플레이트에 횡방향 휨응력을 유발한다. 뒤틀림에 수반되는 뒤틀림선응력과 횡방향 휨응력은 상자거더 내부에 격벽이 적절하게 배치되어 있지 않은 경우 휨에 의한 뒤틀림선응력의 크기에 상응하거나 더 큰 크기로 발생한다. 따라서 뒤틀림에 의해 유발되는 응력들을 사용성 이내로 제한하기 위해서는 내부 격벽을 설치해야 하고 내부 격벽의 합리적인 치수 및 간격을 결정하기 위해서는 정확한 뒤틀림거동 해석이 선행되어야 한다. 해석적 방법에 의한 뒤틀림 해석은 내부 격벽의 배치에 의한 경계조건의 처리가 매우 복잡하여 거의 불가능 하며 수치해석적인 방법에 의존해야 한다. 곡선 상자거더에서는 편재하 뿐만

* 고려대학교 토목환경공학과 박사과정

** 고려대학교 토목환경공학과 석사과정

*** 고려대학교 토목환경공학과 부교수

아니라 초기 곡률에 의해서도 뒤틀림이 발생하게 되므로 이에 대한 보다 세밀한 거동 예측이 요구된다. 본 연구에서는 이렇듯 복잡한 거동현상을 보이는 상자형 곡선거더의 해석을 위한 새로운 유한요소를 개발하며 이를 통해 수치해석 프로그램을 작성하여 그 타당성을 입증하고자 한다.

2. 곡선 상자거더의 뒤틀림

곡선 상자형 거더에서는 편재하 및 초기곡률에 의해 그림 1과 같이 단면이 변형하게 되는 데 이를 뒤틀림이라고 한다. 그림에서 보는 바와 같이 단면의 모서리 부분이 종축방향으로 나오고 들어가는 휨(distortional warping)이 발생하고 단면을 구성하는 각각의 판형에 횡방향 휨이 발생한 것을 알 수 있다. 이에 수반하여 실무자가 설계 단계에서 고려하지 않은 뒤틀림 휨법선응력 및 횡방향 휨응력이 상당히 큰 값으로 상자거더 단면에 발생할 수 있다.

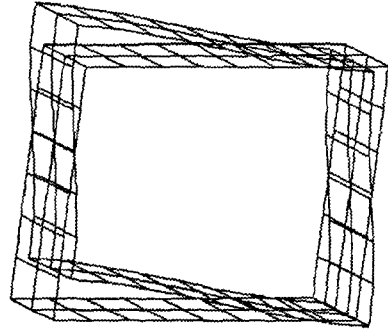


그림 1. 상자거더에서의 뒤틀림 현상

3. 곡선 상자거더의 뒤틀림 자유도 유한요소 정식화

3.1 뒤틀림 지배미분 방정식

곡선 상자거더의 뒤틀림에 관한 지배미분방정식은 다음과 같다.

$$EI_{D\omega} \frac{\partial^4 \theta}{\partial z^4} + K_{D\omega} \theta = \frac{m_T}{2} + \psi \frac{M_x}{R} \quad (1)$$

위 방정식에서, E , $I_{D\omega}$, $K_{D\omega}$, ψ , 그리고 R 은 각각, 탄성계수, 뒤틀림 상수, 뒤틀림 저항강성, 곡선거더의 곡률반경, 그리고 무차원 곡률계수를 나타내고 θ 는 상자거더 모서리 점에서의 뒤틀림에 의한 각변화량을 나타내며 다음과 같이 정의된다.

식(1)은 그 형태면에서 다음과 같이 탄성지반위의 보에서의 지배미분 방정식과 동일하다.

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} + kv = p(z) \quad (2)$$

즉, 뒤틀림에 관한 지배미분방정식이 탄성지반 보의 지배미분방정식과 동일한 형태를 갖는다는 사실에 착안하여 탄성지반 보 해석법(Beams on Elastic Foundation: BEF)을 이용하여 뒤틀림해석을 수행할 수 있다. 이 유사이론을 근거로 상자형 거더의 뒤틀림과 탄성지반 보와의 상관계를 이용하여 곡선 상자거더의 뒤틀림을 해석한다.

3.2 형상함수

유한요소법에서 변위장을 기술하는 형상함수는 일반적으로 가정을 통해 사용할 수도 있으나 지배미분방정식의 형상함수가 최선의 선택임은 주지의 사실이다. 본 연구에서는 상자거더 뒤틀림에 관한 지배미분방정식의 제차해를 이용하여 형상함수를 구성한다. 식(1)의 제차해는 다음과 같다.

$$\theta = C_1 \sin \lambda \xi \sinh \lambda \xi + C_2 \sin \lambda \xi \cosh \lambda \xi + C_3 \cos \lambda \xi \sinh \lambda \xi + C_4 \cos \lambda \xi \cosh \lambda \xi \quad (2)$$

여기서,

$$\lambda = l \cdot \sqrt[4]{\frac{K_{D\omega}}{4EI_{D\omega}}}, \quad \xi = \frac{z}{l}$$

식(2)에서의 4 개의 상수 $C_{i,i=1,2,3,4}$ 는 양단에서 갖는 자유도로 부터 결정할 수 있다.

뒤틀림 자유도에 관한 절점벡터는 다음과 같으며

$$\mathbf{d} = \{\theta_i \quad \theta'_i \quad \theta_j \quad \theta'_j\}^T = \left\{ \theta_{z=0} \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)_{z=0} \quad \theta_{z=l} \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)_{z=l} \right\}^T = \mathbf{d}_k \quad (3)$$

식(2)를 이용하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \theta_i \\ \theta'_i \\ \theta_j \\ \theta'_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda}{l} & \frac{\lambda}{l} & 0 \\ s_1 sh_1 & s_1 ch_1 & c_1 sh_1 & c_1 ch_1 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

또는

$$\mathbf{d} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}$$

여기서, $s_1, c_1, sh_1,$ 와 ch_1 은 각각 $\sin \lambda, \cos \lambda, \sinh \lambda,$ 그리고, $\cosh \lambda$ 를 나타내며 $e_1, e_2, e_3,$ 그리고, e_4 는 각각 $\frac{\lambda}{l}(c_1 sh_1 + s_1 ch_1), \frac{\lambda}{l}(c_1 ch_1 + s_1 sh_1), \frac{\lambda}{l}(-s_1 sh_1 + c_1 ch_1),$ 그리고 $\frac{\lambda}{l}(-s_1 ch_1 + c_1 sh_1)$ 로 정의된다.

식(3)으로 부터 일반화된 좌표계에 대한 상수 $C_{i,i=1,2,3,4}$ 를 나타내는 벡터 \mathbf{a} 는 절점변위벡터 \mathbf{d} 와 다음의 관계를 갖음을 알 수 있다.

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{d} \quad (5)$$

식(2)로 부터 뒤틀림 변위는 다음과 같이 기술할 수 있다.

$$\theta = \mathbf{C} \cdot \mathbf{a} \quad (6)$$

여기서,

$$\mathbf{C} = [\sin \lambda \xi \cdot \sinh \lambda \xi \quad \sin \lambda \xi \cdot \cosh \lambda \xi \quad \cos \lambda \xi \cdot \sinh \lambda \xi \quad \cos \lambda \xi \cdot \cosh \lambda \xi]$$

식(5)와 식(6)을 이용하여 다음과 같은 형상함수를 얻는다.

$$\theta = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{d} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{d} \quad (7)$$

$$\mathbf{N} = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4]$$

$$N_i = b_{1i} \sin \lambda \xi \sinh \lambda \xi + b_{2i} \sin \lambda \xi \cosh \lambda \xi + b_{3i} \cos \lambda \xi \sinh \lambda \xi + b_{4i} \cos \lambda \xi \cosh \lambda \xi$$

3.3 강성행렬

강성행렬은 뒤틀림에 의해 상자거더에 저장되는 변형에너지의 1차 변분으로 부터 산정할 수 있다. 상자거더에서 뒤틀림에 의해 축적되는 변형에너지는 식(8)과 같으며

$$U = \frac{EI_{D\omega}}{2} \int (\theta'')^2 dz + \frac{K_{D\omega}}{2} \int \theta^2 dz \quad (8)$$

변형에너지의 1차 변분은

$$\delta U = EI_{D\omega} \int \theta'' \delta \theta'' dz + K_{D\omega} \int \theta \delta \theta dz \quad (9)$$

로 표현된다.

식(7)를 식(9)에 대입하면 다음과 같은 강성행렬을 얻게된다.

$$k_{ij} = EI_{D\omega} \int N_i' N_j'' dz + K_{D\omega} \int N_i N_j dz \quad (10)$$

3.4 등가절점하중벡터

등가절점하중벡터 또한 강성행렬의 경우와 같이 작용하중에 의한 퍼텐셜에너지 손실의 1차변분으로 부터 산정할 수 있다. 뒤틀림을 유발하는 편재하 하중에 의한 상자거더의 퍼텐셜에너지손실은 다음과 같으며

$$V = - \int \left(\frac{m_T}{2} + \psi \frac{M_x}{R} \right) \theta dz \quad (11)$$

퍼텐셜에너지손실의 1차변분을 이용하여 등가하중벡터성분을 구하면 다음과 같다.

$$f_i = \int \left(\frac{m_T}{2} + \psi \frac{M_x}{R} \right) [b_{1i} \sin \lambda \xi \sinh \lambda \xi + b_{2i} \sin \lambda \xi \cosh \lambda \xi + b_{3i} \cos \lambda \xi \sinh \lambda \xi + b_{4i} \cos \lambda \xi \cosh \lambda \xi] dz \quad (12)$$

4. 상자거더 뒤틀림 거동 해석에

앞서 유도된 뒤틀림 자유도에 관한 강성행렬 및 하중벡터를 이용하여 해석프로그램을 개발하였다. 해석프로그램은 내부격벽의 강성을 집중스프링으로 모델링하여 뒤틀림에 대한 내부격벽의 효과를 정확히 반영할 수 있도록 하였다.

4.1 내부격벽이 없는 경우

개발된 요소정식화의 검증을 위한 첫번째 예제로 내부격벽이 없는 경우를 상정하였다. 하중은 모든 하중경우에 걸쳐 모두 지간 중앙에 집중하중을 작용시켰으며, 단면의 중심에 편재하가 없도록 하중을 재하시키는 경우를 하중경우 1로, 하중을 곡률외측 복부판에 편재하 시키는 경우를 하중경우 2로 하였으며 하중경우 3은 집중하중을 곡률내측 복부판에 편재하시키는 경우로 상정하였다. 해석모델의 단면제원은 다음과 같다.

지간장(L)=40m, 곡률반경(R)=80m, 단면폭(B)=200cm, 단면높이(H)=150cm,
플랜지 및 복부판 두께 $t_f=t_w=1$ cm, 지점부 격벽두께 $t_D=2$ cm, 지간중앙에 집중하중 P=100ton,
셀요소 해석 : 절점수=3938, 요소수=1312
보요소 해석 : 절점수=42, 요소수=40

위의 하중경우에 대해 곡선상자거더 단면의 모서리 점에 발생하는 뒤틀림선운동력 및 횡방향 휨운동력의 종방향에 따른 변화를 그림 2와 그림 3에 도시하였다. 그림에서 보는 바와 같이 내부격벽이 설치되어 있지 않은 경우에는 그 운동력이 재료의 탄성범위를 초과하여 매우 큰 값으로 발생하게 됨을 알 수 있다.

3.2 내부격벽이 있는 경우

본 예제에서는 해석모델의 제원은 위의 예제와 동일하나 상자거더 내부에 두께 1cm를 갖는 내부격벽을 10m 간격으로 설치하여 내부격벽이 뒤틀림 거동에 미치는 영향을 조사하였다. 그림 4와 그림 5는 내부격벽이 설치되어 있는 경우에 상자거더 단면에 발생하는 뒤틀림선운동력과 횡방향 휨운동

력의 변화를 도시하고 있다. 그림에서 보듯이 단순히 3 개의 내부격벽을 배치함으로써 내부 격벽이 설치되어 있지 않은 경우에 비해 뒤틀림 뒤틀림선응력 및 횡방향 휨응력이 급격히 감소함을 알 수 있다.

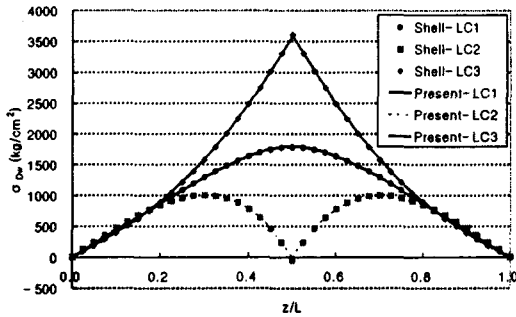


그림 2. 내부벽이 없을 때의 뒤틀림선응력

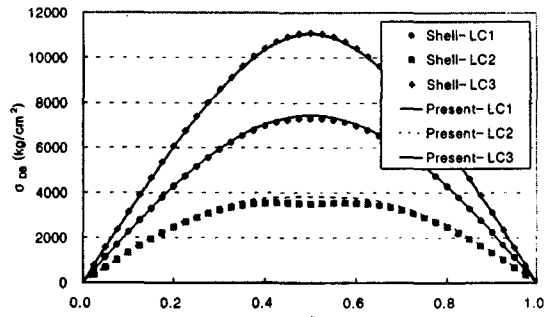


그림 3. 내부벽이 없을 때의 횡방향 휨응력

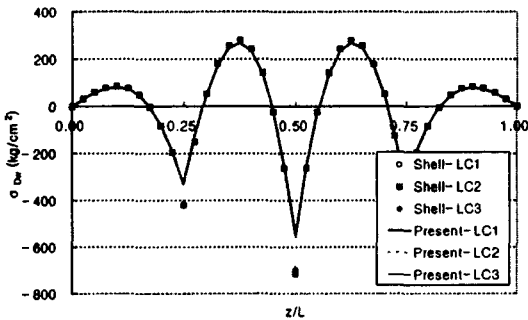


그림 4. 내부벽이 있을 때의 뒤틀림선응력

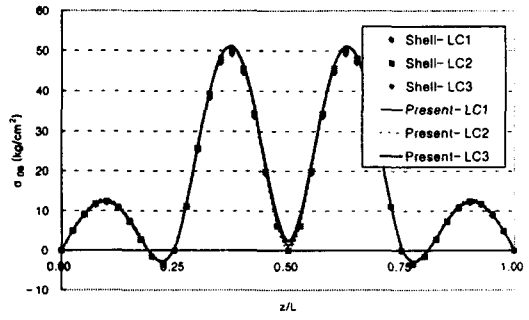


그림 5. 내부벽이 있을 때의 횡방향 휨응력

4. 결론 및 요약

본 연구에서는 Dabrowski의 뒤틀림에 관한 지배미분방정식을 이용하여 변분법에 기초한 유한요소 정식화를 수행하였다. 강성행렬과 하중벡터를 산정함에 있어 형상함수를 지배미분방정식의 재차해를 사용함으로써 절점에서의 불연속 문제가 발생하지 않을 뿐 아니라 적은 요소수로도 해의 수렴이 우수하다. 정식화된 강성행렬과 하중벡터를 사용하여 변위법에 입각한 해석프로그램을 작성하였으며 몇 가지 수치예를 통해 해석프로그램의 타당성을 검증하였다. 수치예를 통해 개발된 프로그램에 의한 수치해가 쉘요소에 의한 해석결과와 비교하여 매우 정확한 결과를 도출함을 알 수 있었다. 개발된 프로그램을 통해 합리적인 내부격벽의 설치를 위한 매개변수 연구가 수행될 수 있을 것으로 판단된다.

참고문헌

1. Hiroshi Nakai, Chai Hong Yoo : "Analysis and Design of Curved Steel Bridges", McGraw Hill, 1988
2. Vlasov, V.Z., "Thin-Walled Elastic Beams", 2nd ed., National Science Foundation, Washington, D.C., 1961

3. Richard N., Right, Sana R, Adbel-Samad and Arthur R. Robinson, "BEF Analogy for Analysis of Box Girders", *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol.94, No. ST7, July, 1968, pp.1719-1743
4. Yao Hsu, C.C. Fu, and David R, Schelling, "EBEF Method for Distortional Analysis of Steel Box Girder Bridges", *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol. 121, No.3, March, 1995, pp.557-566
5. James C. Olenik and Conrad p. Heins, "Diaphragms for Curved Box Beam Bridges", *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol. 101, No. ST10, October, 1975, pp2161-2178
6. Miranda, Constancio, and Nair, Keshavan, "Finite Beams on Elastic Foundaitons", *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol.92, ST2, Proc. Paper 4778, April, 1966, pp.131-142