

복선선로를 통과하는 열차에 의한 철도교량의 동적거동

Dynamic Behavior of Railway Bridge Due to Trains Moving on Double Tracks

최 창 근* 송 명 관** · 양 신 추***
Choi, Chang-Koon · Song, Myung-Kwan · Yang, Sin-Chu

ABSTRACT

In this study, the simplified method for 3-dimensional vehicle-bridge interaction analysis is utilized in the analysis of dynamic behavior of bridges in which the eccentricity of axle loads and the effect of the torsional forces acting on the bridge are included for the more accurate vehicle-bridge interaction analysis. Investigations mainly into the influence of vehicle speed on vehicle-bridge interactions are carried out for case that two trains move respectively on their tracks in the opposite direction.

1. 서 론

고속철도 건설 시 자연적 제한성을 극복하기 위해서는 교량의 건설은 필요 불가결하며, 이러한 철도 교량의 설계에 있어서 구조물의 역학적인 거동에 대한 이해가 선행되어야 한다. 이동하는 열차에 의한 동적인 충격효과를 받게 되는 철도교량의 경우 일반적인 교량과는 구조적으로 차이가 있다. 이러한 동적인 효과로 인하여 교량 부재는 충격과 피로가 유발되며, 교량의 잔존수명에 영향을 미치게 된다. 최대동적변위의 최대정적변위에 대한 비로서 충격효과를 표시할 수 있으며, 이러한 충격이 피로파괴의 주요한 원인이 된다. 따라서, 이러한 동적인 효과를 산정하기 위한 실험적, 수치적 연구를 필요로 한다[8,11,15].

고속전철의 경우 보통의 철도교량의 경우보다 이러한 동적 효과가 더 크게 나타나게 되며, 이러한 동적 효과의 산정은 철도교량의 해석과 설계에 꼭 필요한 과정 중에 하나가 된다. 이와 같은 고속철도교량의 동적 효과의 산정을 위해서는 차량-교량의 상호작용해석 기법이 필요하게 되는데, 이러한 상호작용 해석기법 개발에 있어서 실질적인 접근을 하기 위해서는 차량, 궤도, 교량의 3차원 모형을 필요로 하며, 또한 효율적이고 정확성 있는 교량 해석기법의 정립을 필요로 한다. 그러나, 3차원 모형을 통한 이러한 문제의 접근에 있어서 나타나는 하나의 단점은 계산 시 막대한 시간, 계산량, 컴퓨터 저장량이 필요하다는 것이다.

많은 연구들이 2차원 및 3차원 차량-교량 모형을 통하여 제시되었는데, 대부분의 2차원 해석 연구들에 있어서는 복선으로 건설되는 궤도에 의해 생기는 축하중과 단면 도심 간의 편심의 영향을 고려하지 않고 있다[7,16,17,18]. 따라서, 본 연구에서는 궤도의 편심 존재의 영향을 무시하는 2차원 차량-교량 상호작용해석의 정확성을 개선하고, 차량과 교량의 전체 모델링에 의한 3차원 동

* 한국과학기술원 토목공학과 석좌교수, 정회원

** 한국과학기술원 토목공학과 박사과정, 정회원

*** 한국철도기술연구원 책임연구원, 정회원

적해석 시 소요되는 많은 시간 및 계산량 등을 감소시키기 위해서 2차원 차량(TGV, le train de grande vitesse)-교량 모형화를 기본으로 하여 궤도의 편심 존재의 영향을 고려한 단순 3차원 차량-교량 상호작용 해석 방법을 사용한다[2]. 이 방법을 이용하여 2대의 열차가 상행선과 하행선을 반대방향으로 통과할 경우에 있어서 차량 속도가 교량의 동적 거동에 미치는 영향에 대해서 주로 고찰한다.

2. 차량 모델

그림1에서와 같이 차체(car body) 연결부 관절에 대차가 연결되어 있는 관절형 차량 모델을 이용한(양신추, 1996) 2차원 고속차량(TGV)-교량 상호작용해석 모델을 기본으로 하여 Lagrange의 운동방정식을 적용하여 차량-교량의 운동방정식을 유도할 수 있다. TGV 열차를 모형화한 차량 모델을 사용하는데 기존의 일반적인 열차들과는 다른 관절형 차량 모델로서 차체(car body) 연결부 관절에 대차가 연결되어 있다(양신추, 1996). 기존의 일반적인 열차는 각 차체가 독립적인 거동을 함으로써 진동 등이 심하였으나, TGV 열차의 경우에는 관절형 차량 모델을 사용함으로써 열차 전체가 유기적으로 연결되어 차체의 독립적인 거동을 막아줌으로써 기존의 열차에 나타났던 진동 등의 현상이 억제된다. 차량의 상하운동(bouncing)과 피칭(pitching)에 대해 차량 사이의 관절에서는 연직방향 자유도, 대차의 상하운동과 피칭에 대해 대차 중앙에서의 연직방향 자유도와 회전 자유도가 존재한다. 차량과 대차는 질량을 갖는 강성 모델로서 모델링 되고, 열차는 등속도 직선운동을 하는 것으로 가정한다.

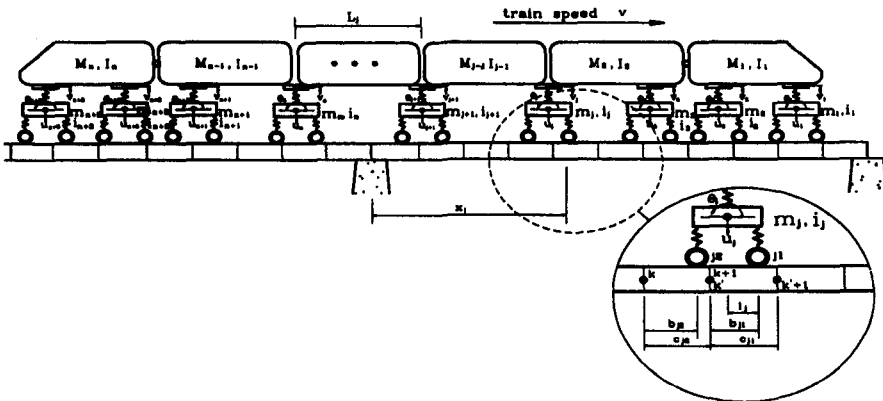


그림 1. 차량(TGV)-교량 상호작용해석 모델

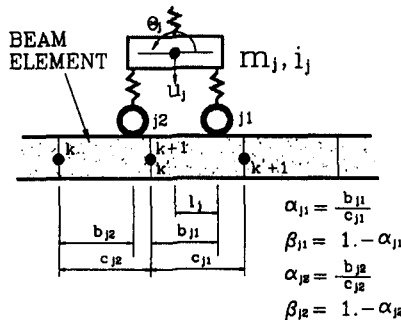


그림 2. 대차(bogie)와 교량의 상호작용 해석모델

3. 교량 모델

교량 모델(bridge model)은 2차원에서의 beam 유한요소가 갖는 2개의 자유도, 즉, 연직변위(v)와 회전변위(θ)에 비틀림 회전변위(torsional rotation, ψ)를 추가함으로써 축하중 편심의 영향에 대한 고려가 가능하도록 한다. 박스 거더 교량의 경우 전단변형이 전체 거더의 변형에 미치는 영향이 미소한 구조이므로 본 연구에서는 전단변형의 영향은 무시한다.

4. 궤도 불규칙(Track Irregularities)

본 연구에서는 차량과 교량면 사이의 연직방향 궤도 불규칙만을 고려한다. 궤도 불규칙(track irregularities)에 대한 공간 분포의 산출을 위해서는 적절한 PSD 함수(power spectral density function)의 가정과 랜덤수 산출(random number generation), 그리고, Inverse Fourier Transform 과정이 필요하게 된다[9,10,12,16]. 본 연구에서는 프랑스국립철도(French National Railways, SNCF)에서 계속에 의해서 제안한 PSD함수와 유사한 다음과 같은 PSD함수를 사용한다[식(1)].

$$S_z(\gamma) = \frac{A}{(B + \gamma)^3} \quad (m^3) \quad (1)$$

여기서, $A=2.0 \times 10^{-6}$, $B=0.36$, 그리고, 1024개의 spectrum을 사용하여($N=1024$) 궤도 방향 x 에 따른 공간상에서의 연직방향 궤도 불규칙을 산출하였으며, 그림6에서 궤도 불규칙의 공간분포를 도시하고 있다. A , B 는 궤도 불규칙(조도) 상수로서 A 는 파장(λ)이 3m 이내인 단파장에 대응하는 값이며, B 는 장파장에 해당하는 값이다.

5. 축하중 편심 모델링

실제 고속철도 교량에 있어서, 교량 상판에 설치되는 궤도(track)는 복선으로 건설되므로, 궤도를 통과하는 차량에 의한 축하중의 편심을 고려하여 해석하는 것이 타당하다. 따라서, 축하중 편심 거리와 비틀림 회전변위가 1차 현가장치의 신축량에 미치는 영향을 고려하여 수식화 한다[그림3]. 축하중 편심 거리($\overline{AB} = l_0 \cos \phi_0$)를 고려하면 j_1 , j_2 차축 위치에서의 1차 현가장치의 신축량은 다음 식(2), 식(3)과 같이 유도된다.

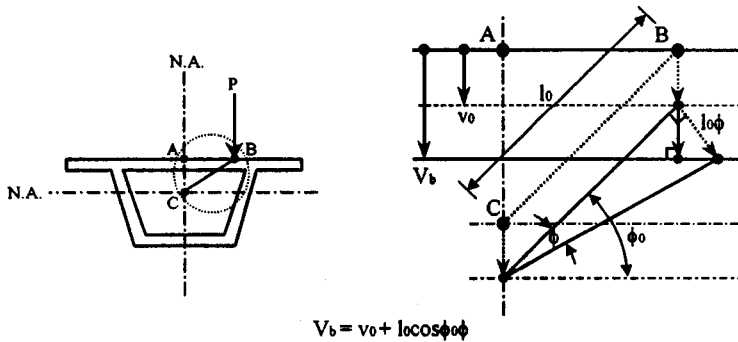


그림 3. 축하중 편심의 모형화

$$y_{j1}(x, t) = u_j(x, t) - l_j \theta_j(x, t) - \{ \beta_{j1} v_{k1}^{j1} + \alpha_{j1} v_{k1+1}^{j1} - w_b^{j1}(x) \} - \{ \beta_{j1} l_0 \cos \phi_0 \phi_{k1}^{j1} + \alpha_{j1} l_0 \cos \phi_0 \phi_{k1+1}^{j1} \} \quad (2)$$

$$v_{j2}(x, t) = u_j(x, t) + l_j \theta_j(x, t) - \{ \beta_{j2} v_{k2}^{j2} + \alpha_{j2} v_{k2+1}^{j2} - w_b^{j2}(x) \} - \{ \beta_{j2} l_0 \cos \phi_0 \phi_{k2}^{j2} + \alpha_{j2} l_0 \cos \phi_0 \phi_{k2+1}^{j2} \} \quad (3)$$

여기서, $w_b^{j1}(x)$, $w_b^{j2}(x)$ 는 각각 $j1$, $j2$ 차축 하부에서의 교량의 연직 궤도 불규칙 성분이고, $v_b^{j1}(x)$, $v_b^{j2}(x)$ 는 각각 $j1$, $j2$ 차축 하부에서의 교량의 연직변위이며, $\phi_b^{j1}(x)$, $\phi_b^{j2}(x)$ 는 각각 $j1$, $j2$ 차축 하부에서의 교량의 비틀림 회전변위(torsional rotation), u_j , θ_j 는 각각 대차의 연직변위 및 회전각 변위이고, $\alpha_{j1}, \beta_{j1}, \alpha_{j2}, \beta_{j2}$ 는 교량의 요소 절점 변위로부터 차륜하부에서의 교량의 변위를 보간하기 위한 계수들이다[그림2].

6. 운동방정식

운동방정식을 유도하기 위해서 앞기관차, 객차, 뒤기관차에 대한 각각의 운동에너지, 포텐셜에너지, 감쇠에너지를 이용하여 식(4)와 같은 Lagrange의 운동방정식을 적용한다[6,13,14].

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_t} \right] - \frac{\partial E_k}{\partial q_t} + \frac{\partial E_p}{\partial q_t} + \frac{\partial E_d}{\partial \dot{q}_t} = 0 \quad (4)$$

여기서, q_t = 차량의 자유도 (v_j , u_j , θ_j)이다. 따라서, 차량, 교량의 자유도에 대한 운동 방정식을 얻을 수 있다. 차량의 $j1$ -차륜과 교량의 상호작용력은 다음과 같이 주어진다[13].

$$F_b^{j1} = (M_u^{j1} + m_u)g + c_p \dot{y}_{j1} + k_p y_{j1} - m_u (\ddot{v}_b^{j1} + l_0 \cos \phi_0 \ddot{\phi}_b^{j1}) \quad (5)$$

여기서, M_s^{j1} = 1차 현가장치의 스프링상 질량, m_u = 1차 현가장치의 스프링하 질량(차륜-축의 질량)이고 g = 중력가속도이다.

교량을 보요소(beam elements)로 모형화할 때 식(5)로 주어지는 상호작용력을 보요소의 절점에 가해지는 상호작용력으로 보간할 수 있으며, 절점에 가해지는 상호작용력에 대한 식에 식(2), (3)을 대입하면 차량, 대차, 교량의 자유도와 절점에 가해지는 하중, $\{P_b(t)\}$ 에 의한 운동방정식을 구성할 수 있다. 또한, 식(5)의 양변에 \overline{AB} ($= l_0 \cos \phi_0$)를 곱함으로써 교량의 비틀림 회전에 대한 운동방정식을 유도할 수 있다. 따라서, 차량-교량 전체 시스템의 질량행렬, 감쇠행렬, 강성행렬 및 하중벡터가 다음과 같이 구성된다.

$$[M_{total}(t)]\{\ddot{q}(t)\} + [C_{total}(t)]\{\dot{q}(t)\} + [K_{total}(t)]\{q(t)\} = \{P_{total}(t)\} \quad (6)$$

여기서, $[M_{total}(t)]$, $[C_{total}(t)]$, $[K_{total}(t)]$ 는 각각 시간 경과에 따른 차량의 위치에 따라 변화하는 차량-교량 시스템의 질량행렬, 감쇠행렬, 강성행렬이며, $\{P_{total}(t)\}$ 는 하중 벡터이고, $\{q(t)\} = \{q_b : q_t\}^T$ 로서 보요소로 모델링된 교량의 자유도와 교량 상에 존재하는 차량 및 대차의 자유도의 합으로 구성되는 벡터이다. 전체 시스템의 질량행렬 ($[M_{total}(t)]$)은 교량에 대한 질량행렬 ($[M_b]$), 열차의 스프링하 질량에 대한 질량행렬 ($[M_u]$), 앞기관차에 대한 질량행렬

($[M_{tf}]$), 객차에 대한 질량행렬($[M_{tp}]$), 뒤 기관차에 대한 질량행렬($[M_{tb}]$)로 구성되며, 전체 시스템의 감쇠행렬, $[C_{total}(t)]$ 는 교량에 대한 감쇠행렬($[C_b]$)과 열차에 대한 감쇠행렬($[C_t]$)로 구성되고, 전체 시스템의 강성행렬, $[K_{total}(t)]$ 는 마찬가지로 교량에 대한 강성행렬($[K_b]$)과 열차에 대한 강성행렬($[K_t]$)로 구성된다. 그리고, 하중벡터, $[P_{total}(t)]$ 는 교량에 대한 하중벡터($[P_b]$)와 열차에 대한 하중벡터($[P_t]$)로 구성된다.

두 대의 열차가 교량 상의 상행선과 하행선을 통과할 경우, 차량-교량 시스템의 질량행렬, 감쇠행렬, 강성행렬은 1대의 열차가 통과할 경우와 같은 방법으로 두 열차의 이동에 따른 차량축의 위치에 따라서 구성된다. 그리고, 두 대의 열차의 차축의 위치에 따라서 연직방향 하중은 각 열차에 의해서 같은 방향으로 결정되며, 두 대의 열차가 각각의 선로를 반대방향으로 진행하므로 비틀림 회전력은 각 열차에 의해서 반대방향으로 결정된다.

수치해석 방법으로는 Newmark의 β -방법을 사용하며, $\gamma=1/2$, $\beta=1/4$ 를 사용함으로써 무조건 안정(unconditionally stable)을 확보할 수 있는 평균가속도법(average acceleration method)을 사용한다[3,4,5].

7. 수치해석

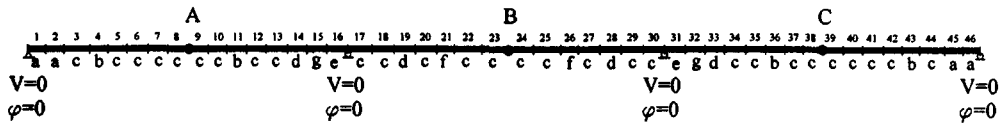


그림 4. 보요소에 의한 교량의 모델링 : 요소번호(1~46), 단면형태(a~g) 및 경계조건

해석 대상 교량의 형식은 3경간 연속 PC 박스 거더 교량이며, 각 경간의 길이는 25m로서 총지간 길이는 75m이다. 해석을 위한 교량의 일반사항은 표1과 같으며, 설계도 상의 교량의 단면은 위치에 따라서 단면형태가 변하게 되는데, 본 연구에서는 a~g의 7가지 단면을 이용하여 구간 등단면을 갖는 보요소를 사용하여 모델링한다. 본 연구에서는 위치에 따른 단면의 변화를 고려하였고, 그림4와 같이 7종류의 단면 종류를 갖는 총 46개의 보요소를 사용하여 교량을 모델링한다. 그림4에서의 a~g 단면에 대해서, 해석 시 필요한 요소의 단면적(A), 단면 2차 모멘트(I_x), 극관성 모멘트(J)의 값을 표2에서 보여주고 있다.

해석 시 사용되는 TGV 열차의 동특성은 열차의 제작 시 변경사항이 있을 수 있으며, 본 연구에서의 TGV 열차의 여러 가지 동특성은 한국철도기술연구원에서 제시한 값을 사용하여 모델링한다. TGV 열차는 우측에서 좌측으로 통과하는 것으로 가정하며, 차량속도 200, 250, 300, 350, 400km/hr의 TGV 열차에 대한 해석을 통하여 차량 속도의 영향을 2대의 열차가 통과할 경우에 대해서 고찰한다. 2대의 열차가 통과할 경우에는 동일한 속도로 서로 반대방향으로 진행한다고 가정하게 되는데, 열차 진입시간의 차이에 따라서 통과거리 차이(dx)가 생기게 된다.

상행선과 하행선에 두 고속 열차가 반대방향으로 각각 통과할 경우 철도교량에 대한 차량 속도의 영향에 대해서 고찰한다. 그림5와 같이 우측에서 좌측으로 진행하는 열차가 교량을 먼저 진입하는 것으로 가정하며, 두 열차의 속도는 200km/h, 250km/h, 300km/h, 350km/h, 400km/h, 5가지 경우로 서로 동일하다고 가정한다. 그리고, 각각의 열차의 교량 진입시각은 다르기 때문에 한 열차가 교량을 통과중일 때, 다른 한 열차는 교량 통과를 시작하게 되므로, 먼저 교량 통과를 시작한 열차의 통과거리(dx)를 0m, 12.5m, 25m, 37.5m, 50m, 62.5m, 75m, 7가지 경우로 가정한다. 표3에서는 두 열차의 운행속도에 대해서 각 경간 중앙점 A, B, C에서의 최대연직변위 및 최대비틀림 회전변위가 발생할 때의 열차의 교량 통과거리(dx)를 보여주고 있다.

표 1. 교량 해석을 위한 일반사항

구조형식	3경간 연속 PC 박스 거더교		
제원	지간	L = 3@25m = 75m	
	폭원	B = 14.0m	
	형고	h = 3.5m	
	궤도	복선, 궤도중심간격 5.0m	
활 하중	TGV열차(기관차2대, 객차15대)		
TGV열차 속도	200km/h ~ 400km/h		
재료성 (콘크리트)	탄성계수	$E_c = 3.6 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$	
	감쇠계수	5% 히스테레틱감쇠	
	질량	$\rho = 4,812 \text{ kg/m}^3$	
	포아송비	$\nu = 0.2$	

표 2. 단면의 물성치

단면 형태	단면적 (A, m ²)	단면2차모멘트 (I _x , m ⁴)	극관성모멘트 (J, m ⁴)
a	14.832	12.215	172.028
b	11.278	12.793	135.699
c	10.046	10.061	131.168
d	10.882	12.737	134.959
e	12.313	11.568	159.633
f	11.053	12.827	135.738
g	13.498	13.464	162.963

표 3. 두 열차의 속도에 대해 최대변위가 발생하는 열차의 교량 통과거리 차이(dx: m)

변위 위치	최대연직변위			최대비틀림회전변위			
	A	B	C	A	B	C	
차량 속도 (km/h)	200	62.5	12.5	62.5	12.5	37.5	25
	250	50	0	62.5	12.5	37.5	12.5
	300	50	0	62.5	0	37.5	37.5
	350	50	0	62.5	12.5	37.5	50
	400	50	0	62.5	12.5	75	37.5

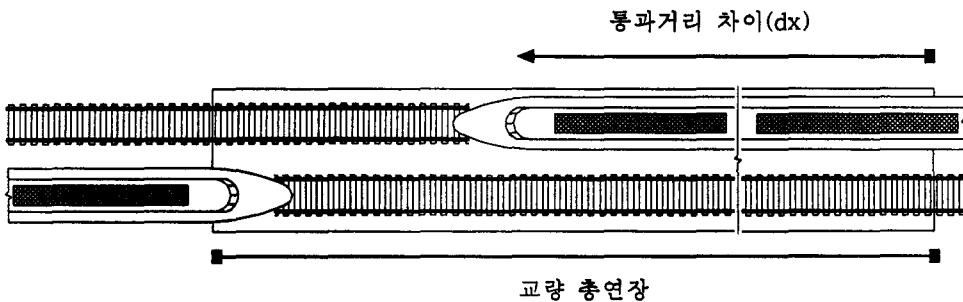


그림 5. 상행선과 하행선을 통과하는 두 열차의 통과거리 차이(dx)

그림6에서는 두 열차의 속도에 따른 최대 연직 변위의 변화를 도시하고 있다. 시속 300km/h 이상이 되면서 최대 연직 변위값의 증가량이 커지고 있음을 알 수 있다. 그림7에서는 차량 속도에 따른 최대 비틀림 회전변위의 변화를 도시하고 있는데, B점과 C점에서의 최대 비틀림 회전변위는 비슷한 경향의 변화를 보이고 있음을 알 수 있으며, 차량속도의 증가에 따라서 다소 불규칙하게 증가하고 있고, 특히, A점에서는 차량속도 400km/h에서 급격한 비틀림 회전 변위의 증가를 보이고 있다.

차량의 고속주행에 대한 교량은 주행 승차감과 안전도가 확보되도록 설계되어야 한다. 따라서, 이러한 교량의 요구조건을 만족시키기 위해서 외국의 기존 시방서들에서는 연직변위 및 비틀림 회전변위에 대해서 허용변위값을 제안하고 있다. 본 연구에서의 방법에 의해 평가된 최대 연직 변위 및 최대 비틀림 회전변위와 시방서들에서 제시한 허용변위값의 비교를 표4에서 보여주고 있다. 해석 대상이 된 교량 상을 TGV 열차가 통과할 때 발생하는 최대 연직변위 및 최대 비틀림

회전변위가 UIC 코드 및 신간선 시방서에서 제안하는 허용변위값 이내이므로, 해석 대상교량은 사용성에 있어서 문제가 없는 것으로 판단된다.

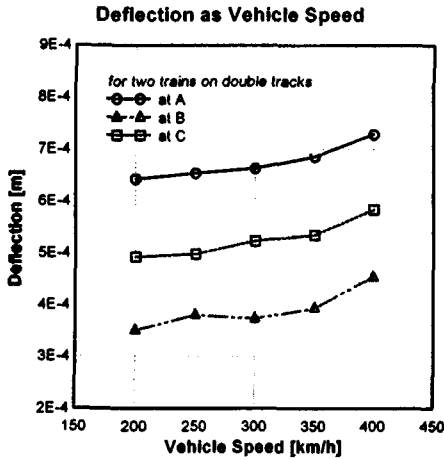


그림 6. 두 열차의 속도에 따른 최대연직변위

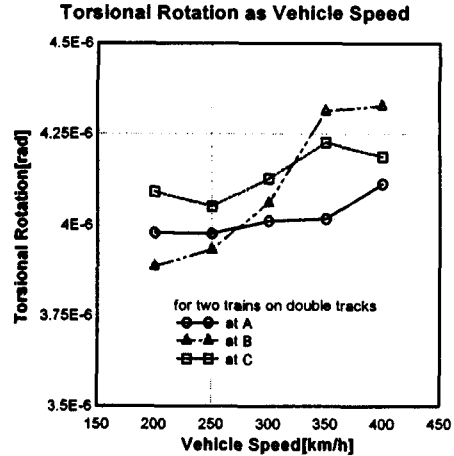


그림 7. 두 열차의 속도에 따른 최대비틀림회전변위

표 4. 최대변위와 설계표준의 허용 변위값과의 비교

설계표준	연직변위	비틀림회전변위
UIC	최대연직치짐비(Δ_{max}/L) 가 1/1700 이하	교축방향으로 3m 당 교축직각방향 1m 당 0.4mm 이하
	5.882E-4	0.4 (mm)
신간선	연직변위가 L/1800 이하 ($0 < L \leq 40m$)	-
	1.389E-2 (m)	-
본 연구	최대연직치짐비=1.941E-4 연직변위=7.281E-4(m) (A, 차량속도=400km/h, dx=50m)	1.420E-4 (mm) (B, 차량속도=400km/h, dx=12.5m)

8. 결 론

본 연구에서는 축하중 편심을 고려한 단순화된 3차원 차량-교량 상호작용해석 방법에 의하여 실제 TGV 열차가 3경간 연속 PC 박스거더 교량(3@25m)을 통과할 때, 교량의 동적 거동을 해석하여 차량 속도의 영향에 대해 고찰하였다. 이 때에 2대의 열차가 상행선과 하행선을 통과할 경우, 진입시간 차이를 고려하여 해석하였다. 실제 대상 교량에 대한 해석 결과를 통하여 얻은 연직변위 및 비틀림회전변위가 UIC 코드 및 신간선 시방서에서 제안하는 허용변위값 이내에 있으므로, 대상 교량은 사용성에 있어서 문제가 없는 것으로 판단된다.

본 연구를 통해서 축하중 편심의 영향을 고려함으로써 2차원 차량-교량 상호작용해석의 정확성을 개선시키고 동시에 2대의 열차가 상행선과 하행선을 통과할 경우에 대해 차량, 교량의 전체 모델링을 통한 3차원 해석 시 소요되는 많은 시간 및 계산량 등을 감소시키면서 정확한 차량-교량 상호작용해석이 가능하게 되었다.

감사의 글

본 연구는 G7 고속전철기술개발사업에 의해 수행된 연구의 일부로서 연구비를 지원해 준 한국철도기술연구원에 깊은 감사를 드립니다.

참고문헌

1. 고속전철사업기획단(1991), "고속철도 콘크리트 구조물(RC 및 PC) 설계표준시방서(안)"
2. 최창근, 송명관, 양신추(1999), "고속차량(TGV)-교량 상호작용의 단순화된 3차원 해석모델", 한국전산구조공학회는문집 제출
3. C.K. Choi and H.C. Noh(1997), "Nonlinear dynamic analysis of cooling tower shells", *IASS ICCSS'97(International Colloquium on Computation of Shell & Spatial Structures)*, Taipei, Taiwan, R.O.C., November 5-7, pp.213-218
4. Chopra, A.K.(1995), *Dynamics of Structures*, Prentice-Hall, USA
5. Clough, R.W. and Penzien, J.(1993), *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill
6. Chu, K.H. and Garg, V.K.(1986), "Impact in Railway Prestressed Concrete Bridges", *Journal of Structural Engineering(ASCE)*, Vol.112, No.5, pp.1036-1051
7. Delgado, R.L. and dos Santos R.C., S.M.(1997), "Modelling of Railway Bridge-Vehicle Interaction on high Speed Tracks", *Computers & Structures*, Vol.63, No.3, pp.511-523
8. Fryba, L.(1972), *Vibration of Solids and Structures under Moving Loads*, Noordhoff International Publishing, The Netherlands
9. Fryba, L.(1996), *Dynamics of Railway Bridges*, Thomas Telford House, Czech Republic
10. Garg, V.K. and Dukkipati, R.V.(1984), *Dynamics of Railway Vehicle Systems*, Academic Press, Canada
11. Hino, J., Yoshimura, T. and Konishi, K.(1984), "A Finite Element Method Prediction of the Vibration of a Bridge Subjected to a Moving Vehicle Load", *Journal of Sound and Vibration*, Vol.96, No.1, pp.45-53
12. Inbanathan, M.J. and Wieland, M.(1986), "Bridge Vibrations due to Vehicle Moving over Rough Surface", *Journal of Structural Engineering(ASCE)*, Vol.113, No.9, pp.1994-2008
13. Wang, T.L., Garg, V.K. and Chu, K.H.(1979), "Railway-Bridge Impact : Simplified Train and Bridge Model", *Journal of Structural Division(ASCE)*, Vol.105(ST9), pp.1823-1845
14. Wang, T.L., Garg, V.K. and Chu, K.H.(1991), "Railway Bridge/Vehicle Interaction Studies with New Vehicle Model", *Journal of Structural Engineering(ASCE)*, Vol.117, No.7, pp.2099-2116
15. Wiriyachai, A.(1980), "Impact and Fatigue in Open Deck Railway Truss Bridges", Ph.D Thesis, Illinois Institute of technology, Chicago, USA
16. Yang, Y.B. and Lin, B.H.(1994), "Vehicle-Bridge Interaction Analysis by Dynamic Condensation Method", *Journal of Structural Engineering(ASCE)*, Vol.121, No.11, pp.1636-1643
17. Yang, Y.B. and Yau, J.D.(1996), "Vehicle-Bridge Interaction Element for Dynamic Analysis", *Journal of Structural Engineering(ASCE)*, Vol.123, No.11, pp.1512-1518
18. Yang, Y.B., Yau, J.D. and Hsu, L.C.(1997), "Vibration of Simple Beams due to Trains Moving at High Speeds", *Engineering Structures*, Vol.19, No.11, pp.936-944