

복합재료 혼합법칙의 타당성 검토

이창성*, 김승조

서울대학교 항공우주공학과

Investigation on the validity of the rule of mixtures

Chang Sung Lee* and Seung Jo Kim

Department of Aerospace Engineering
Seoul National University

Key Words: 섬유강화 복합재료, 혼합법칙, DNS, 탄성계수, 유한요소법

Abstract

섬유강화 복합재료의 섬유와 수지까지 세부적으로 모델링이 가능한 Direct Numerical Simulation을 통해서 Boron/Aluminum 섬유강화 복합재료의 탄성계수들을 구해 보았다. 수치실험에서는 복합재료를 직교이방성 물질로 가정하였고, 특정 체적에 대한 평균치를 이용해서 물성치를 구하였으며, 혼합법칙에 의해서 구한 값 및 대표체적요소(Representative Volume Element)를 사용해서 구한 값들과 비교하였다. 혼합법칙의 경우, 섬유방향 인장계수(E_f)을 제외한 나머지 물성치들에 대해서는 상당한 차이를 나타내며, 이는 혼합법칙 유도과정에서 가정한 기본가정들이 적절하지 않기 때문이라는 것을 수치실험(Numerical Experiment)을 통해 알 수 있었다.

1. 서 론

단방향 섬유강화 복합재료의 경우, 물성치를 정확하게 구하기 위한 다양한 방법이 연구되어 왔다. 특히, 섬유와 수지의 물성치를 이용해서 섬유강화 복합재료의 물성치를 구하는 혼합법칙이 널리 사용되어져 왔는데, 복합재료의 특성에 대한 기여도가 구성재료의 구성체적비에 비례한다는 것을 기본 가정으로 한다. 즉, 복합재료 구조물에서 섬유가 차지하는 체적비(Volume Fraction)을 알면 물성치를 구할 수 있게 된다. 이러한 혼합법칙에서는 섬유와 수지의 법선변형도가 서로 같고($\epsilon_{11}^f = \epsilon_{11}^m = \epsilon_{11}$), 섬유와 수직한 방향의 인장응력과 전단응력이 균일하다고 가정하게 된다($\sigma_{22}^f = \sigma_{22}^m = \sigma_{22}$, $\sigma_{12}^f = \sigma_{12}^m = \sigma_{12}$). 그러나 혼합법칙으로 구한 물성치는 섬유방향 인장계수(E_f)만이 실험으로 구한 값과 잘 일치할 뿐, 나머지 계수들은 실험으로 구한 값들과는 상당한 차이를 보인다. 이것은 실제 복합재료 구조물에서는 섬

유와 수직한 방향의 인장응력이나 전단응력이 균일하지 않기 때문이다. 이와 같은 비균질한 응력 분포에 의한 효과를 고려하기 위한 방법이 다양하게 연구되어져 왔는데, 초기에는 변분법과 탄성론에 바탕을 둔 해석적인 연구가 대부분이었다. 근래에 들어와서는 Sun[1]의 경우와 같이 대표체적요소(Representative Volume Element)를 이용한 수치해석인 방법들이 많이 사용되고 있다. 그러나 이러한 방법들은 적절한 물리적, 수학적 가정들이 필요하며 섬유가 RVE와 똑같은 형태로 규칙적으로 반복되는 형태의 구조물에만 적용될 수 있다는 단점이 있다. 이러한 RVE를 사용해서 해석을 하는 이유는 복합재료 구조물을 섬유와 수지까지 세부적으로 모델링해서 해석을 수행하기에는 여러 가지 이유로 불가능했기 때문이다. 한편, 실험을 통해서 물성치를 구하는 방법은 같은 재료를 사용하더라도 체적비가 바뀌게 되면, 다시 실험을 해야 하는 번거로움이 있다. 최근에는 급속도로 발전하는 컴퓨터 하드웨어 기술과 대형 구조물 해석에 적합한 알고리듬 등의 개발

로 복합재료의 미시적인 구조물까지 모델링하여 복합재료 구조물의 기계적 거동을 살펴 보는 직접수치모사(Direct Numerical Simulation)가 시도되고 있다.[2]

본 연구에서는 복합재료 구조물의 DNS에 통한 수치 실험(Numerical Experiment)을 통해서 섬유강화 복합재료의 물성치를 구하는 방법을 제시하고, 결과의 비교를 통해 기존의 혼합법칙과 RVE를 사용하는 방법들에서 사용한 기본 가정들의 타당성에 대해서 검토해 보았다.

2. 혼합법칙의 타당성 검토

2.1 혼합법칙

일반적인 혼합법칙은 앞에서 언급한 것처럼, 복합재료의 특성에 대한 기여도가 단순하게 구성재료의 체적비에 비례한다고 가정하는 것이다. 이를 수학적으로 표현하면 다음과 같다.

$$C = v_f C' + v_m C'' \quad (1)$$

여기서 C 는 유효특성, C' 와 C'' 은 섬유와 모재의 특성이고 v_f 와 v_m 은 섬유와 모재의 체적비에 해당된다. 그러나 이러한 방법은 재료의 이방성을 적절히 기술하지 못한다. 한편, 수정된 Voigt-Reuss 모델에서는 균일 변형도 가정과 균일 응력을 함께 사용하여 탄성계수들이 다음과 같이 구해진다.[3]

$$E_1 = v_f E_f + v_m E_m \quad (2)$$

$$\nu_{12} = v_f \nu_f + v_m \nu_m \quad (3)$$

$$1/G_{12} = v_f/G_f + v_m/G_m \quad (4)$$

$$\frac{1}{E_2} = \left[\left(\frac{v_f}{E_f} + \frac{v_m}{E_m} \right) - \frac{v_f v_m (v_f E_m - v_m E_f)^2}{E_f E_m (v_f E_f + v_m E_m)} \right] \quad (5)$$

$$\nu_{21} = \frac{\nu_{12}}{E_1} E_2 \quad (6)$$

여기서 아래첨자 1,2는 각각 섬유방향, 섬유에 수직한 방향을 가리킨다. E_1 은 섬유방향 인장계수를 가리키고, E_2 는 섬유와 수직한 방향으로의 인장계수를 가르키게 된다. 그리고 G_{12} 은 전단강성도를 나타내고, ν 은 포아송 비를 뜻한다. 특히, 식(5)의 오른쪽 둘째항은 섬유에 수직한 방향으

로 하중이 작용할 때, 섬유와 모재사이의 포아송비 차이에 의한 효과를 고려한 것이라 할 수 있다. 본 연구에서는 Voigt-Reuss 모델을 통해 구한 값을 DNS에 의한 결과와 비교하였다.

2.2 DNS를 이용한 수치 실험

DNS를 통한 수치실험을 이용하여 물성치를 구할 때는, 해석적인 방법이나 RVE를 사용하는 방법과는 달리 어떠한 복잡한 가정도 필요없이 물성치에 대한 정의만으로 이 값을 계산할 수 있다. 하지만 섬유와 기지의 혼합물인 섬유강화 복합재료에서는 위치에 따라 재료상수가 다르므로, 거시적인 관점에서 재료가 위치에 따라 균일한 성질을 보일 수 있을 만큼 충분히 넓은 지역에 대한 평균적인 성질로서 만족되어야 한다. 따라서 응력 및 변형도는 식(7)에서 주어진 것과 같은, 특정 점에서의 값이 아닌 특정 체적에 대한 평균치로 계산된다.

$$\bar{f} = \frac{1}{V} \int_V f(x, y, z) dV \quad (7)$$

한편, 이러한 체적평균치는 Heterogeneous한 실제 복합재료 구조물과 동일한 Strain energy를 가지는 Homogeneous화된 material의 변형도와 응력이 되며, 체적평균치를 통해서 구한 탄성계수가 원래의 Heterogeneous한 구조물의 탄성계수와 동일하다는 것이 증명되어 있다.[1] 본 연구에서는 체적평균치를 이용하여 물성치를 구하였다. 체적은 해석모델의 전체 체적이 아니라, 응력분포와 변형도 분포가 일정한 부분의 체적이다.

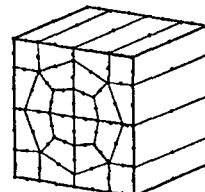


Fig. 1 FEM mesh for unit cell

복합재료 구조물의 DNS을 수행하기 위해서는 대형 구조문제를 효과적으로 풀 수 있는 코드가 필요하다. Kim[4] 등은 기존의 프런트해법을 바탕으로 그래프 이론과 결합하여 이러한 대형 구조물에 적합하고 병렬화가 용이한 다중프런트기

법을 개발하였다. 본 연구에서는 다중프런트기법을 활용하였다. 한편, 복합재료 구조물은 Fig. 1에서와 같이 20절점 Solid 요소를 사용하여 모델링하였으며, 단위 cell을 배열하는 방식은 square array 방식과 hexagonal array 방식 2가지를 사용하였다. 그리고 사용된 재료의 성유 및 기지는 각각 Boron과 Aluminum으로 구성되어 있으며 성유가 차지하는 부피비는 0.47이고 각각의 물성치는 Table. 1에 나타나 있다.

Material	E(GPa)	ν
Boron	379.3	0.1
Aluminum	68.3	0.3

Table. 1 Material properties for boron and aluminum

<Tensile tests for E_1 and ν_{12} >

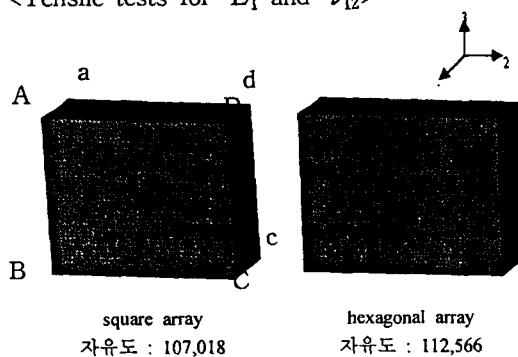
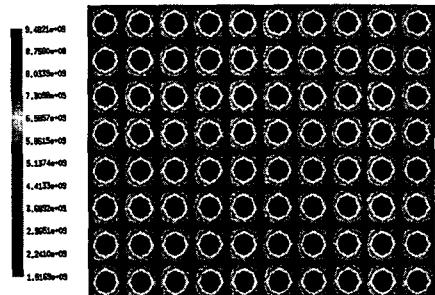
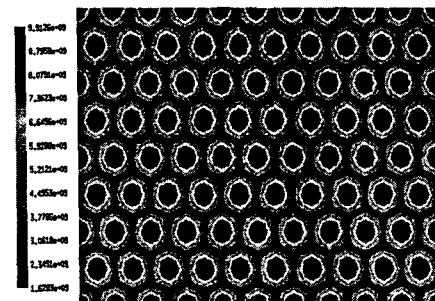


Fig. 2 FEM Mesh for E_1 and ν_{12}

해석에 사용한 유한요소 모델링은 Fig. 2에 나타나 있고, 경계조건은 단면 ABCD에는 성유방향 변위를 일정한 값으로 주고, 성유방향으로 단면 ABCD와 마주 보는 단면 abcd에 대해서는 성유방향 변위를 고정시켰다. 수치실험을 통해서 얻어진 결과(Fig. 3)를 보면 대부분의 인장력을 성유가 담당하고 있다는 것을 알 수 있다. 변형도 분포는 단면 ABCD와 평행한 모든 단면에 대해서 일정한 값을 가진다. 한편, 단면의 응력분포와 변형도 분포가 유한요소 전체에 대해서 동일한 형태를 나타내므로 체적평균치를 구할 때의 체적은 유한요소 모델 전체체적으로 하였다.



square array



hexagonal array

Fig. 3 Normal stress σ_{11} distributions

이 경우에 있어서, 혼합법칙의 기본가정을 살펴보면 다음과 같다.[3]

$$\varepsilon'_{11} = \varepsilon''_{11} = \varepsilon_{11} \quad (8)$$

$$\sigma_{22} = \sigma_{12} = 0 \quad (9)$$

즉, 성유방향으로 성유와 모재의 분리가 없다는 것과, 성유와 수직한 방향으로의 인장응력이나 전단응력이 없다는 것이다. 여기서 첫 번째 가정을 만족하게끔 경계조건을 주었기 때문에 식(8)의 가정은 당연히 만족하게 된다. 수치실험을 통해 계산한 체적평균 응력값을 살펴 보면, σ_{11} 이 5.38e+9 Pa인데 비해 σ_{22} 는 1.74e-4 Pa, σ_{12} 는 1.22e-4 Pa이므로 식(9)로 표현되는 가정은 타당하다는 결론을 얻을 수 있다.

<Tensile tests for E_2 >

E_1 을 구할 때, 사용한 유한요소 모델(Fig. 2)과 동일한 모델을 사용하였으며, 경계조건은 단면

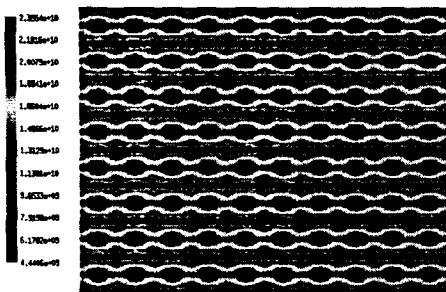
DCcd와 단면 ABba에 변위조건을 부과하였다. 수치실험의 결과는 Fig. 4에 나타나 있다. E_2 를 계산할 때, 혼합법칙에서의 기본가정들은 다음과 같다.[3]

$$\sigma_{22}^f = \sigma_{22}^m = \sigma_{22} \quad (10)$$

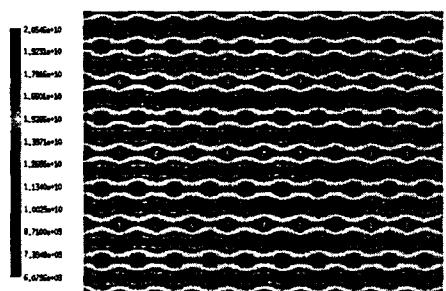
$$\epsilon_{11}^f = \epsilon_{11}^m = \epsilon_{11} \quad (11)$$

$$\sigma_{11} = \sigma_{12} = 0 \quad (12)$$

식(10)의 가정은 섬유와 수직한 방향으로의 인장응력이 균일하다는 가정이고, 식(11)의 가정은 섬유방향으로의 법선변형도가 역시 일정하다는 가정인데, 식(11)의 가정은 섬유와 모재사이의 포아송비의 차이를 고려하는 과정에서 필요하게 된다. 결과를 보면, 섬유와 수지의 인장응력과 법선변형도가 균일하지 않다는 것을 알 수 있다. 인장응력의 경우, square array에서는 섬유부분에서 최대값이 기지부분에서의 최소값에 비해서 대략 5배정도 큰 값을 가지며 hexagon array의 경우에는 대략 3.4배 정도의 차이가 난다. 이것은 식(10)으로 표현되는 혼합법칙의 기본가정이 타당하지 않다는 것을 의미한다.



square array



hexagon array

Fig. 4 Normal stress σ_{22} distributions

한편, 균일 변형도 조건을 나타내는 식(11)의 가정에 대해서 살펴 보기 위해서 Fig. 5에 나타나 있는 섬유방향 법선변형도의 분포를 살펴 보자.

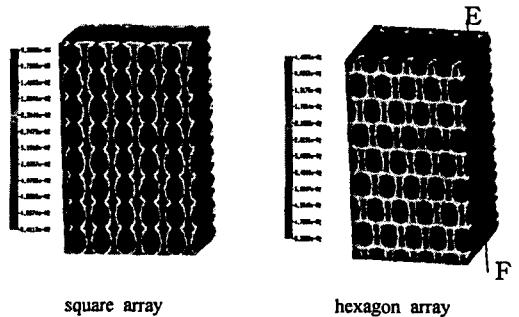


Fig. 5 Normal strain ϵ_{11} distributions

Fig. 5를 보면 단면 ABCD와 단면 abcd 근처에서는 법선변형도가 일정하지 않게 분포한다는 것을 알 수 있고, 모재가 인장응력으로 인해 더 많이 변형을 했음을 알 수 있다. 그러나 EF을 포함하고 단면 ABCD에 평행한 단면을 중심으로 보면 법선변형도가 비교적 균일하게 분포하고 있다고 볼 수 있다. 따라서 법선변형도의 분포가 비교적 균일한 부분에 대해서만 체적평균을 취하면, 식(11)로 표현된 기본가정을 만족시켜 준다고 볼 수 있다. 이러한 방식으로 구해진 체적평균값을 보면, σ_{22} 가 $1.44\text{e}+10\text{Pa}$ 인 데 비해, σ_{11} 이 $2.06\text{e}-6\text{Pa}$, σ_{12} 가 -3.79Pa 의 값을 가지므로 식(12)로 표현되는 가정이 타당하다는 결론을 얻을 수 있다.

<Shear test for G_{12} >

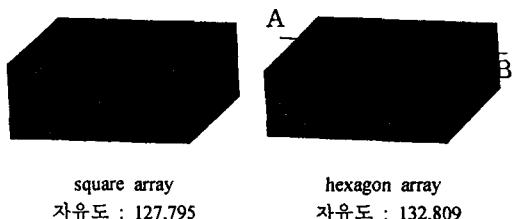


Fig. 6 FEM Mesh for G_{12}

DNS에 사용된 유한요소 모델링은 Fig. 6에 나

타나 있으며, 적용한 경계조건은 Fig. 7에 나타난 것처럼 2가지로 나누어서 적용해 보았다. 즉, Area1을 고정시키고 마주 보는 면인 Area2에는 일정한 전단응력이 작용되도록 전단하중을 가해 준 경우와 Area1과 Area2 모두에 변위조건을 준 경우로 나누어서 살펴 보았다.

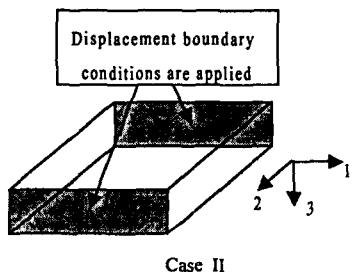
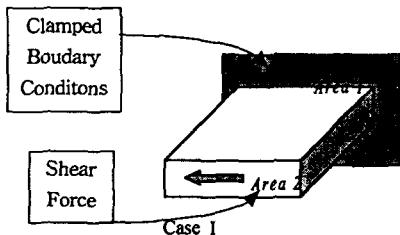


Fig. 7 Boundary conditions for G_{12}

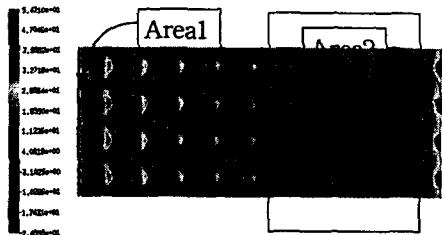
혼합법칙에서 전단응력계수 G_{12} 를 구하는 과정에 도입한 가정을 살펴 보면 다음과 같다.[3]

$$\sigma_{12}^f = \sigma_{12}^m = \sigma_{12} \quad (13)$$

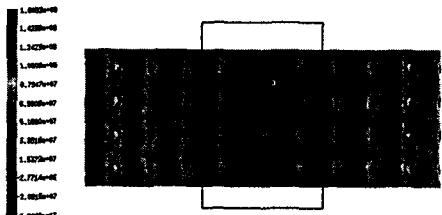
$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = 0 \quad (14)$$

식(13)에서 표현한 것은 전당응력분포가 균일하다고 가정한 것을 뜻한다. DNS를 통한 수치실험 결과를 보면 이러한 가정은 타당하지 못하는 것을 알 수 있다. Fig. 8에 나타난 것처럼 2가지 경계조건 모두에 대해서 섬유방향으로 수직한 단면 (Fig. 6에서 AB를 포함하는 단면)에 대한 전단응력의 분포를 보면 경계조건이 주어진 경계면 근처에서 섬유와 모재사이에서 전단응력이 집중됨을 알 수 있다. Case I의 경우에는 경계조건이 대칭이 아니기 때문에 전체적으로 전단응력 분포가 일정한 형태를 유지하는 부분이 Area2 방향으로 약간 치우쳐져 있고, Case II의 경우에는 주어진 변위 경계조건이 좌우 대칭이므로 대칭선을 중심으로 전단응력 분포가 일정하게 나타나는 부분이

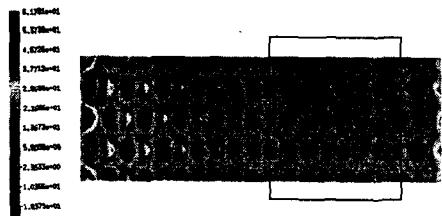
있다. 각각의 그림에서 사각형으로 표시한 부분에 대해서 체적평균값을 계산하였다.



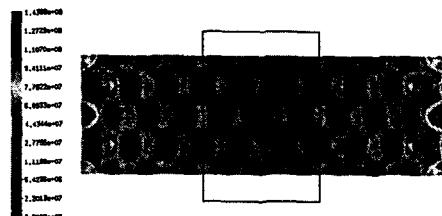
Case I square array



Case II square array



Case I hexagon array



Case II hexagon array
Fig.8 Shear stress σ_{12} distributions

계산된 체적평균값을 살펴 보면, square array의 경우에 경계조건 Case I일 때는 σ_{12} 는 20.0Pa 인 반면 σ_{11} 과 σ_{22} 는 각각 4.00e-8Pa, -1.66e-12Pa의 값을 가지므로 식(14)로 표현된 가정은 타당하다고 볼 수 있다.

Table. 2 Elastic moduli for Boron/Aluminum composite (fiber volume fraction = 0.47)

Elastic Constants (GPa)	Square array Present	Square array Ref.[1]	Hexagonal array Present	Hexagonal array Ref.[1]	The rule of mixture Eq.(2)~(6)	Elasticity approach Ref.[5]	Mechanical approach Ref.[7]	Experiment Ref.[8]
E_1	215	215	215	215	214	215	214	216
E_2	144	144	134	137	130	139.1(131.4)	135	140
G_{12}	54.2	57.2	54.0	54.0	43.7	53.9	51.1	52.0
G_{23}	46.3	45.9	51.7	52.5	-	54.6(50.0)	-	-
ν_{12}	0.20	0.19	0.20	0.19	0.21	0.195	0.19	0.29
ν_{23}	0.25	0.29	0.32	0.34	-	0.31(0.28)	-	-

* 괄호 안의 수는 최소값을 의미한다.

3. 결과 비교 및 검토

단방향 섬유강화 복합재료의 경우에 물성치를 예측하기 위한 연구가 많이 진해되어져 왔는데, Hashin과 Rosen에 의해서 Energy variational principles을 이용하여 물성치들의 범위가 구해졌다.[5] 그리고 Whitney와 Riley는 고전적인 탄성학적 접근을 통해 해를 구하였으며[6], Sun 등은 재료역학적인 접근을 통해, 섬유와 모재사이 변위의 연속성과 힘평형식을 사용하여 물성치를 계산하였다.[7] 한편, 앞에서 언급한 바와 같이 최근에는 유한요소법을 이용한 수치해석이 RVE를 사용하여 많이 시도되어져 왔으며, 특히 Sun 등은 RVE의 변형양상을 고려하여 경계조건을 부과하였다.[1] 이러한 다양한 방법들에 의해서 구한 Boron/Aluminum 섬유강화 복합재료의 물성치들을 Table. 2에 비교, 정리하였다.

우선, 섬유방향 인장계수 E_1 의 경우에 혼합법칙에서 사용한 기본가정들이 타당하기 때문에 혼합법칙에 의해 구한 값과 다른 방법들에 의해 구한 값이 잘 일치하고 실험치와 비교해도 거의 일치한다는 것을 알 수 있다. 그리고 E_1 과 동일한 인장실험으로 구해지는 ν_{12} 도 잘 일치한다. 한편, 다른 물성치들의 경우엔 혼합법칙에 의해 구해진 물성치들이 실험치나 다른 방법들에 의해 구한 값들과 상당히 큰 차이를 보인다는 것을 알 수

있다. 이것은 DNS를 통한 수치실험에서 살펴본 것처럼, 혼합법칙에서의 가정들이 타당하지 않다는 것을 의미한다.

수치해석에서 섬유의 배열이 square array인 경우는 상대적으로 hexagonal array에 비해 수치해석의 결과가 다른 방법들에 의한 결과와 실험결과에 비하여 차이가 많이 난다는 것을 알 수 있다. 이것은 단방향 섬유강화 복합재료의 해석의 경우에 square array와 같은 섬유배열은 transversely isotropic하지 않기 때문이다. 한편, Sun 등이 RVE를 이용하여 해석한 결과[1]와 본 연구의 결과가 상당히 일치한 것은 Sun 등이 RVE에 적용한 경계조건이 타당하다는 것을 의미한다.

DNS를 통해 G_{12} 를 구할 때, 2가지의 다른 경계조건을 적용해서 해석을 수행했다. 각각의 방법에 의해서 구한 물성치가 거의 동일한 값을 가지는 것은 RVE를 이용해서 해석을 할 때와는 달리 경계조건에 민감하지 않다는 것을 의미한다.

4. 결론

복합재료의 섬유와 기지까지 세부적으로 모델링하여 복합재료 구조물의 특성을 파악하는 DNS를 통해서 단방향 섬유강화 복합재료의 물성치를 구하였다. 수치실험을 통해서 혼합법칙에 적용된 기본 가정들에 대한 타당성을 검토하였다. 혼합

법칙은 섬유방향 인장계수 E_1 에 대해서만 가정들이 유효하다는 것을 알 수 있다. DNS는 혼합법칙뿐만이 아니라, RVE를 이용한 수치해석법에서 적용하는 경계조건에 대한 타당성 검토에도 활용될 수 있다.

참고문헌

1. C. T. Sun and R. S. Vaidya, "Prediction of composite properties from a representative volume elements", *Composite Science and Technology*, **56**, 171-179(1996)
2. 김승조, 김정호, 여혜진, "DNS를 이용한 복합재료 구조물 해석", 춘계학술대회 논문집, pp 39-42, (1999년 4월 30일)(한국 복합재료학회)
3. Jones, R. M., *Mechanics of Composite Materials*, Hemisphere Publishing Co., New York(1975)
4. J.H. Kim and S.J. Kim, "A Multifrontal Solver Combined with Graph Partitioners", *AIAA Journal*, Vol 38, No.8, pp.964-970, August 1999
5. Hashin, Z. & Rosen, B. W., "The elastic moduli of fiber-reinforced materials", *ASME Journal of Applied Mechanics*, **31**, 223-232(1964)
6. J. M. Whitney and M. B. Riley, "Elastic properties of fiber reinforced composite materials", *AIAA Journal*, **4**, 1537-1542(1966)
7. Sun., C. T. & Chen, J. L., "A micromechanical model for plastic behavior of fibrous composites", *Comp. Sci. Technol.*, **40**, 115-129(1990)
8. D. Kenaga, J. F. Doyle and C. T. Sun, "The characterization of boron aluminum in the nonlinear range as an orthotropic elastic plastic material," *Jounral of Composite Materials*, **27**, 516-531(1987)