

하알 함수를 이용한 비선형계의 계층별 최적제어

박정호\* 조영호\* 신승권\* 정제욱\*\* 심재선\*\*\* 안두수\*  
\* 성균관대학교 \*\* (주)광명제어 \*\*\* 삼척대학교

Hierarchical Optimal Control of Nonlinear System using Haar Function

Jung-ho Park\* Young-ho Cho\* Seung-kwon Shin\*  
Je-wook Chung\*\* Jae-sun Shim\*\*\* Doo-soo Ahn\*

\* Sungkyunkwan University \*\* Kwang Myung Industrial Controls Co. \*\*\* Samchuk University

**Abstract** - We propose the algorithm with which one can solve the problem of the two-level hierarchical optimal control of nonlinear systems by repeatedly updating the state vectors using the haar function and Picard's iteration methods.

Using the simple operation of the coefficient vectors from the fast haar transformation in the upper level and applying that vectors to Picard iteration methods in the independently lower level allow us to obtain the another method except the inversion matrix operation of the high dimation and the kronecker product in the optimal control algorithm.

1. 서 론

급격한 산업화로 인해 첨단기술이 상호 연관된 대규모 시스템들이 운용되기 시작하면서 이들에 대한 해석 및 설계 문제가 중요시되고 있다. 대규모 시스템의 제어기 설계 문제는 크게 축소 모델(model reduction)에 의한 방법과 계층별 제어(hierarchical control)방법으로 구분할 수 있는데, 실질적인 제어를 설계한다는 관점에서 계층별 제어 기법이 가장 일반적으로 이용되고 있다. 1970년대 이후 시간 영역에서 최적제어 이론에 바탕을 둔 여러 형태의 계층별 최적제어 기법이 제시되었고 이론적, 실용적으로 많은 성과를 거두었다. 이 중 가장 많이 이용되고 있는 계층별 제어 방법은 상호예측 원리를 이용해서 조정자 변수를 조정하는 방법인데, 이 기법은 선형 또는 비선형 대규모 시스템에 많이 응용되어 왔다.

1980년대 Singh와 Hassan은 상호 예측원리를 이용한 계층별 제어이론을 비선형 대규모 시스템에 확장시킨 2계층 상호상태(two-level costate coordination)기법을 제시하였다 [1-2]. 2계층 상호상태 기법은 선형 항과 비선형 항을 분리하여 비선형 항만을 조정자에서 조정하는 형태이므로 비선형 대규모 시스템의 최적제어에 효과적인 것으로 알려져 있다. 그러나 2계층 상호상태 기법을 이용하기 위해서는 각각의 독립적인 부 시스템에서 2점 경계치 문제를 해결해야 하는 문제점을 갖는다.

본 연구에서는 고속 하알변환과 Picard의 반복 연산법을 이용한 상태벡터의 반복적인 수정을 통하여 비선형계의 2계층 최적 제어문제를 해결할 수 있는 알고리즘을 제시하였다. 즉, 상위계층에서는 고속 하알 변환에 의한 계수벡터의 단순한 치환연산을 이용하였고, 하위계층의 독립적인 부시스템에서는 Picard의 반복 연산법에 고속 하알 변환을 이용함으로써 기존의 직교함수를 이용한 최적제어 알고리즘에 동반되는 고차원의 역행렬 반복계산 및 크로네커곱 문제를 해결하였다.

2. 하알 함수

하알 함수는 구간 (0, 1)에서 다음과 같이 정의되는 함수이다(3).

$$RHar(0, t) = 1$$

$$RHar(i, t) = \begin{cases} +1, & g/2^p \leq t < (g+1/2)/2^p \\ -1, & (g+1/2)/2^p \leq t < (g+1)/2^p \\ 0, & \text{그외 구간} \end{cases} \quad (2.1)$$

단,  $i=2^p+g$ ,  $p=0, 1, 2, \dots, \log_2(\frac{m}{2})$ ,  $g=0, 1, 2, \dots, 2^p-1$   
적분 가능한 임의의 함수  $f(t)$ 는 다음과 같이 유리하알 함수로 전

개될 수 있다.

$$f(t) \approx F RHar(t) \quad (2.2)$$

$$F = Q RHar f \quad (2.3)$$

식 (2.2), (2.3)의  $F$ 은 유리하알 함수  $RHar(t)$ 의 계수행렬로 최소자승법에 의해 결정되는데 이를 하알 변환이라 한다. 또, 식 (2.3)에서  $Q$ 는 보상행렬로 이산하알 변환시 곱해주는 상수값이다. 유리하알 함수는 부분적으로 연속인 함수값으로 구성되어 각 세부구간에서 일정한 상수값을 취하므로 식 (2.2)에서  $m$ 개의 유리하알 함수로 전개된 함수  $f(t)$ 는 부분적으로 연속인 형태로 표현되며 그 값은 세부구간의 평균값에 수렴한다.

유리하알 함수  $m$ 항 전개를 이용하는 경우 모든 유리하알 함수는  $m$ 개의 세부구간에서  $\pm 1$  혹은 0의 값을 취한다. 이러한 유리하알 함수의 특성으로부터 고속 유리하알 변환 처리가 가능해진다. 고속 유리하알 변환은  $L(\log_2 m)$ 단계의 가·감산에 의해 이루어진다.  $L$ 단계 중 최초  $j=0$ 단에는  $x_i^0 = x_i$ 가 치환되며,  $j-1$ 번째 단과  $j$ 번째 단의 관계는 다음과 같다(3-4).

$$x_i^j = x_{2i}^{j-1} + x_{2i+1}^{j-1} \quad (2.4)$$

$$x_{i+2^{l-j}}^j = x_{2i}^{j-1} - x_{2i+1}^{j-1} \quad (2.5)$$

단,  $j=1, 2, \dots, L$ ,  $i=0, 1, \dots, 2^{L-j}-1$

식 (2.2)에서 보듯이 최종의 결과를 얻기 위해서는 식 (2.4), (2.5)의 계산결과, 즉  $j=L$ 단의 할당에 값에  $Q$ 를 곱해 주어야 한다. 이는 비트천이로 대신할 수도 있다. 고속하알 변환의 경우 계산은  $2(m-1)$ 번의 가·감산이 필요하다.

유리하알 함수의 적분은 시간  $t$ 의 함수이므로 유리하알 함수를 이용하여 다음과 같이 전개할 수 있다.

$$\int_0^t RHar(t) dt = P RHar(t) \quad (2.6)$$

$$\int_{t'}^t RHar(t) dt = P_{inv} RHar(t) \quad (2.7)$$

단,  $P$ 는 적분연산 행렬,  $P_{inv}$ 는 역적분연산 행렬

식 (2.6)과 (2.7)로 표시된 적분연산 행렬들은 미적분 방정식을 대수 방정식으로 바꾸어 줌으로써 계산을 용이하게 할 수 있다.

3. 비선형계의 계층별 최적제어

다음의 비선형 시스템을 고려하자.

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (3.1)$$

단,  $x(t) \in R^n$ ,  $u(t) \in R^m$

최소화할 평가함수는 다음과 같다.

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (\|x(t)\|_Q^2 + \|u(t)\|_R^2) dt \quad (3.2)$$

단,  $Q \geq 0$ ,  $R > 0$  인 가중행렬(weight matrix)이다. 위의 비선형시스템 동작점(equilibrium point)은 원점으로 가정하고, 선형화 행렬  $A^*$ ,  $B^*$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$A^* \triangleq \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]_{x(t)=x_0, u(t)=u_0}, \quad B^* \triangleq \left[ \frac{\partial f}{\partial u} \right]_{x(t)=x_0, u(t)=u_0} \quad (3.3)$$

위의 최적제어 문제는 Singh와 Hassan에 의해 다음과 같

이 변화되는 것이 증명되었다[1-2]. 시스템의 상태방정식은 다음과 같다.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + D(x, u, t) \quad (3.4)$$

$$x(t_0) = x_0$$

단,  $A$ 는  $A^*$  중 블록대각행렬,  $B$ 는  $B^*$  중 블록대각행렬

$$D(x, u, t) = f(x, u, t) - Ax(t) - Bu(t)$$

부가적인 구속조건은 다음으로 주어진다.

$$x(t) = x^0(t), \quad u(t) = u^0(t) \quad (3.5)$$

또한 평가함수는 다음과 같다.

$$\text{Min} J = \frac{1}{2} \int_0^T \{ \|x\|_Q^2 + \|u\|_R^2 + \|x - x^0\|_S^2 + \|u - u^0\|_H^2 \} dt \quad (3.6)$$

또한 Singh와 Hassan은 이 알고리즘의 수렴조건이 최적화 구간의 길이,  $Q, R, S, H$  행렬에 의해 영향 받는다는 것을 밝혔고, 만약  $R$ 행렬의 원소들이 크고 최적화구간이 짧으면 이 알고리즘은 수렴함을 증명하였다[2].

상위계층의 조정법칙은 다음과 같이 주어진다.

$$x^0(t) = x(t), \quad u^0(t) = u(t) \quad (3.7)$$

$$\Pi(t) = -S(x(t) - x^0(t)) + \left[ \left[ \frac{\partial f^T}{\partial x(t)} \right]_{x=x^0, u=u^0} - A^T \right] \cdot \lambda(t) \quad (3.8)$$

$$\beta(t) = -H(u(t) - u^0(t)) + \left[ \left[ \frac{\partial f^T}{\partial u(t)} \right]_{x=x^0, u=u^0} - B^T \right] \cdot \lambda(t) \quad (3.9)$$

임의의  $i$ 번째 부시스템의 경우 최적화 문제는 다음으로 요약할 수 있다.

$$u_i(t) = -(R_i + H_i)^{-1} [B_i^T \lambda(t) - H_i u_i^0(t) + \beta_i(t)] \quad (3.10)$$

$$\dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) - B_i (R_i + H_i)^{-1} B_i^T \lambda_i(t) + B_i (R_i + H_i)^{-1} [H_i u_i^0(t) - \beta_i(t)] + D_i(x_i^0, u_i^0, t) \quad (3.11)$$

$$x_i(t_0) = x_{i0}$$

$$\dot{\lambda}_i(t) = -(Q_i + S_i) x_i(t) - A_i^T \lambda_i(t) + S_i x_i^0(t) - \Pi_i(t) \quad (3.12)$$

$$\lambda_i(t_f) = 0$$

단,  $x_i(t)$ :  $i$ 번째 상태벡터,  $u_i(t)$ :  $i$ 번째 제어벡터

$\lambda_i(t)$ :  $i$ 번째 상호상태벡터

따라서 비선형계의 2계층 제어기법에서 조정자는 처음 반복 구간에서 부시스템으로부터 구해진  $x, u, \lambda$ 의 값들을 다음 반복구간에 순차적으로 대입하므로 조정법칙이 간단하고, 하위단에서는  $N$ 개의 독립적인 부시스템에 대한 낮은 차수의 최적화 문제를 해결하면 되므로 계산량이 매우 감소하는 장점을 갖는다.

#### 4. 하일 함수를 이용한 비선형계의 계층별 최적제어

본 연구에서는 비선형계의 2계층 최적제어를 위해 상위계층, 하위계층에 하일 함수를 적용하여 계수벡터의 반복 연산만으로 2계층 최적제어를 수행하는 간단한 알고리즘을 유도하였다. 각각의 계층에서 하일 함수로 변환되는 과정을 살펴보면 다음과 같다.

##### 4.1 하일 함수를 이용한 상위계층의 조정법칙

$x^0(t), x(t), u^0(t), u(t)$ 을 하일 함수로 전개하면 다음과 같다.

$$x(t) = X RHar(t), \quad x^0(t) = X^0 RHar(t) \quad (4.1)$$

$$u(t) = U RHar(t), \quad u^0(t) = U^0 RHar(t) \quad (4.2)$$

식 (3.7)을 하일 함수로 전개하면 다음과 같다.

$$X^0 = X, \quad U^0 = U \quad (4.3)$$

여기서  $X^0, U^0$ 의 값은  $L+1$  반복구간의 비선형항을 고정시키는데 이용된다.  $\beta(t), \Pi(t), \lambda(t)$ 를 얻기위해서 각각을

하일 함수로 전개하면 다음과 같다.

$$\beta(t) = \hat{B} RHar(t) \quad (4.4)$$

$$\Pi(t) = \hat{P} RHar(t) \quad (4.5)$$

$$\lambda(t) = \Lambda RHar(t) \quad (4.6)$$

식 (3.8), (3.9)의 [ ] 부분을 하일 함수로 전개하기 위해서 다음과 같이 정의한다.

$$\left[ \frac{\partial f^T}{\partial x} \right]_{x=x^0, u=u^0} \triangleq F(t) \quad (4.7)$$

$$\left[ \frac{\partial f^T}{\partial u} \right]_{x=x^0, u=u^0} \triangleq E(t) \quad (4.8)$$

또한  $F_{xi}(t) \triangleq F(t) \lambda(t)$ ,  $E_{ui}(t) \triangleq E(t) \lambda(t)$ 라 하면

$$F_{xi}(t) = \hat{F}_{xi} RHar(t) \quad (4.9)$$

$$E_{ui}(t) = \hat{E}_{ui} RHar(t) \quad (4.10)$$

다음과 같은 하일 함수로 변환된 조정법칙을 얻을 수 있다.

$$[\hat{P}]^{L+1} = [-S(X - X^0) + (\hat{F}_{xi} - A^T \Lambda)]^L \quad (4.11)$$

$$[\hat{B}]^{L+1} = [-H(U - U^0) + (\hat{E}_{ui} - B^T \Lambda)]^L \quad (4.12)$$

식 (4.11), (4.12)에서 알수 있듯이  $L+1$ 번째 반복구간의  $\hat{P}$ 와  $\hat{B}$ 의 계수 벡터들은 바로 전단계의 값들의 단순한 대입만으로 얻을 수 있으므로 조정자의 조정법칙이 간단함을 알 수 있다.

##### 4.2 하일함수를 이용한 부시스템의 최적제어

독립된 부시스템의 해를 구하기 위해서는 상위계층에서 얻어진  $X^0, U^0, \hat{B}, \hat{P}$ 의 값을 이용한다. 변형된 표준형 방정식과 상태천이행렬 특성에 하일 함수를 적용해서 얻은 간단한 대수방정식에서  $x(t), u(t), \lambda(t)$ 을 구할 수 있다. 여기서 부시스템을 의미하는 첨자  $i$ 는 표기상 간편을 위해 생략한다.

식 (3.11), (3.12)를 이용해  $i$ 번째 부시스템의 2점경계치 문제 (TPBVP)을 유도하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} = L \begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

$$\text{단, } L = \begin{bmatrix} A & -B R^{-1} B^T \\ -(Q+S) & -A^T \end{bmatrix}$$

$$w(t) = (R+H)^{-1} (H u^0(t) - \beta(t)) + D(x^0(t), u^0(t), t)$$

$$z(t) = Sx^0(t) - \Pi(t)$$

경계조건은 다음과 같다.

$$x(t_0) = x_0, \quad \lambda(t_f) = 0 \quad (4.14)$$

위 식의 해를 구하기 위해서 상태천이행렬을 이용한다.

$$\Phi(t_f, t) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t_f, t) & \Phi_{12}(t_f, t) \\ \Phi_{21}(t_f, t) & \Phi_{22}(t_f, t) \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

이 상태천이 행렬의 특성은 다음과 같다.

$$\frac{d}{dt} \Phi(t_f, t) = -\Phi(t_f, t) L \quad (4.16)$$

$$\Phi(t_f, t_f) = I \quad (4.17)$$

식 (4.13)의 해를 구하면 아래와 같다.

$$\begin{bmatrix} x(t_f) \\ \lambda(t_f) \end{bmatrix} = \Phi(t_f, t) \begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

$$\begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{bmatrix} \triangleq \int_t^{t_f} \Phi(t_f, \tau) \begin{bmatrix} w(\tau) \\ z(\tau) \end{bmatrix} d\tau \quad (4.19)$$

$$= \begin{bmatrix} \int_t^{t_f} \Phi_{11}(t_f, \tau) w(\tau) + \Phi_{12}(t_f, \tau) z(\tau) d\tau \\ \hat{w}(t) + \hat{z}(t) \end{bmatrix}$$

경계조건과 식 (4.18)에 의해 다음의 해를 얻을 수 있다.

$$\lambda(t) = -\Phi_{22}^{-1}(t_f, t) [\Phi_{21}(t_f, t) x(t) + g_2(t)] \triangleq -[\hat{x}(t) + \hat{z}_2(t)] \quad (4.20)$$

$$\hat{x}(t) = v(t) x(t) + k(t) \triangleq \hat{v}(t) + k(t) \quad (4.21)$$

$$v(t) = A + B R^{-1} B^T \Phi_{22}^{-1}(t_f, t) \Phi_{21}(t_f, t) = A + B R^{-1} B^T \hat{\Phi}(t_f, t) \quad (4.22)$$

$$k(t) = w(t) + B R^{-1} B^T \Phi_{22}^{-1}(t_f, t) g_2(t) = w(t) + B R^{-1} B^T \hat{g}_2(t) \quad (4.23)$$

이제  $\Phi(t_f, t)$ 을 하일 함수로 전개하면 다음과 같다.

$$\Phi(t_f, t) = \Psi RHar(t) \quad (4.24)$$

식 (4.16)의 양변에 변환(transpose)하여 적분한 후 Picard 반복연산을 하고 하일 함수로 전개하면 다음을 얻을 수 있다.

$$\Psi^{k-1} = I - L^T \Psi^k P_{inv} \quad (4.25)$$

즉, 위의 대수방정식에서  $\Phi(t_f, t)$ 를 구할 수 있다.

식 (4.19)-(4.23)의 함수들을 하일 함수로 전개하면 다음과 같다.

$$w(t) = M RHar(t), \quad \hat{w}(t) = \hat{M} RHar(t) \quad (4.26)$$

$$\hat{z}(t) = N RHar(t), \quad \hat{x}(t) = \hat{X} RHar(t) \quad (4.27)$$

$$g_2(t) = G_2 RHar(t), \quad \hat{g}_2(t) = \hat{C}_2 RHar(t), \quad (4.28)$$

$$v(t) = V RHar(t), \quad \hat{v}(t) = \hat{V} RHar(t) \quad (4.29)$$

$$k(t) = \hat{K} RHar(t), \quad \hat{\Phi}(t_f, t) = \hat{\Psi} RHar(t) \quad (4.30)$$

식 (4.19)를 하일 함수로 전개하면 다음과 같다.

$$G_2 = -[\hat{M} + N] P_{inv} \quad (4.31)$$

식 (4.22), (4.23)을 하일 함수로 전개하면 다음과 같다.

$$V = A + B R^{-1} B^T \hat{\Psi} \quad (4.32)$$

$$\hat{K} = M + B R^{-1} B^T \hat{C}_2 \quad (4.33)$$

식 (4.21)의 양변을 적분한 후 Picard 반복연산과 하일 함수로 전개하면 다음을 얻을 수 있다.

$$X^k = X_0 - (\hat{V}^{k-1} + \hat{K}^{k-1})P \quad (4.34)$$

식 (4.20)을 하일 함수로 전개하면 다음과 같다.

$$A = -[\hat{X} + \hat{C}_2] \quad (4.35)$$

식 (3.10)에서 하일 함수로 전개하면 다음과 같다.

$$U = -(R + H)^{-1} [B^T A - H U^0 + \hat{B}] \quad (4.36)$$

식 (4.34), (4.35), (4.36)로부터 상위계층에 필요한 정보와 잠정적인 최적제어벡터를 구할 수 있다. 이와 같이 하일 함수를 이용한 비선형 대규모 시스템의 2계층 최적제어 기법은 각각의 계층에서 하일 함수 계수벡터들의 대수연산을 이용하였으므로 알고리즘이 간단함을 알 수 있다.

각 부시스템이 잠정적인 최적제어 입력이 전체 시스템의 최적제어 입력인가를 확인하기 위해서 오차 함수를 다음과 같이 정의한다.

$$E_x = \left[ \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^m \left\{ (X_i)_j^{L+1} - (X_i)_j^L \right\}^T \times \left\{ (X_i)_j^{L+1} - (X_i)_j^L \right\} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.37)$$

$$E_n = \left[ \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^m \left\{ (\Pi_i)_j^{L+1} - (\Pi_i)_j^L \right\}^T \times \left\{ (\Pi_i)_j^{L+1} - (\Pi_i)_j^L \right\} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.38)$$

$$E = \frac{E_x + E_n}{m} \quad (4.39)$$

단,  $i$ :  $i$ 번째 부시스템,  $j$ :  $j$ 번째 구간  
 $L+1$ :  $L$ 의 다음 단계

## 5. 적용예

제시된 알고리즘을 비선형 시스템인 Volterra Predator Prey 시스템에 적용한다.

$$\frac{d}{dt} x_1(t) = -x_1(t) + x_1(t)x_2(t) + u_1(t) \quad (5.1)$$

$$\frac{d}{dt} x_2(t) = -x_2(t)x_1(t) + x_2(t) + u_2(t)$$

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad Q = R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

여기서 평가함수는 다음과 같다.

$$J = \frac{1}{2} \int_0^5 [x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)] dt \quad (5.2)$$

이 시스템에서 시간  $t \in [0, 5]$ 에 대하여 전개항수 ( $m$ )를 64로 전개하여 최적제어 입력과 상태궤적을 구하면 아래의 그림 1과 같다. 그림 1에서 보듯이 상태 궤적은 2.5초 이후에 0으로 수렴을 한다.

주어진 시스템의 최적제어에서 Picard 반복연산의 오차율은

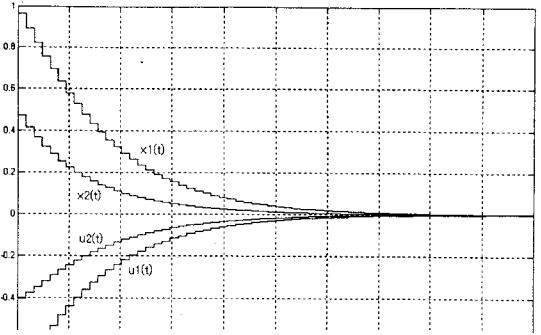


그림 1 최적제어입력과 상태궤적

Figure 1 Optimal control inputs & state trajectories

$10^{-3}$ 으로 정하였고 이때 시뮬레이션의 반복횟수는 6번이었다. 아래의 표 1은 반복횟수에 따른 식 (5.2)의 평가함수와 식 (4.37)-(4.39)에 의한 오차값을 나타내었다.

반복 횟수	평가 함수	오차 값
1	0.5089	2.4091
2	0.4388	0.3362
3	0.4376	0.0680
4	0.4372	0.0238
5	0.4366	0.0058
6	0.4366	0.0007

표 1 평가함수와 오차값

Table 1 Performances & error values

## 6. 결론

본 연구에서 얻어진 결론은 다음과 같다.

(1) 제안된 알고리즘은 하일 함수 계수벡터들의 정보 교환만으로 전체 비선형시스템의 최적제어를 구현할 수 있으므로 기존의 수치해석법에 비해 연산이 간단하고 컴퓨터 적용이 용이하다.

(2) 본 논문에서는 비선형계를 선형화하는 작업을 거치지 않고 직접 풀었기 때문에 시스템의 비선형특성을 그대로 유지한다.

(3) 하일 함수를 이용하는 경우 정확한 해에 접근하려면 전개항수를 늘려야 한다. 전개항수가 커지면 연산시간이 길어지므로 적절한 전개항수에 대한 해석적인 방법이 요구된다.

이상에서 얻어진 결론을 전력시스템이나 수처리시스템과 같은 비선형대규모 시스템에 적용한다면 빠르고 간단하게 최적제어를 수행할 수 있을 것으로 생각되며 향후 Picard 반복법으로 풀수 없는 시스템에 대한 고찰이 계속되어야 할 것이다.

## [참고 문헌]

- [1] M. F. Hassan & M. G. Singh, "Hierarchical Successive Approximation Algorithms for Non-linear Systems. Part I. Generalization of the Method of Takahara", Large Scale Systems, Vol. 2, pp.65-79, 1981
- [2] M. F. Hassan & M. G. Singh, "Hierarchical Successive Approximation Algorithms for Non-linear Systems. Part II. Algorithms Based on Costate Coordination", Large Scale Systems, Vol. 2, pp.81-95, 1981
- [3] H. Kremer, "Algorithms for the Haar functions and the fast Haar transform", in Proc. Hatfield Symp., June, 1971.
- [4] Peter R. Roeser & M. E. Jernigan, "Fast Haar Transform Algorithms", IEEE Transactions on Computers, Vol. c-31, No. 2, pp. 175-178, February 1982.
- [5] 이한석, 조영호, 안두수, 이명규, "블러펄스 함수에 의한 비선형계의 2계층 최적제어", 전기학회논문지 1998.04 v.47, n.4, pp.494-502