1999년도 대한전기학회 정기총회 및 추계학술대회 논문집 1999. 11. 20

포화 구동기를 갖는 선형 시스템의 H_∞ 제어기 설계

조현철*, 김진훈
충북대학교 제어계측공학과

H_∞ Controller Design of Linear Systems with Saturating Actuators

Hyon-Chol Cho*, Jin-Hoon Kim
Dept. of Control and Instrumentation Engineering, Chungbuk National Univ.

Abstract - In this paper, we consider the design of a state feedback H_∞ controller for uncertain linear systems with saturating actuators. We consider a general saturating actuator and employ the additive decomposition to deal with it effectively. And the considered uncertainty is the unstructured uncertainty which is only known its norm bound. Based on Linear Matrix Inequality(LMI) techniques, we present a condition on designing a controller that guarantees the L_2 gain, from the noise to the output, is not greater than a given value. A controller is obtained by checking the feasibility of three LMI's, and this can be easily done by well-known control package. Finally, we show the usefulness of our result by a numerical example.

1. 서 론

실제 제어 시스템에서 구동기는 필수적이며, 대부분의 구동기는 입력 값에 무관하게 일정한 출력이 나오는 포화 특성을 가진다. 이러한 포화 구동기를 갖는 선형 시스템에 관한 기존 연구들을 살펴보면[1]-[3], Popov의 안정성 정리에 의해서 포화 구동기를 갖는 선형 시스템의 안정성 문제를 다루었고[1], 비선형 구간과 Bellman의 정리를 이용하여 포화 구동기를 갖는 시스템의 안정성에 대한 충분 조건이 유도되었다[2],[3].

또한, 강인제어의 핵심이 되는 분야 중의 한 가지인 H_∞ 제어에 관한 기존 연구들을 살펴보면[4],[5], 두 개의 대수 Riccati 방정식을 기초로 하여 상태공간에서 H_∞ 제어기를 설계하는 방법을 제안되었고[4], 선형 행렬 부등식을 바탕으로 출력 궤환을 이용한 H_∞ 제어기가 설계되었다[5].

그리고, 최근에는 포화함수가 있는 시스템에 대하여 전 상태 궤환 문제를 사용한 H_∞ 제어기의 feasibility에 대한 충분 조건을 LMI를 사용하여 표현하는 연구가 되어 지고 있다[6],[7].

이러한 연구 배경 하에 본 논문에서는 포화 구동기를 갖는 불확정성 선형 시스템에서 외란(disturbance)으로부터 출력의 H_∞ 노음이 주어진 값 이하 또는 같도록 하는 제어기를 설계하는 문제를 보인다. 일반적인 포화 특성과 그 비선형성인 포화 특성을 효과적으로 다루기 위해 합 분해 접근법(Additive Decomposition Approach)을 사용하였다[8]. 그리고 고려된 불확정성은 노옴 바운드만이 알려진 비구조적 불확정성을 다룬다. 제어기는 LMI 조건들을 만족하는 해를 구하면 곧바로 얻게되며, 또한 이들 조건은 MATLAB™을 이용하면 쉽게 확인된다. 마지막으로 수치 예제를 통해 제시된 결과의 유용성을 보인다.

이 논문에서 $|\cdot|$는 절대치를 $\|\cdot\|$는 노옴(norm)을 의미한다. 또한 $\lambda_{max}(\cdot)$는 대칭(symmetric)행렬의 최대 고유치(maximum eigenvalue)이고 두 개의 대칭 행렬 $V, W \in R^{n\times n}$에 대하여 $V<W$ 또는 $V\le W$ 는 각각 행렬 $W-V$ 가 양확정(positive definite), 준양확정(semi positive definite)행렬임을 나타낸다. 끝으로 I는 적당한 차수의 항등(identity)행렬이다.

2. 문제기술

다음의 포화 구동기를 포함하는 불확정성 선형 시스템을 고려하자.

$$\dot{x}(t) = (A + \triangle A(t))x(t) + B_1 Sat(u(t)) + B_2 w(t)$$
$$z(t) = Cx(t), \quad x(0) = 0 \tag{1}$$

여기서 $x(t)\in R^n$는 상태이고 $u(t)\in R^m$는 제어를 나타내며 $z(t)\in R^p$는 출력, 그리고, 외란은 $w^T w \le w_{max}^2$를 만족한다. 또한, $\triangle A(t)\in R^{n\times n}$는 다음과 같은 노옴 바운드만이 알려진 비구조적 불확정성이다.

$$\|\triangle A(t)\| \le \eta \tag{2}$$

그리고, 포화 함수는 다음과 같다.

$$Sat(u) = [\,sat(u_1), sat(u_2), \cdots, sat(u_m)]^T$$

여기서

$$sat(u_i) = \begin{cases} u_i^{\lim}, & \text{if } u_i > u_i^{\lim} \\ u_i, & \text{if } |u_i| \le u_i^{\lim} \\ -u_i^{\lim}, & \text{if } u_i < -u_i^{\lim} \end{cases} \tag{3}$$
$$,\ i = 1, 2, \cdots, m$$

이다. 그리고 다음의 상태 궤환 제어

$$u(t) = -Kx(t) \tag{4}$$

를 생각한다.

비선형성 $Sat(u)$를 다음과 같이 선형부분 u와 또 다른 비선형성 $Dz(u)$의 합으로 분해하자[8].

$$Sat(u(t)) = u(t) - Dz(u(t)) \tag{5}$$

여기서 $Dz(u) = [dz(u_1), dz(u_2), \ldots, dz(u_m)]^T$ 이고

$$dz(u_i) = \begin{cases} u_i - u_i^{\lim}, & \text{if } u_i > u_i^{\lim} \\ 0, & \text{if } |u_i| \le u_i^{\lim} \\ u_i + u_i^{\lim}, & \text{if } u_i < -u_i^{\lim} \end{cases}$$

이다(그림 1 참조).

시스템 (1)에 제어 (4)와 식 (5)를 적용하여 정리하면 다음이 된다.

$$\dot{x}(t) = [A - B_1 K]x(t) + \triangle A(t)x(t) + B_1 Dz(Kx(t)) + B_2 w(t)$$
$$z(x) = Cx(t), \quad x(0) = 0 \tag{6}$$

본 논문의 주요 목적은 제어 (4)를 갖는 시스템 (1)에 대하여 w로부터 z까지 L_2 이득이 γ보다 크지 않은 즉, $\frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} \le \gamma$를 보장하는 제어 (4)를 찾는 것이다.

먼저 다음의 집합(reachable set)을 정의하자.

$$\Omega := \{x\in R^n : x^T Q^{-1} x \le w_{max}^2\} \tag{7}$$

여기서 $Q = Q^T > 0$ 이다.

다음의 보조정리들은 앞으로 제시되는 주요결과의 증명에 사용된다.

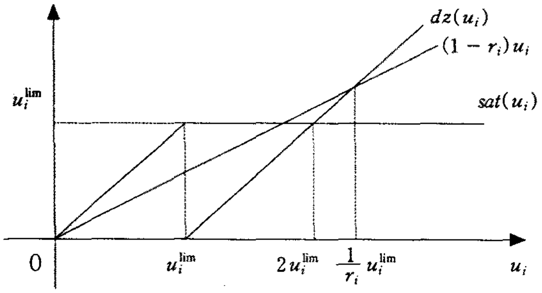

그림 1. 일사사분면의 비선형 함수
Fig. 1. Nonlinear functions (1st plane only).

보조정리 1[9]: 임의의 행렬 S와 대칭 행렬 Q, R에 대하여 다음은 동치이다.

$$i)\ R>0,\quad Q-SR^{-1}S^T>0$$

$$ii)\ \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix}>0$$

보조정리 2[10]: 임의의 두 행렬 X, Y와 $S>0$에 대하여 다음이 성립한다.

$$X^TY+Y^TX\le X^TS^{-1}X+Y^TSY$$

보조정리 3: 다음의 선형 시스템을 생각하자.

$$\dot{x}=Ax+Bw\quad, w^Tw\le w_{\max}^2\quad, x(0)=0$$

1) 다음의 조건을 만족하는 2차 함수(quadratic function) $V(\zeta)=\zeta^TQ^{-1}\zeta, Q>0$가 존재한다면, 식 (7)에서 정의된 집합 Ω는 위의 시스템의 해 x의 reachable set이다.

$$\frac{dV(x)}{dt}+\alpha V(x)-\alpha w^Tw\le 0 \tag{8}$$

2) 다음 조건을 만족하는 2차 함수 $V(\zeta)=\zeta^TQ^{-1}\zeta$, $Q>0$가 존재하면

$$\frac{dV(x)}{dt}+z^Tz-\gamma^2w^Tw\le 0 \tag{9}$$

외란 w로부터 출력 z까지의 L_2 이득은 γ보다 크지 않게 된다[7].

증명: 생략. ■■■

보조정리 4: Y_i를 $Y=KQ$의 i번째 행(row) 벡터라 하고, $x\in\Omega$일 때 다음의 행렬 부등식이 성립한다면

$$\begin{bmatrix} Q & Y_i^T \\ Y_i & \left(\frac{u_i^{\lim}}{r_iw_{\max}}\right)^2 \end{bmatrix}>0 \tag{10}$$

$|u_i|\le\frac{1}{r_i}u_i^{\lim}, 0<r_i\le 1\ , i=1,2,\cdots,m$을 만족하고, 또한, 다음 관계도 성립한다.

$$Dz^T(Kx)S^{-1}Dz(Kx)\le x^TK^T(I-R)S^{-1}(I-R)Kx$$

여기서 $R=Diag\{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$, $S=Diag\{s_1, s_2, \ldots, s_m\}>0$, $Q=Q^T>0$이다.

증명: 생략. ■■■

3. 주요결과

다음의 정리 1은 제어(4)를 갖는 시스템(1)에 대하여 w로부터 z까지 L_2 이득이 γ보다 크지 않음을 보장하는 제어(4)의 조건을 나타낸다.

정리 1: $R=Diag\{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$, $0<r_i<1$이라 하자. 만약 다음의 행렬 부등식을 만족하는 행렬 $Q\in R^{n\times n}=Q^T>0$, $Y\in R^{m\times n}$와 스칼라 $\varepsilon>0$, $\alpha>0$그리고 $S=Diag\{s_1, s_2, \ldots, s_m\}>0$가 존재한다면

$$1)\quad \begin{bmatrix} H_1 & Q & Y^T(I-R) & B_2 \\ Q & -\varepsilon_1I & 0 & 0 \\ (I-R)Y & 0 & -S_1 & 0 \\ B_2^T & 0 & 0 & -\alpha I \end{bmatrix}\le 0 \tag{11}$$

$$2)\quad \begin{bmatrix} H_2 & Q & QC^T & Y^T(I-R) & B_2 \\ Q & -\varepsilon_2I & 0 & 0 & 0 \\ CQ & 0 & -I & 0 & 0 \\ (I-R)Y & 0 & 0 & -S_2 & 0 \\ B_2^T & 0 & 0 & 0 & -\gamma^2I \end{bmatrix}\le 0 \tag{12}$$

$$3)\quad \begin{bmatrix} Q & Y_i^T \\ Y_i & \left(\frac{u_i^{\lim}}{r_iw_{\max}}\right)^2 \end{bmatrix}>0\quad , i=1,2,\ldots,m \tag{13}$$

다음의 상태 궤환 제어기

$$u(t)=-Kx(t)\ ,\ K=YQ^{-1} \tag{14}$$

는 w로부터 z까지 L_2 이득이 γ보다 크지 않게 됨을 보장한다. 여기서

$$H_1=QA^T+AQ-Y^TB_1^T-B_1Y+B_1S_1B_1^T+\varepsilon_1\eta^2I+\alpha Q$$
$$H_2=QA^T+AQ-Y^TB_1^T-B_1Y+B_1S_2B_1^T+\varepsilon_2\eta^2I$$

이고, Y_i는 행렬 Y의 i번째 행(row) 벡터이다.

증명: i) 먼저 식 (11)과 식 (13)을 만족한다면 $w^Tw\le w_{\max}^2$일 때 식 (7)에서 정의된 Ω가 제어기 (14)을 갖는 시스템 (1)의 해 x에 대하여 reachable set임을 보장하는 조건을 찾는다. 보조정리 3으로부터 만약 다음을 만족하는 2차 함수 $V(\zeta)=\zeta^TQ^{-1}\zeta, Q>0$와 $\alpha>0$가 존재한다면

$$f_1(x)=\frac{dV(x)}{dt}+\alpha V(x)-\alpha w^Tw\le 0$$

Ω는 reachable set이다. 위 식에 식 (6)과 보조정리 2를 적용하고 보조정리 4와 불확정성 (2) 그리고 $Y=KQ$를 이용하여 정리하면 다음을 얻는다.

$$f_1(x)\le y^T\begin{bmatrix} H_1 & Q & Y^T(I-R) & B_2 \\ Q & -\varepsilon_1I & 0 & 0 \\ (I-R)Y & 0 & -S_1 & 0 \\ B_2^T & 0 & 0 & -\alpha I \end{bmatrix}y+g(x)$$

여기서 $g(x)$는 다음을 만족한다.

$$\begin{cases} g(x)\le 0,\ x\in\Omega \\ g(x)>0,\ x\notin\Omega \end{cases}$$

여기서 $x\in\Omega$이면 $g(x)\le 0$이어야하며 이때 조건 (11)을 적용하면, $f_1(x)\le 0$, 즉 $x\in\Omega$임을 알 수 있다. 여기서 $y^T=[x^TQ^{-1}:x^TQ^{-1}:x^TQ^{-1}:w^T]$이다.

반대로 위의 조건 (11)과 (13)을 만족함에도 Ω가 reachable set이 아니라 가정하자. 그러면 $V(x)$의 연속성과 $V(x(0))=0$에 의하여 $V(x(t_1))\le w_{\max}^2$, $V(x(t_2))>w_{\max}^2$인 시간 $t_1<t_2$가 존재하여야하고, 중간치 정리에 의하여 $\dot{V}(x(t^*))>0$이 되는 $t^*, t_1<t^*<t_2$가 $x\notin\Omega$에서 존재하여야 한다. 그런데 $x\notin\Omega$에서는 항상 $\dot{V}(x)<0$이므로 $\dot{V}(x(t^*))>0$이 되는 $t^*, t_1<t^*<t_2$가 $x\notin\Omega$에서 존재하여야한다는데 위배된다. 즉, 위의 조건 (11)과 (13)을 만족하면 항상 $x\in\Omega$이다.

ii) 다음은 x에 대하여 집합 Ω가 reachable set이면 (즉, (11)과 (13)을 만족하면), 그리고 조건 (12)와 (13)을 만족하는 제어기 (14)가 존재한다면, L_2 이득이 주어진 γ가 보다 크지 않음을 보인다. 보조정리 3에 의하여 다음을 만족하는 2차 함수 $V(\zeta)=\zeta^TQ^{-1}\zeta$, $Q>0$

와 $\gamma>0$가 존재한다면 w로부터 z까지의 L_2 이득이 γ 보다 크지 않음을 알 수 있다.

$$f_2(x)=\frac{dV(x)}{dt}+z^Tz-\gamma^2w^Tw\le 0$$

위 식에 식 (6)과 보조정리 2를 적용하고 보조정리 4와 불확정성 (2) 그리고 $Y=KQ$를 이용하여 정리하면 다음을 얻는다.

$$f_2(x)\le y^T\begin{bmatrix} H_2 & Q & QC^T & Y^T(I-R) & B_2 \\ Q & -\varepsilon_2 I & 0 & 0 & 0 \\ CQ & 0 & -I & 0 & 0 \\ (I-R)Y & 0 & 0 & -S_2 & 0 \\ B_2^T & 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix}y+g(x)$$

여기서 $g(x)$는 다음을 만족한다.

$$\begin{cases} g(x)\le 0, & x\in\Omega \\ g(x)>0, & x\notin\Omega \end{cases}$$

여기서 조건 (11)에 의해서 $x\in\Omega$이므로 $g(x)\le 0$이 되고 조건 (12)에 의해 $f_2(x)\le 0$이 된다. 즉, w로부터 z까지의 L_2 이득이 γ보다 크지 않음을 알 수 있다. 여기서 $y^T=[x^TQ^{-1}\vdots x^TQ^{-1}\vdots x^TQ^{-1}\vdots x^TQ^{-1}\vdots w^T]$이다.

위의 사실을 종합하면, (11), (12), (13)을 만족하면, 제어기 (14)를 가지는 시스템 (1)에 대하여, Ω는 reachable set이며, w로부터 z까지의 L_2 이득이 γ보다 크지 않음을 알 수 있다.

■■■

4. 수치예제

다음의 두 가지 시스템을 고려하자.

시스템 1)

$$\dot{x}(t)=\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -10 \end{bmatrix}+\Delta A(t)\right)x(t)+\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}Sat(u(t))+\begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}w(t)$$

$$z(t)=[5\ \ 0]x(t)$$

시스템 2)

$$\dot{x}(t)=\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}+\Delta A(t)\right)x(t)+\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}Sat(u(t))+\begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}w(t)$$

$$z(t)=[5\ \ 0]x(t)$$

여기서 $\|\Delta A(t)\|=0$, $w_{\max}=1$이라 하자. 그러면 개루프 상태에서 시스템 1)은 안정하고, 시스템 2)는 불안정하다. 즉, 개루프 상태에서 시스템 1)의 w로부터 z까지의 H_∞ 노음은 3인데 반하여, 시스템 2)의 H_∞ 노음은 무한대이다.

또한, 표 1에서는 $\|\Delta A(t)\|\le 0.1$, $w_{\max}=1$을 사용하는데, $r=1$로 주어진 경우는 설계된 제어기는 절대로 포화되지 않음을 의미하며, $r=0.1$로 주어진 경우는 설계된 제어기의 출력은 포화 비선형성의 선형 구간의 10배 이하가 됨을 의미한다. 그리고, $u^{\lim}=3,5$의 2가지 각각의 경우에 대하여 $r=1, 0.1, 0.01$ 각각에 대한 L_2 이득을 최소로 하는 제어기를 구하였을 때, 각각의 L_2 이득은 γ로, 그때의 설계된 제어기는 행렬 K로 표시하고, γ에서 (*)는 설계된 제어기 K를 $\|\Delta A(t)\|=0$과 $u^{\lim}=\infty$ 상태에서 얻을 수 있는 최소 L_2 이득이다.

5. 결 론

이 논문에서는 외란(disturbance)으로부터 출력의 H_∞ 노옴이 주어진 값 이하 또는 같도록 하는 포화 구동기를 갖는 불확정성 선형 시스템의 H_∞ 제어기 설계를 보였다. 일반적인 포화 특성과 그 비선형성인 포화 특성을 효과적으로 다루기 위해 합 분해 접근법(Additive Decomposition Approach)을 사용하였다. 그리고 고려된 불확정성은 노옴 바운드만이 알려진 비구조적 불확정성을 다루었다. 제어기는 선형 행렬 부등식(LMI) 조건들을 만족하는 해를 구하여 얻어지며, 또한, 이들 조건은 잘 알려진 MATLAB™을 이용하면 쉽게 구해진다. 마지막으로 수치 예제를 통해 제시된 결과의 유용성을 보였다.

표 1. 시스템 1)과 2)에 대한 L_2 이득(γ)과 설계된 제어기(행렬 K)

Table 1. Designed controller(Matrix K) and L_2 gain(γ) for system 1) and 2)

시스템	$u^{\lim}$		$r=1$	$r=0.1$	$r=0.01$
1)	3	γ	0.7330 (0.6378)	0.7663 (0.2754)	0.8003 (0.2421)
		K	[10.5176 0.7934]	[108.8324 9.8084]	[1065.6 101.0]
	5	γ	0.5595 (0.4913)	0.5974 (0.2457)	0.6194 (0.2237)
		K	[15.9208 1.1221]	[166.2520 14.1329]	[1633.8 143.9]
2)	3	γ	0.6747 (0.5659)	0.7024 (0.5505)	0.7049 (0.5488)
		K	[11.3231 2.1632]	[109.9011 23.8022]	[1095.3 240.0]
	5	γ	0.5314 (0.4486)	0.5507 (0.4411)	0.5523 (0.4405)
		K	[17.3258 2.6751]	[168.8884 29.3972]	[1684.3 296.4]

주: γ에서 (*)는 설계된 제어기 K를 $\|\Delta A(t)\|=0$과 $u^{\lim}=\infty$상태에서 얻을 수 있는 최소 L_2 이득임.

[참 고 문 헌]

[1] R. L. Kosut, "Design of linear systems with saturating linear control and bounded states," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 28, no. 1, pp. 121-124, 1983.

[2] W. J. Wang and B. S. Chen, "Stability of large-scale systems with saturating actuators," *Int. J. Contr.*, vol. 47, no.3, pp. 827-850, 1988.

[3] B. S. Chen and S. S. Wang, "The stability of feedback control with nonlinear saturating actuator: Time domain approach," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 33, no. 5, pp. 483-487, 1988.

[4] J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar and B. A. Francis, "State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 34, no. 8, pp. 831-847, 1989.

[5] H. H. Choi and M. J. Chung, "An LMI approach to H_∞ controller design for linear time-delay systems," *Automatica*, vol. 33, no. 4, pp. 737-739, 1997.

[6] T. Nguyen, F. Jabbari and S. de Miguel, "Applicaton of active control to buildings under seismic excitation: Actuator saturation," *Proc. of the 1998 IEEE International Conference on Control Applications*, Trieste, Italy, September 1998.

[7] T. Nguyen and F. Jabbari, "Disturbance attenuation for systems with input saturation: An LMI approach," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 44, no. 4, pp. 852-857, 1999.

[8] J. H. Kim and Z. Bien, "Robust stability of uncertain systems with saturating actuators," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 39, no. 1, pp. 225-229, 1994.

[9] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, Studies in Applied Mathematics, 1994.

[10] A. Wienmann, *Uncertain Model and Robust Control*, Springer-Verlag, 1991