

이차 이산시스템의 Peak Overshoot을 최소화하기 위한 영점의 위치 설계

이재석\*, 정태상\*\*  
 \*중앙대학교 제어계측학과, \*\*중앙대학교 전자전기공학부

Design of the Zero Location for Minimizing the Peak Overshoot of Second Order Discrete Systems

Jae-Seok Lee\*, Tae-Sang Chung\*\*

\*Dept. of Control and Instrumentation Eng., \*\*School of Electrical and Electronics Eng., Chung-Ang Univ.

**Abstract** - The damping ratio  $\zeta$  of a continuous 2nd order response which passes all the points of the discrete response of a 2nd order discrete system (envelope curve) is a function of only the location of the closed-loop pole and is not at all related to the location of the zero. And the peak overshoot of the envelope curve is uniquely specified by the damping ratio  $\zeta$ , which is a function of solely the closed-loop pole location, and the angle  $\alpha$  which is determined by the relative location of the zero with respect to the closed-loop complex pole. Therefore, if the zero slides on the real axis with the closed-loop complex poles being fixed, then the angle  $\alpha$  changes however the damping ratio  $\zeta$  does not. Accordingly, when the closed-loop system poles are fixed, the peak overshoot is function of  $\alpha$  or the system zero. In this thesis the effects of the relative location of the zero on the system performance of a second order discrete system is studied.

1. 서론

이차 이산시스템(Second Order Discrete System)의 시간영역에서의 성능은 입력으로 단위계단함수(unit-step function)를 인가했을때의 응답을 측정함으로써 알 수 있다. 사실상 최대 오버슈트(peak overshoot), 정착시간(settling time), 상승시간(rise time) 등은 입력이 단위계단함수일 때의 응답에서 정의된 값들이다. 또한  $z$  영역에서의 시스템의 안정성 및 성능은 감쇠비(damping ratio)  $\zeta$  에 대한 특성방정식(characteristic equation)의 근의 위치를 조사함으로써 알 수 있다.

이차 이산시스템의 이산 응답의 모든 점들을 지나는 이차 연속시스템, 포락선 곡선(envelope curve)의 감쇠비  $\zeta$  는 오직 폐루프(closed-loop) 극점(pole)만의 함수이다. 즉, 영점(zero)의 위치와는 전혀 무관하다. 그리고, 이 때의 최대 오버슈트는 감쇠비  $\zeta$  와 각  $\alpha$  만의 함수이다. 여기서 각  $\alpha$  는 폐루프 복소수 극점에 대한 영점의 상대적 위치에 의해 결정된다. 그러므로 폐루프 복소수 극점이 고정되었을 때, 영점의 위치를 실수 축상에서 변화시킨다면 감쇠비  $\zeta$  는 불변이지만, 각  $\alpha$  는 변하게 된다. 따라서 폐루프 복소수 극점이 고정된다면, 최대 오버슈트는 각  $\alpha$  의 함수이고 이는 다시 말해 영점만의 함수가 된다.

이 논문에서는 이차 이산시스템의 성능에 미치는 영점의 영향을 연구하였다.

2. 본론

2.1 이차 이산시스템의 단위계단응답

서로 다른 두 개의 실수 극점  $p_1, p_2$  와 실수 영점  $z_1$  을 가지는 전형적인 이차 개루프(open-loop) 이산시스템은 다음으로 표현된다. 여기서  $K$  는 이득(gain) 이다.

$$G(z) = \frac{K(z-z_1)}{(z-p_1)(z-p_2)} \tag{1}$$

또한 폐루프 이산시스템은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{C(z)}{R(z)} &= \frac{G(z)}{1+G(z)} \\ &= \frac{K(z-z_1)}{(z-p_1)(z-p_2)+K(z-z_1)} \\ &= \frac{K(z-z_1)}{z^2-(p_1+p_2-K)z+(p_1p_2-Kz_1)} \end{aligned} \tag{2}$$

식 (2)의 특성방정식(characteristic equation)이 한 쌍의 공액복소수인 폐루프 극점  $p/\pm\phi$  을 가진다면, 이차 폐루프 이산시스템은 다음의 식으로 주어진다.

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{K(z-z_1)}{(z-pe^{j\phi})(z-pe^{-j\phi})} \tag{3}$$

이러한 이차 이산시스템에 단위계단함수를 인가하였을 때, 단위계단응답(unit-step response)은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} c(kT) &= K_1\{A - [Be^{j\alpha}(pe^{j\phi})^k + Be^{-j\alpha}(pe^{-j\phi})^k]\} \\ &= K_1\{A - 2Bp^k \cos(k\phi + \alpha)\} \\ &= K_1\left\{1 - \frac{p^k}{\cos\alpha} \cos(k\phi + \alpha)\right\} \end{aligned} \tag{4}$$

여기서  $K_1$  는 정상상태 계단응답(steady-state step response)으로 이득  $K$  와 관련있다.

$$\begin{aligned} K &= K_1 \frac{(1-pe^{j\phi})(1-pe^{-j\phi})}{(1-z_1)} \\ &= K_1 \frac{1-2p\cos\phi+p^2}{1-z_1} \end{aligned} \tag{5}$$

또한 계수  $A = 1$  이며,  $2B = \frac{1}{\cos\alpha}$  이다. 그리고

각  $\alpha$  는 직선  $\overline{z_1 p/\phi}$  에서,  $z = 1$  에서 점  $p/\phi$  까지 연결한 직선에 점  $z_1$  에서 수직인 선까지 반시계방향으로 측정된 각이다. 식으로는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$p/\phi = p \cos \phi + j p \sin \phi = x_p + j y_p \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \text{atan2}(p \sin \phi, 1 - p \cos \phi) \\ &+ \text{atan2}(p \sin \phi, p \cos \phi - z_1) \\ &- \text{atan2}(0, 1 - z_1) - \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} &= \text{atan2}(y_p, 1 - x_p) + \text{atan2}(y_p, x_p - z_1) \\ &- \text{atan2}(0, 1 - z_1) - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

즉 각  $\alpha$  는 페루프 복소수 극점에 대한 영점의 상대적 위치에 의해 결정된다. 영점과 극점의 기하학적 조건을 고려하면, 각  $\alpha$  의 범위는

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \quad (8)$$

이다.

## 2.2 이차 이산 계단응답의 연속 포락선 곡선

식 (4)로 주어지는 이차 이산시스템의 이산 응답의 모든 점들을 지나는 이차 연속시스템, 포락선 곡선은 다음의 식으로 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} c(k) &= K_1 \left\{ 1 - \frac{p^k}{\cos \alpha} \cos(k\phi + \alpha) \right\} \\ &= K_1 \left\{ 1 - \frac{e^{-\zeta \omega_n t}}{\cos \alpha} \cos(\omega_n t \sqrt{1 - \zeta^2} + \alpha) \right\} \Big|_{t=kT} \quad (9) \\ &= K_1 \left\{ 1 - \frac{e^{-\zeta \omega_n kT}}{\cos \alpha} \cos(\omega_n kT \sqrt{1 - \zeta^2} + \alpha) \right\} \end{aligned}$$

이 때 감쇠비  $\zeta$  는 다음과 같이 주어진다.

$$\zeta = \frac{-\ln p}{\sqrt{\phi^2 + (\ln p)^2}}, \quad (\ln p < 0, \phi > 0, \zeta > 0) \quad (10)$$

따라서 감쇠비  $\zeta$  는 페루프 극점  $p/\phi$  만의 함수이다. 그리고 포락선 곡선의 최대 오버슈트 POS 는

$$POS = \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\cos \alpha} e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}(\pi - \alpha - \text{atan2}(\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}))} \times 100\% \quad (11)$$

로 주어진다. 즉, 최대 오버슈트는 각  $\alpha$  와 감쇠비  $\zeta$  만의 함수이다. 각  $\alpha$  는 식 (7)로 주어진다.

## 2.3 이차 이산시스템에서의 영점 위치의 영향

만일 페루프 복소수 극점이 고정된 상태에서, 영점의 위치가 실수축을 따라 변한다면, 각  $\alpha$  는 식 (7)에 따라 변하게 된다. 따라서 페루프 시스템의 극점이 불변일 때 최대 오버슈트는 각  $\alpha$  만의, 즉 시스템의 영점만의 함수이다. 최대 오버슈트에 대한 식 (11)를  $\alpha$  에 대하여 미분하여 최대 오버슈트를 최소로 만드는 각  $\alpha$  의 값을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &\frac{dPOS(\alpha)}{d\alpha} \\ &= \frac{\sqrt{1 - \zeta^2} \tan \alpha}{\cos \alpha} e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}(\pi - \alpha - \text{atan2}(\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}))} \\ &+ \frac{\zeta}{\cos \alpha} e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}(\pi - \alpha - \text{atan2}(\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}))} \\ &= \frac{\sqrt{1 - \zeta^2} \tan \alpha + \zeta}{\cos \alpha} e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}(\pi - \alpha - \text{atan2}(\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}))} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

즉,

$$\tan \alpha = -\frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (13)$$

식 (8)으로 주어진 각  $\alpha$  의 범위에서 최대 오버슈트를 최소로 만드는 각  $\alpha_m$  의 값은 식 (13)로부터 구할 수 있다.

$$\alpha_m = \text{atan2}(-\zeta, \sqrt{1 - \zeta^2}) = -\text{atan2}(\zeta, \sqrt{1 - \zeta^2}) \quad (14)$$

또한 이때의 sin 값과 cos 값은 다음과 같다.

$$\sin \alpha_m = -\zeta \quad (15)$$

$$\cos \alpha_m = \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (16)$$

(14) 에서 구한 각  $\alpha_m$  을 식 (11) 에 대입하면, 최대 오버슈트가 최소로 될 때의 값은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} POS_m &= POS(\alpha = \alpha_m) \\ &= \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}(\pi - \alpha_m + \alpha_m)} = e^{-\frac{\zeta \pi}{\sqrt{1 - \zeta^2}}} \end{aligned} \quad (17)$$

주어진  $\zeta, p, \phi$  으로부터  $\alpha_m$  이 정해지면, 최대 오버슈트를 최소로 만드는 영점  $z_{1m}$  의 위치는 식 (7) 에 의해 다음과 같이 결정할 수 있다.

$$\begin{aligned} \alpha_m &= \text{atan2}(y_p, 1 - x_p) + \text{atan2}(y_p, x_p - z_{1m}) \\ &- \text{atan2}(0, 1 - z_{1m}) - \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (18)$$

혹은,

$$\begin{aligned} &\text{atan2}(y_p, x_p - z_{1m}) - \text{atan2}(0, 1 - z_{1m}) - \frac{\pi}{2} \\ &= \alpha_m - \text{atan2}(y_p, 1 - x_p) \end{aligned} \quad (19)$$

$\text{atan2}(0, 1 - z_{1m})$  는 0 이거나  $\pi$  이므로, 식 (19)의 양변에 tan를 취하면,

$$\frac{z_{1m} - x_p}{y_p} = \frac{-\frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} + \frac{y_p}{x_p - 1}}{1 + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} + \frac{y_p}{x_p - 1}} \quad (20)$$

$z_{1m}$  에 대하여 풀면 다음의 식이 얻어진다.

$$z_{1m} = \frac{\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} + \frac{x_p^2 + y_p^2 - x_p}{y_p}}{\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} + \frac{x_p - 1}{y_p}} \quad (21)$$

$$= \frac{\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} + \frac{p - \cos \phi}{\sin \phi}}{\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} + \frac{p \cos \phi - 1}{p \sin \phi}}$$

페루프 극점이  $p/\pm\phi = x_p \pm jy_p$  일 때, 최대 오버슈트를 최소화 하는 영점의 위치가  $z = z_{1m}$  라면, 이산 보상기(discrete compensator)는 다음과 같다.

$$D_m(z) = \frac{K_{cm}(z - z_{1m})}{(z - p_{1m})(z - p_{2m})} \frac{(z - p_1)(z - p_2)}{K_c(z - z_1)} \quad (22)$$

개루프 전달함수(transfer function)는 다음처럼 된다.

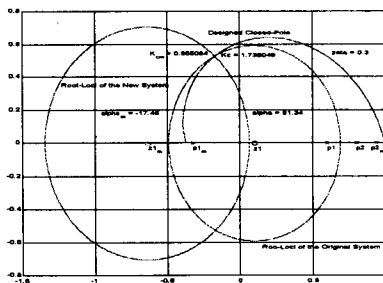
$$G_m(z) = D_m(z)G(z) = \frac{K_{cm}(z - z_{1m})}{(z - p_{1m})(z - p_{2m})} \quad (23)$$

여기서  $p_{1m}$ , 과  $p_{2m}$  는 새로운 시스템의 근궤적곡선(root-locus)이 원래의 극점  $p/\pm\phi = x_p \pm jy_p$  을 지나도록 결정되어야 한다.

식 (23)에서 확인하게 알 수 있듯이, 새로운 시스템이 원래의 시스템의 페루프 극점을 지나도록 설계된다면, 즉 그러한  $p_{1m}$ , 과  $p_{2m}$  이 결정된다면, 다른 조건의 변화없이 단순히 영점의 위치 변화로 최대 오버슈트는 최소가 될 수 있다.

## 2.4 예

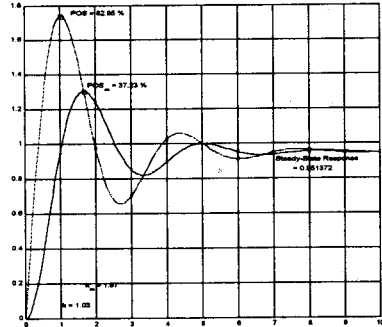
$$G(z) = \frac{K_c(z - 0.1)}{(z - 0.6)(z - 0.8)} \quad (24)$$



<그림 1. 원래의 시스템과 새로운 시스템의 근궤적곡선>

원래의 시스템의 근궤적곡선은 오른쪽의 곡선이다. 여기서  $p_1 = 0.6$ ,  $p_2 = 0.8$ ,  $z_1 = 0.1$  이다. POS가 최소화 되는 새로운 시스템의 근궤적곡선은 왼쪽의 원으로, 여기서  $z_{1m} = -0.638750$ ,  $p_{1m} = -0.323520$ ,  $p_{2m} = 0.939555$  이다. 그림에서 알 수 있듯이 두 곡선은 페루프 극점  $p/\pm\phi = 0.553259 \pm j0.784$  을 지난다. 여기서 영점은 0.1 to  $-0.638750$  으로 변하는데, 이 새로운 영점  $z_{1m}$  이 POS를 최소화 만든다. 영점이 변하였으므로 각  $\alpha$  또한  $51.34^\circ$  에서  $-17.46^\circ$  로 변하게 된다. 새로운 시스템의 극점-영점의 위치관계는 POS를 최소화 만든다.

그림 1.은 식 (24)의 원래의 시스템과 POS를 최소화 만드는 새로운 시스템의 근궤적곡선을 나타낸다.



<그림 2. 원래의 시스템과 새로운 시스템의 계단응답>

새로운 시스템의 계단응답은 원래의 시스템에 비해 그림에서 볼 수 있듯이 진동이 작으며, 최대 오버슈트가 최소로 된다. POS 는 82.95%에서 37.23%로 현저히 떨어졌다. 그럼에도 불구하고 두 시스템의 정상상태 응답은 같다. 이는 이 예제에서  $p_{1m}$ , 과  $p_{2m}$  을 결정하는 조건으로 두 시스템의 정상상태 응답을 같도록 했기 때문이다.

그림 2.는 두 시스템의 계단응답을 나타낸다. 이 예제에서는 두 시스템의 정상상태 응답을 같도록 하는  $p_{1m}$ , 과  $p_{2m}$  을 구하였다.

## 3. 결 론

이차 이산시스템의 이산 응답의 모든 점들을 지나는 이차 연속시스템, 포락선 곡선의 감쇠비  $\zeta$  는 오직 페루프 극점만의 함수이다. 즉, 영점의 위치와는 전혀 무관하다. 그리고, 이 때의 최대 오버슈트는 감쇠비  $\zeta$  와 각  $\alpha$  만의 함수이다. 여기서 각  $\alpha$  는 페루프 복소수 극점에 대한 영점의 상대적 위치에 의해 결정된다. 그러므로 페루프 복소수 극점이 고정되었을 때, 영점의 위치를 실수축상에서 변화시킨다면 감쇠비  $\zeta$  는 불변이지만, 각  $\alpha$  는 변하게 된다. 따라서 페루프 복소수 극점이 고정된다면, 최대 오버슈트는 각  $\alpha$  의 함수이고 이는 다시 말해 영점만의 함수가 된다.

이 논문에서는 이차 이산시스템의 성능에 미치는 영점의 영향을 연구하였다. 즉, 개루프 영점과 극점을 알고 있는 이차 이산시스템에서, 감쇠비  $\zeta$  가 주어졌을 때, 최대 오버슈트를 가장 작게 만드는 보상기를 설계하는 방법을 알아보았다. 다시 말해 이 보상기는 주어진 이차 이산시스템을 최대 오버슈트가 가장 작게 되도록 새로운 영점과 극점을 가진 개루프 시스템으로 변화시켜 준다.

원래의 주어진 개루프 시스템의 페루프 극점을 지나는 새로운 개루프 극점을 가진 개루프 시스템은 무수히 많다. 따라서 이러한 사실은 보다 효율적인 시스템 성능을 얻기 위해 또다른 방법을 사용할 수 있음을 보여 준다.

## [참 고 문 헌]

- [1] 정태상, "디지털 제어 강의노트", 1999
- [2] Benjamin C. Kuo, "Digital Control Systems", 1992
- [3] Benjamin C. Kuo, "Automatic Control Systems", 1995