

3번 부호화한 하다마드 변환 영상 분광계의 스펙트럼 복원법

°박영재, 서익수, 박진배  
연세대학교 전기컴퓨터공학과

Triply Encoded Hadamard Transform Imaging Spectrometer:  
Spectrum Recovery Method

°YeongJae Park, IkSu Seo, JinBae Park  
Electrical and Computer Engineering Yonsei University

**Abstract** - Triply encoded HTIS(hadamard transform imaging spectrometer) is a system which applies the grill spectrometer to the HTIS. we consider a nonideality of mask transparent characteristic in estimating spectrum. Triply encoded system increases the SNR(signal to noise ration) by multiplexing effect. In this paper, we suggest an advanced  $T^{-1}$  method for spectrum recovery. Then, we proved the superiority of the suggested method by comparing the average MSE(mean square error) of the other recovery methods.

1. 서 론

광 스펙트럼을 측정하는 하다마드 변환 분광계는 다중 화기법을 이용하여 측정시 발생하는 잡음을 줄여 개선된 스펙트럼을 얻는 장치이다[1]. 공간영역에 따른 다른 스펙트럼 정보를 지니고 있는 시료의 스펙트럼 측정하는 장치로 하다마드 변환 영상 분광계가 제시되었다. 3번 부호화한 하다마드 변환 영상 분광계는 입력부에 2차원 영상 마스크를 통해 부호화하고 출력부에 좌순환 단순행렬로 제어되는 그릴 스펙트럼미터를 적용함으로써 전체적으로 3번의 부호화를 수행하여 다중화 효과를 극대화시켜 신호대잡음비(SNR: signal to noise ration)를 증진시키는 분광계이다. 측정시 검파기 잡음을 오차의 주원인으로 가정하였을 때, 측정잡음이 감소할수록 신호대잡음비는 증가한다. 기존의 하다마드 변환 영상 분광계와 양립하기 위해 마스크 제어행렬로 우순환 단순행렬 대신에 좌순환 단순행렬로 제어하는 그릴 분광계가 제안되었다[2].

본 논문은 마스크의 비이상적인 투과율 특성을 고려한 스펙트럼 복원법으로 하다마드 변환 분광계에서 제시한  $T^{-1}$  방법[3]을 본 시스템에 대해 모델링하고 임의의 2차원 시료에 대한 모의실험을 통해  $D^{-1}$ 방법에 의한 스펙트럼 추정치와 평균 MSE(mean square error)를 비교하여 제안된 복원법의 우수성을 입증하였다.

2. 본 론

2.1 마스크 투과율 특성과 좌순환 단순행렬로 제어되는 그릴 분광계

하다마드 행렬은 각 행과 열들이 서로 직교성을 만족한다[1]. 다음은 'Sylvester type' 하다마드 행렬이다.

$$H_N = \begin{bmatrix} H_{N/2} & H_{N/2} \\ H_{N/2} & -H_{N/2} \end{bmatrix} \quad (1)$$

여기서  $H_1=1$ 이다.

광학 시스템은 '1'과 '0'을 원소로 하는 양성시스템이므로 마스크의 투과, 비투과 상태를 나타내는 '1'과 '0'을 원소로 하는 제어행렬을 사용해야 한다[4]. 그러므로 하다마드 행렬의 첫 번째 행과 열을 없애고 '-1'은 '1'로 '1'은 '0'으로 변형한 단순행렬을 마스크 제어행렬로 사용한다. 본 논문의 입력부의 영상 마스크와 출력부에 사용하는 그릴 분광계의 입력부에 사용하는 전자광학 마스크의 투과율 특성은 그림 1과 같다[2].

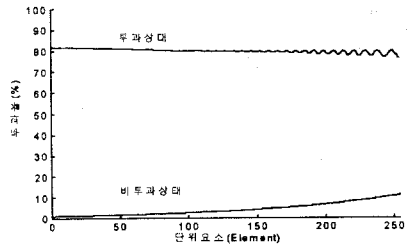


그림 1. PDLC 전자광학 마스크의 투과율 특성

기존의 하다마드 변환 영상 분광계와 양립하기 위해 마스크 제어행렬로 좌순환 단순행렬을 사용하는 그릴 분광계의 측정치는 식 (1)과 같다.

$$\eta = \tilde{V} W^T \phi + e \quad (1)$$

여기서,  $\tilde{V}, W$ 는 입·출력 마스크의 투과율을 나타내고,  $e$ 는 검파기의 측정잡음을 나타낸다. 그릴 분광계의 출력 마스크는  $(2n-1)$ 개의 슬릿을 갖는 이상적인 투과율 특성을 지닌 기계식 마스크이므로 마스크 제어행렬인 좌순환 단순행렬로 대치한다. 입력 마스크는  $n$ 개의 슬릿을 갖는 비이상적인 투과율을 지닌 전자광학 마스크를 사용하므로 마스크의 투과율은 식 (2)와 같이 나타낸다[3].

$$\tilde{V} = VT = V(D+V^{-1}JT) \quad (2)$$

여기서,  $T, V$ 는 각각 전달행렬, 마스크 제어행렬인 단순행렬이며,  $D, J, T_0$ 는 식 (3)과 같이 정의된다.

$$D = \text{diag}(\tau_{a1} - \tau_{o1}, \tau_{a2} - \tau_{o2}, \dots, \tau_{am} - \tau_{om})$$

$$J = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n} \quad (3)$$

$$T_0 = \text{diag}(\tau_{o1}, \tau_{o2}, \dots, \tau_{on})$$

여기서,  $\tau_{ij}, \tau_{oi}$ 는 각각  $i$ 번째 측정시  $j$ 번째 마스크의 투과, 비투과율을 나타낸다. PDLC 전자광학 마스크의

경우 투과율은 0.8정도이고, 비투과율은 0~0.1정도이다. 추정치 수식으로부터 스펙트럼 추정치는 식 (4)과 같이 정의한다.

$$\hat{\eta} = (\nabla W^T)^{-1} \eta \quad (4)$$

평균 MSE는 식 (5)와 같이 정의한다.

$$\epsilon = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\hat{\psi}_{ij} - \psi_{ij})^2 \quad (5)$$

## 2.2 3번 부호화한 하다마드 변환 영상 분광계

그림 2는 하다마드 변환 분광계에 마스크 제어행렬로 좌순환 단순행렬을 사용하는 3번 부호화한 하다마드 변환 영상 분광계를 나타낸다.

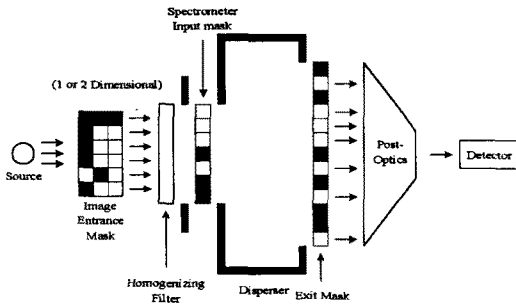


그림 2. 3번 부호화한 하다마드 변환 영상 분광계의 개요도

입력부의 2차원 영상 마스크의 투과율  $\hat{P}$ 과 출력부의 그릴 분광계의 마스크 투과율  $\hat{N}$ 을 이용한 추정치는 식 (6)과 같다.

$$\eta = \hat{P} \hat{\phi} \hat{N}^T + e \quad (6)$$

여기서, 실제치, 추정오차, 입·출력부 마스크 투과율 행렬의 차원은  $(n \times n)$ 으로 가정하였다. 입력부는 공간 영역에 따라 다른 스펙트럼 정보를 갖는 시료에 대해 공간 정보를 부호화하고, 출력부는 스펙트럼 정보를 부호화한다. 식 (2)를 사용하여 입·출력부의 마스크 투과율은 식 (7)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \hat{P} &= PT = P(D + P^{-1}JT_0) \\ \hat{N} &= \hat{V}W^T = VTW^T = V(D + V^{-1}JT_0)W^T \end{aligned} \quad (7)$$

여기서, P, V, W는 마스크 제어행렬인 좌순환 단순행렬인 S로 대체된다. 마스크가 이상적인 투과율 특성을 지닐 경우  $T=I$ 로 대체된다. 본 논문에서는 전자광학마스크의 비이상적인 투과율 특성을 고려하여 스펙트럼 복원법으로 개선된  $T^{-1}$  기법을 제안한다.

## 2.3 $T^{-1}$ 기법

3번 부호화한 하다마드 변환 영상 분광계의 입력부의 2차원 영상 마스크와 출력부의 그릴 분광계의 입력부의 1차원 마스크는 전자광학 마스크를 사용하므로 마스크의 비이상적인 투과율 특성을 고려하여야 한다. 마스크의 비이상적인 특성을 고려한 스펙트럼 복원법으로는 하다마드 변환 분광계에 사용하는  $D^{-1}, T^{-1}$  기법이 제시되었다[3].  $D^{-1}$  기법은 식 (7)에서 D 행렬과 마스크 제어행렬의 역

행렬을 추정치의 양변에 취하여 추정치를 구하는 방법이다 [2,3]. 식 (7)을 식 (6)에 대입하여 전개하면 식 (8)과 같다.

$$\begin{aligned} \eta &= S(D + S^{-1}JT_0)\phi(S(D + S^{-1}JT_0))^T + e \\ &= SD\phi SD^T S^T + b_{wv} + b_{pw} + b_w \end{aligned} \quad (8)$$

여기서,  $b_{wv}, b_{pw}, b_w$ 는 별도의 측정을 통해 얻는 부측정 값으로  $b_{wv}$ 는 영상 마스크를 모두 off한 뒤, 그릴 분광계의 각 마스크를 정해진 패턴에 따라 순환하여 측정하고,  $b_{pw}$ 는 그릴 분광계의 입력 마스크를 모두 off한 뒤, 나머지 마스크들을 각 패턴에 따라 순환하여 측정하고,  $b_w$ 는 영상 마스크와 그릴 분광계의 입력 마스크를 off하고 그릴분광계의 출력 마스크만을 순환하여 측정한다. 각각의 부측정은 식 (9)와 같다.

$$\begin{aligned} b_{wv} &= JT_0\phi S(DS^T + T_0J) = JT_0\phi W \hat{V}^T \\ b_{pw} &= (SD + JT_0)\phi ST_0J = \hat{P}\phi WT_0J \\ b_w &= JT_0\phi ST_0J = JT_0\phi WT_0J \end{aligned} \quad (9)$$

부측정시 측정잡음을 고려하여 식 (10)와 같이  $\eta'$ 을 정의한다.

$$\begin{aligned} \eta' &= \eta - \hat{b}_{wv} - \hat{b}_{pw} + \hat{b}_w \\ &= SD\phi SD^T S^T + e' \end{aligned} \quad (10)$$

식 (10)로부터 수정  $D^{-1}$  기법에 의한 스펙트럼 추정치는 식 (11)과 같다.

$$\hat{\eta} = D^{-1}S^{-1}\phi'(S^T)^{-1}(D^T)^{-1}S^{-1} \quad (11)$$

식 (10)과 식 (11)으로부터 식 (5)를 이용하여 평균 MSE를 구한다.

전자광학 마스크의 비이상적인 특성을 고려한 스펙트럼 복원법으로 최소 평균 MSE를 지니는 방법으로  $T^{-1}$  기법이 있다. 이를 본 시스템에 적용한 수정  $T^{-1}$  기법에 대해 알아보자. 식 (2)에서 마스크 투과율 특성행렬에서 마스크가 비이상적인 경우에는  $T \neq I$ 이다. 식 (6)에 식 (7)의 입·출력부 마스크 투과율 행렬을 대입한 추정치는 식 (12)와 같다.

$$\eta = PT\phi(VTW^T)^T + e \quad (12)$$

여기서, 입력 영상 마스크와 출력부의 입·출력 마스크 제어행렬로 좌순환 단순행렬을 사용하므로 P, V, W는 S 행렬로 대체한다. 좌순환 단순행렬은  $S = S^T$ 이 성립하므로 식 (12)로부터 스펙트럼 추정치는 식 (13)과 같다.

$$\hat{\eta} = T^{-1}S^{-1}\eta S^{-T}T^{-1}S^{-1} \quad (13)$$

식 (13)에서 전달행렬의 역행렬은 식 (14)와 같다 [3].

$$T^{-1} = D^{-1} - q D^{-1} JT_0 D^{-1} \quad (14)$$

여기서,  $q = \frac{2}{(n+1) + 2 \sum_{j=1}^n \frac{r_{0j}}{d_{jj}}}$ 이다.

식 (5)와 식 (13)으로부터 수정  $T^{-1}$  기법의 평균 MSE는 식 (14)와 같다[5].

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\hat{\psi}_{ij} - \psi_{ij})^2 \\ &= \frac{\sigma^2}{n^3} \frac{\text{Trace}[\mathbf{T}^{-1}\mathbf{S}^{-1}(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{S}^{-1})^T]}{\text{Trace}[\mathbf{S}^{-T}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{S}^{-1}(\mathbf{S}^{-T}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{S}^{-1})^T]} \end{aligned} \quad (14)$$

### 3. 모의실험 및 결과고찰

마스크가 이상적인 투과율 특성을 지닐 경우, 전달행렬은 같은 크기의 단위행렬이므로, 마스크 투과율 행렬은 마스크 제어행렬인 좌순환 단순행렬로 대치한다. 본 논문에서 적용한 시스템은 비이상적인 마스크 투과율 특성을 갖는 전자광학 마스크를 입력부와 그릴 분광계의 입력부에 사용하므로 비이상적인 마스크 투과율 특성을 고려한 스펙트럼 복원법을 사용하였다.

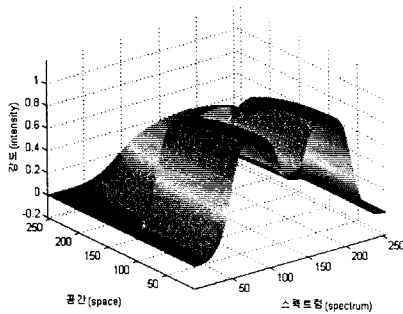


그림 3. 입력 스펙트럼

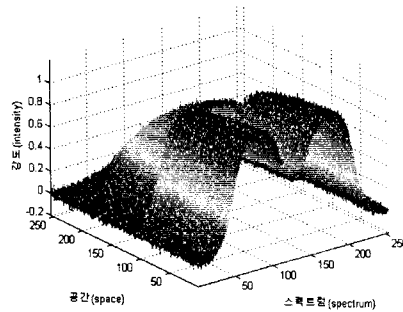


그림 4. 수정 D<sup>-1</sup>기법에 의한 스펙트럼 추정치

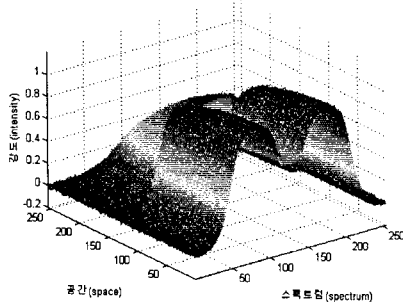


그림 5. 수정 T<sup>-1</sup>기법에 의한 스펙트럼 추정치

그림 3과 같이 공간영역에 대해 다른 스펙트럼 정보를 갖는 시료에 대해 제시한 수정 D<sup>-1</sup>기법과 수정 T<sup>-1</sup>기법의 의한 모의 실험을 실시하였다. 가상 시료는 공간영역 255이며 측정잡음의 평균은 0, 분산은 10으로 가정하였다. 그림 4는 수정 D<sup>-1</sup>기법에 의해 3번 부호화한 하다마드 변환 영상 분광계의 스펙트럼 추정치를 나타내

고 그림 5는 수정 T<sup>-1</sup>기법에 의한 스펙트럼 추정치를 나타낸다. 결과에서 수정 D<sup>-1</sup>기법은 수정 T<sup>-1</sup>기법에 비해 스펙트럼 복원 능력이 떨어진다. 표 1은 각각의 복원법에 대한 평균 MSE를 나타낸다. 제안된 수정 T<sup>-1</sup>기법의 평균 MSE가 수정 D<sup>-1</sup>기법에 비해 평균 MSE가 월등히 개선됨을 알 수 있다. 또한, 수정 T<sup>-1</sup>기법은 수정 D<sup>-1</sup>기법에서의 부족점을 할 필요가 없다는 단점을 지니고 있다. 그러나, T<sup>-1</sup>기법은 D<sup>-1</sup>기법에 비해 스펙트럼 추정치를 계산할 때 연산수가 많다는 단점을 갖고 있으며, 식 (14)에서 마스크의 크기가 크면, T<sup>-1</sup>=D<sup>-1</sup>로 대체된다[3]. 그러나, 마스크의 크기가 작은 경우는 T<sup>-1</sup>기법이 D<sup>-1</sup>기법에 비해 월등히 작은 평균 MSE를 갖는다.

표 1. 평균 MSE 비교

	수정 D <sup>-1</sup> 기법	수정 T <sup>-1</sup> 기법
평균 MSE	1.1767e-07	4.8646e-09

### 4. 결 론

3번 부호화한 하다마드 변환 영상 분광계는 입력부에서 영상 마스크로 한 번의 부호화를 수행하고, 출력부의 그릴 분광계의 입·출력 마스크에서 각각 한 번의 부호화를 수행함으로써 전체적으로 3번의 부호화를 수행한다. 제시된 시스템의 영상 마스크와 그릴분광계의 입력 마스크는 전자광학 마스크를 사용하므로 마스크의 투과율 특성을 고려해 주어야 한다. 마스크 제어행렬 좌순환 단순행렬을 사용하여 스펙트럼 추정치를 구하는 후처리 과정이 간단해진다. 마스크의 비이상적인 투과율 특성을 고려한 스펙트럼 복원법으로 수정 T<sup>-1</sup>은 수정 D<sup>-1</sup>기법에 비해 훨씬 작은 평균 MSE를 지니므로 개선된 신호 대잡음비를 획득할 수 있는 복원법이다. 그러나, 스펙트럼 추정치를 구하는 과정의 연산수가 증가하므로 마스크의 크기가 작은 경우 보다 정확한 스펙트럼을 복원하고자 할 때 사용하는 것이 바람직하다.

본 논문은 1997년도 한국학술진흥재단 지원에 의한 결과입니다.

### [참 고 문 헌]

- [1] M. Harwit and N. J. A. Sloane, *Hadamard Transform Optics*, Academic Press, New York, 1979.P
- [2] 박진배, 박대연, 진승희, 주진만, "하다마드 트랜스폼 이미징 스펙트로미터에 관한 연구", *대한전기학회지*, Vol. 48, No. 5, pp. 571-579, 1999. 5.
- [3] J. B. Park, T. W. Johnson, S. A. Dyer, B. K. Harms, and R. A. Dyer, "On the Mean Square Error of Various Spectrum-Recovery Techniques in Hadamard Transform Spectrometry", *Applied Spectroscopy*, Vol 44, No. 2, pp. 219-228, 1990.
- [4] B. K. Harms, R. A. Dyer, S. A. Dyer, T. W. Johnson and J. B. Park, "An Introduction to Hadamard Spectroscopy and the Multiplex Advantage", *IEEE IMTC/89 Conference Record*, pp. 434-438 1989.
- [5] S. A. Dyer, B. K. Harms, J. B. Park, T. W. Johnson, and R. A. Dyer, "A Fast Spectrum Recovery Method for Hadamard Transform Spectrometers Having Nonideal Mssks", *Applied Spectroscopy*, Vol. 43, No. 4, pp. 435-440, 1989.