

## 도립진자의 스윙업 제어기 설계

권 요한, 최 원호, 김 범수, 임 묘택  
고려대학교 전기공학과

### Design of a Swing Up Controller for Inverted Pendulum System

Yo-Han Kwon, Won-Ho Choi, Beom-Soo Kim, Myo-Taeg Lim  
Dept. of Electrical Engineering, Korea University

**Abstract** - In experiment, a real inverted pendulum system has state constraints and limited amplitude of input. These problems make it difficult to design a swing-up controller. To overcome these problems, we design a sliding mode controller considering physical behaviour of the inverted pendulum system. This sliding mode controller uses a switching control action to converge along a specified path derived from energy equation from a state around the path to desired states(standing position). And optimal control method is used to guarantee stability at unstable equilibrium position. The designed controller can be applied to all inverted pendulum systems regardless of the values of their parameters. Compared with previous existing controllers, it is simple and easy to tune. Experimental results are given to show the effectiveness of this controller.

#### 1. 서 론

도립진자는 제어를 하지 않으면 안정한 균형점으로 수렴하는 특성을 가지고 있는 비선형 계통이다. 기존에 발표되었던 도립진자에 대한 연구는 제어를 설계함에 있어서 입력에는 제한이 있었지만 상태에 대한 제한 조건은 없었다. 도립진자에서 상태라 함은 진자의 각도나 수레의 이동거리를 의미하는데, 실제 도립진자 계통을 구성함에 있어서 수레의 이동거리에는 항상 제한이 있게 된다. 이러한 제한 조건은 제어기 설계시 반드시 고려되어야만 한다. 특히 수레의 이동거리에 제한이 있으면, 진자의 각도를 목표점에 수렴시키기까지의 시간이 길어지며, 또한 수레의 위치에 따라 제어입력에 대한 계산이 다르게 되어야만 한다.

실제실험에 적용되었던 기존의 여러 스윙업 제어방식은 기본적으로 수레의 이동거리에 대한 제약조건이 없었고, 있더라도 50cm이상의 큰 범위를 갖는 것이 일반적이었다. ([2], [3]) 본 논문의 주목적은 수레의 이동거리가 극도로 제한(15cm 이하)된 상태에서 제어가 가능하며, 목표점에 도달한 후에 외부 외란에 의해 쓰러질 경우에도 다시 스윙업 제어가 가능한 제어기를 설계하는 것이며, 실제 실험에서 존재하는 모델링 오차나 센서 잡음과 같은 불확실성에 대해서도 견실한 제어성능을 갖는 제어기를 설계한다. 또한 설계된 제어기를 실제 실험에 적용하여 이 제어기의 성능을 보인다.

#### 2. 본 론

##### 2.1 도립진자 계통에 대한 비선형 모델

실제 실험에서 사용된 도립진자 계통은 그림 1과 같

은 수레형태를 갖고 있다.

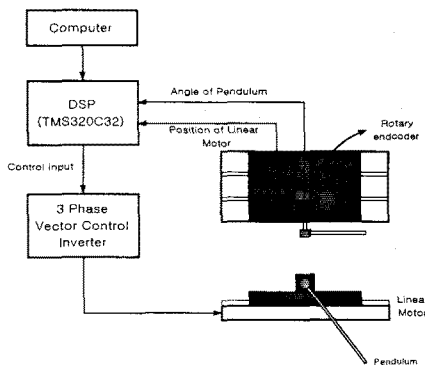


그림 1. 도립진자 계통의 구성도

도립진자의 수레 역할을 리니어 모터가 대신하였으며 리니어 모터의 엔코더와 진자의 각도측정을 위한 로타리 형태의 엔코더의 출력이 DSP보드로 입력되며, 컴퓨터로부터 DSP로 다운로드된 프로그램에 의해 제어입력이 결정된다. 이렇게 결정된 제어입력은 인버터를 통해 리니어 모터의 입력에 맞도록 변환되어 모터에 들어오게 된다.

이와 같은 도립진자에 대한 운동방정식은 다음과 같은 비선형 미분방정식의 형태로 표현되며, 각 계수와 변수에 대한 정의는 표 1과 같다.

$$\begin{aligned} (m_c + m_1)\ddot{x} + m_1 l \cos \theta \ddot{\theta} - m_1 l \sin \theta \dot{\theta}^2 + v\dot{x} &= f \\ m_1 l \cos \theta \ddot{x} + (m_1 l^2 + J)\ddot{\theta} - m_1 l g \sin \theta + C\dot{\theta} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

식 (1)로부터 비선형 상태방정식을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{d}{dt} X = F(X, t) + B(X)u \quad (2)$$

여기서, 상태변수행렬과 입력은 다음과 같이 정의된다.

$$X = [x \ \theta \ \dot{x} \ \dot{\theta}]^T, \quad u = f$$

$C = 30 \text{ kg/s}$	수레의 마찰계수
$v = 0 \text{ Nms}$	진자의 회전마찰계수
$J = 0.00117 \text{ kgm}^2$	진자의 관성모멘트
$m_c = 2.5 \text{ kg}$	수레의 무게
$m_1 = 0.088 \text{ kg}$	진자의 무게
$l = 200 \text{ mm}$	진자의 무게중심까지의 길이
$f$	수레에 가해지는 힘
$x$	수레의 이동거리
$\theta$	진자의 각도

표 1. 도립진자계통의 계수 및 변수

## 2.2 최적제어기 설계

식 (2)와 같이 표현되는 비선형 도립진자 계통은  $\theta=0$  부근에서 선형화가 가능하다. 이 결과를 상태방정식 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\dot{X} = AX + Bu \quad (3)$$

여기서

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & m_1 l g n_{12} & -v n_{11} & -C n_{12} \\ 0 & m_1 l g n_{22} & -v n_{21} & -C n_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ n_{11} \\ n_{21} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} m_c + m_1 & m_1 l \\ m_1 l & m_1 l^2 + J \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{bmatrix}$$

또한, 제어입력  $u$ 는 수레에 인가되는 힘을 의미한다.

최적제어기설계는 식 (3)의 모델을 바탕으로 하여 다음과 같은 평가지수를 최소화시키는 입력이 되도록 최적의 상태궤환이득을 구한다.

$$J = \int_0^{\infty} (X^T Q X + u^T R u) dt \quad (4)$$

여기서  $Q$ 와  $R$ 은 각각 상태 벡터의 가중치 행렬과 입력 벡터의 가중치 행렬로서 상태벡터와 입력벡터에 대한 가중치를 정할 수 있는 행렬이며, 항상 양의 정부호 행렬 (positive definite symmetric)이어야 한다.

평가지수를 최소화시키는 제어입력  $u$ 는 다음과 같은 대수 Riccati 방정식의 해  $P$ 를 구함으로써 최적의 상태 궤환 이득을 구할 수 있다.

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (5)$$

$$u = -R^{-1}B^T P X \quad (6)$$

본 논문에서 사용하고자 하는 도립진자 계통은 수레의 이동거리가 극도로 제한되어 있는 계통이기 때문에 제어기를 설계할 때 수레의 이동거리를 충분히 고려해야만 한다. 따라서 평가지수의 가중치 행렬의 변화에 따른 결과를 관찰하여 최적의 가중치 행렬을 정하였고, 이를 이용한 상태궤환이득은 다음과 같다.

$$Q = \begin{bmatrix} 5000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R = 1$$

$$u = -R^{-1}B^T P X = [70.7107 \ 203.3644 \ 88.8864 \ 33.4018] X \quad (7)$$

제어입력 (7)은 목표점 ( $\theta=0$ )부근에서 선형화된 모델을 바탕으로 설계되었기 때문에 오직  $\theta = \pm 10^\circ$  내에서만 의미를 가질 수 있다.

## 2.3 슬라이딩 모드 제어기 설계

진자를  $180^\circ$ 의 안정한 균형점에서  $0^\circ$ 의 불안정한 균형점으로 스윙업하기 위해 기존에 사용되었던 방법들은 주로 퍼지 제어기나 슬라이딩 모드 제어기와 같은 비선형 제어기나 지능제어기가 많이 사용되었고 보다 간단한 방법으로는 Alan Bradshaw의 의한 방법으로 진자의 각속도에 이득을 곱하여 궤환시킴으로서 진자의 운동 에너지를 증가시키는 방법이 있었다. [1] 이런 방법들은 수레의 이동거리가 15cm이하로 짧을 때에는 진자를  $90^\circ$  이상으로 올릴 만한 충분한 에너지를 얻기가 어려워 limit cycle에 빠지게 되는 현상을 볼 수 있다. 여기서는 물리적인 개념을 기초로 하여 진자의 비선형 진동에 맞추어 수레에 힘을 가하는 형태로 진자를 안정한 균형점에서 발산시켜준다. 발산된 진자는 에너지 방정식에 의해 계산된 최적의 상태궤환에 근접하게 되며 슬라이딩 모드 제어기에 의해 상태궤환에 수렴하게 된다. 상태궤환은 목표점에서 항상 진자의 각속도가 0에 가깝게 설계되어 있기 때문에 최적제어로 전환이 가능하다.

## 2.3.1 초평면(hyperplane) 설계

진자에 대한 위치에너지와 운동에너지는 다음과 같이 표현이 가능하다. [4]

$$E = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta \quad (8)$$

진자가 수직방향으로 서 있을 때의 위치에너지는  $E = mgl$ 이므로 이 값을 원점으로 정규화 (normalization)하면 다음과 같은 진자에 대한 에너지 방정식을 얻을 수 있다.

$$E = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + mgl(\cos \theta - 1) \quad (9)$$

즉  $E=0$ 일 때 제어입력이 없다면 무한시간 내에 진자는 수직방향으로 서게 된다. 따라서  $E=0$ 일 때의 상태궤환 방정식을 유도할 수 있다.

$$0 = \sqrt{2(1 - \cos \theta)} \operatorname{sign}(\sin \theta) + \sqrt{\frac{J}{mgl}} \dot{\theta} \quad (10)$$

여기서,  $y = \operatorname{sign}(x) = \begin{cases} x > 0: & y = 1 \\ x = 0: & y = 0 \\ x < 0: & y = -1 \end{cases}$  라

정의한다.

이와 같이 유도된 상태궤환 방정식의 의미는 상태궤환 위에 존재하는 모든 상태는 항상 목표점에 수렴할 수 있다는 것이므로 이를 슬라이딩 모드 제어기의 초평면으로 정의 할 수 있다. 따라서 초평면이 다음과 같은 식으로 나타낸다.

$$s = \sqrt{2(1 - \cos \theta)} \operatorname{sign}(\sin \theta) + \sqrt{\frac{J}{mgl}} \dot{\theta} \quad (11)$$

## 2.3.2 슬라이딩 모드 제어기

일반적인 슬라이딩 모드 제어기는 정의된 상태공간 내의 모든 상태를 초평면에 수렴시킬 수 있는 제어입력을 구하는 것이다. 그러나 본 논문에서는 수레의 이동거리가 제한되어 있기 때문에 일정구간에서만 원하는 제어입력을 사용할 수 있다. 이러한 이유로 초평면으로 수렴시킬 수 있는 제어입력의 구간도 제한되기 때문에 정의된 상태공간 내의 모든 상태에 대해 초평면으로 수렴시킬 수 있는 제어입력을 구하는 것이 불가능하다. 여기서는 초평면 근처에서 다음과 같은 Lyapunov함수를 만족시키는 제어입력을 구하였다.

$$v = \frac{1}{2} s^T s$$

$$\dot{v} = s^T \dot{s} = s^T \frac{\partial s}{\partial X} \dot{X} \quad (12)$$

$$= s^T G(F(X, t) + B(X)u)$$

여기서  $G = [0 \ | \ \cos(\theta/2) \ | \ 0 \ \sqrt{J/(m_1 g l)}]$ 이다.

이를 만족시키는 제어입력은 다음과 같다.

$$u_s = -k_s \operatorname{sgn}(\cos \theta \cdot \sin \theta) \operatorname{sat}((s - 2\sqrt{2(1 - \cos \theta)} \operatorname{sign}(\sin \theta))/\phi) \quad (13)$$

여기서

$$y_1 = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} x \geq 0: & y_1 = 1 \\ x < 0: & y_1 = -1 \end{cases}$$

$$y_2 = \operatorname{sat}\left(\frac{x}{\phi}\right) = \begin{cases} x > \phi: & y_2 = 1 \\ x < -\phi: & y_2 = -1 \\ -\phi \leq x \leq \phi: & y_2 = x/\phi \end{cases}$$

와 같이 정의된다.

그럼 2와 그림 3은 스윙업제어를 위해 식 (13)을 사용하고, 목표점 부근에서는 식 (7)을 적용한 모의실험 결과이다. 수레의 이동거리는 16cm이하로 제한되어 있고, 도립진자계통의 각 계수는 표 1의 값을 사용하였다. 진자는 상태궤환을 따라 약 2.5초만에 목표점에 수렴하며 수레는 16cm이내에서 이동하는 것을 볼 수 있다.

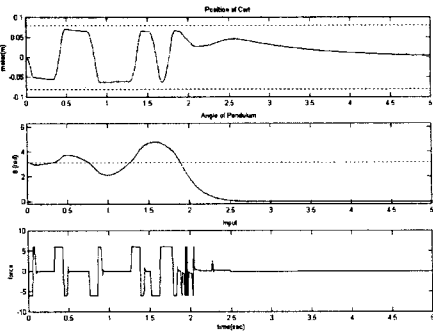


그림 2. 모의실험 결과

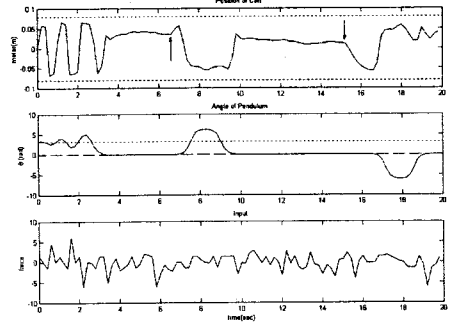


그림 5. 외부외란이 존재할 경우

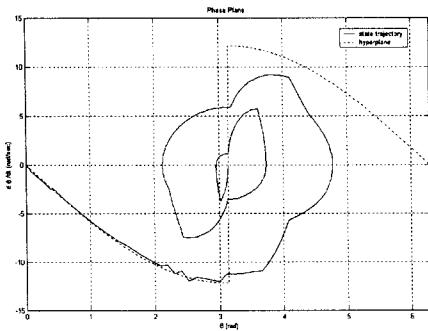


그림 3 상태궤적(Phase plane)

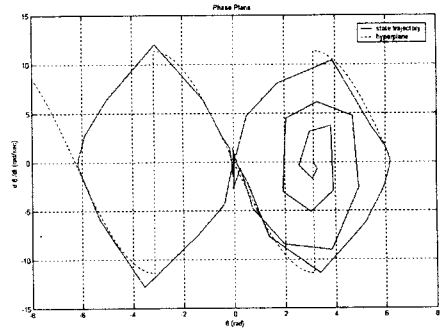


그림 6. 외부외란이 존재할 때의 상태궤적

## 2.4 실험결과

실험은 그림 1의 구조를 갖는 도립진자를 이용하여 수행하였다. 먼저 그림 4는 2.2절과 2.3절에서 설계된 제어기를 사용한 결과이다. 결과는 약 3.5초만에 목표점에 도달하는 것을 볼 수 있다.

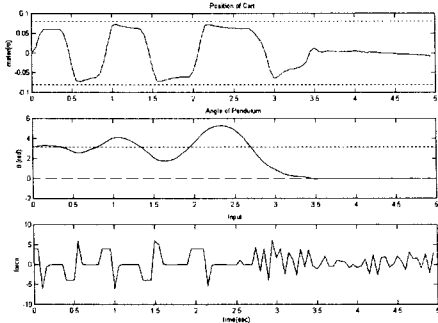


그림 4. 외부외란이 없을 경우

그림 5와 그림 6은 20초 동안의 결과로서 목표점에 수렴한 후 외부 외란이 가해졌을 때의 결과이다. 그림 4를 보면 외부 외란은 6.5초와 15초 정도에서 가하여 주었다. 외부 외란이 인가되었을 때 도립진자는 목표점으로부터 떨어져 불안정해 지지만 상태궤적을 따라 한번의 스윙만에 다시 목표점에 수렴하여 안정화됨을 볼 수 있다.

## 3. 결 론

본 논문에서는 수레 형태의 도립진자 계통에 대한 스윙업 제어기를 설계하고, 실제 실험에 적용하여 제어기의 성능을 증명하였다. 여기서 사용된 도립진자는 상태 변수에 제한조건이 있기 때문에 항상 설계된 초평면으로 수렴할 수 있는 일반적인 제어입력을 구할 수 없다. 이러한 문제를 해결하기 위하여 도립진자의 운동특성을 고려하여 제어입력을 구하였다. 이 제어입력은 초평면 부근에서 식 (12)의 Lyapunov함수를 만족시키기 때문에  $\theta$ 와  $\dot{\theta}$ 를 초평면으로 수렴시킬 수 있었다. 본 제어기의 장점은 스윙업 제어입력이 도립진자 계통의 파라미터에 관계없이 때문에 실제 도립진자계통의 불확실한 파라미터에 영향을 받지 않으며 간단하기 때문에 실제 계통에 적용하였을 때 연산속도의 향상을 기할 수 있었다.

## [참 고 문 헌]

- [1] A. Bradshaw and J. Shao, "Swing-up control of inverted pendulum systems", *Journal of Robotica*, 14, 397-405, 1995.
- [2] H.N. Iordanou and B.W. Surgenor, "Experimental evaluation of the robustness of discrete sliding mode control versus linear quadratic control", *IEEE Trans. On Control System Technology*, 5(2), 254-260, 1997.
- [3] Takeshi Kawashima, "Swing up and stabilization of inverted pendulum using only one sliding mode controller with nonlinear model observer", *MOVIC'98*, 97-102, 1998.
- [4] K. J. Str and K. Furuta, "Swinging up a pendulum by energy control", *Proc. of 13th Congress of the IFAC*, 683-688, 1996.