

전류원을 포함한 대형 수동회로망의 도형적 해석

황 재 호
대전산업대학교 전자공학과

A Geometric Analysis of Large-scale Passive Network Including Current Sources

Hwang Jae-ho
Taejeon National University of Technology

Abstract - 전류원을 포함한 대형회로망의 컴퓨터적 해법을 위한 도형적 접근 방법을 제시하였다. 기본적인 회로망 해석법으로 망로해석법을 사용하였고, 전류원은 등가변환이 어려운 병렬 임피던스가 없는 경우로 한정하였다. 방향성 그래프의 기하학적 작도와 전류원 전류 흐름도 작성에 의해 회로망 행렬을 구성하였다.

1. 서 론

대형회로망은 해석적 방법이 아닌 기하학적 도형화 작업을 통해 행렬을 구성하고 컴퓨터에 의해 해석한다. 회로의 기본 법칙들을 도형 구성에 맞게 적용하여 하나의 배열을 이끌어 낸다. 이 과정에서 복잡한 회로망에 일단은 종래의 회로 법칙들을 적용하여 수많은 수식들로 이루어진 회로 방정식을 수립한 다음, 그 방정식들로부터 기하적 도형화 작업의 원리와 법칙을 찾아낸다. 어떠한 회로 법칙을 적용하느냐에 따라 최종 수식이 복잡하게 되고 간단하게도 된다. 가장 효과적인 방법은 회로 해석 원리보다는 회로망 도형과 수식을 간략화함에 달려 있다. 회로가 복잡해지고 다수의 망로(loop)가 서로 얽혀 있으며, 전압원과 전류원 및 수동소자들이 무수히 존재할 때, 이 회로망에 회로 법칙들을 적용하여 각 망로나 마디(node)에 대하여 일일이 수식을 이끌어 내어 종합적인 수식을 이끌어 내기란 그리 쉬운 작업이 아니다. 여기에는 필연적으로 기하학적인 또는 도식적인 접근이 필요하다. 이러한 시도에 의해 몇 가지 간단한 과정을 거쳐 종합적인 수식을 이끌어 내는 기법들이 가끔 소개되었다.^{1),2),3)} 회로망 도형을 작도되고, 마디와 가지를 설정한 후 도형이 갖고 있는 도형적 특징을 회로 법칙과 적절히 접목시켜 수식을 도출하여 행렬로 정리하는 몇 가지 방법들이 제시되기도 하였다. 모든 회로망에 보편적으로 사용 가능한 기법은 아직 제시된 바가 없고, 각 경우에 적합한 기법들이 고안되었다.

본 연구에서는 전류원과 전압원이 혼재되어 있는 대형 회로망에 망로해석법을 적용하여 기하학적 도식화를 통한 수식을 도출하는 기법을 고안하였다. 전압원 주도적 회로망에 유용한 망로해석법을 전류원 처리에 사용하는 방법으로, 기존의 방법은 병렬 임피던스를 갖고 있는 전류원의 전압원으로의 등가 변환에 대부분 의존하였었다. 전류원에 병렬로 임피던스가 연결되어 있는 경우, 이를 전압원과 직렬 임피던스로 등가 변환이 가능하다. 그러나 전류원에 병렬임피던스가 없고 다른 전압원이 함께 있는 회로를 해석하려면 별도의 회로 법칙을 사용하여 매우 복잡한 수식을 전개해야 하였다. 이를 기하학적 도형으로 접근하려는 것이 이 글을 쓰는 목적이다. 일차적으로 회로망을 기하학적으로 도형화한 다음, 회로망에 내재된 망로들을 선정하였으며, 전류원이 있는 가지(branch)를 제외한 각 망로의 대표 전류를 설정한 다음, 전류원 전류로 선회하는 최단거리 궤적에서 회로망 수식에 필요한 방정식과 행렬을 도출하였다.

2. 본 론

망로해석법을 전압원과 수동소자로 구성된 대형 회로망 해석에 주로 사용되는 기법이다. 이러한 회로망에 전류원이 내재되는 경우 망로해석법을 적용하는 방법은 다음 세 가지가 있었다. 하나는 전원의 등가 변환에 의한 방법으로서, 전류원과 병렬 연결된 임피던스가 있을 때만 가능하였다. 둘째는 전류원 전류가 유출입되는 마디에 키르히호프의 전류법칙(KCL)을 적용하여 각 마디의 전류분포를 구한 다음, 설정된 망로에 키르히호프의 전압법칙(KVL)으로 회로망 수식을 세우는 방법이다. 셋째는 전류원에 해당되는 전압을 가정한 후 수식들 상호간 계산에 의해 이 전압원을 소거하고, 최소의 수식으로 망로해석법(loop analysis)에 의한 방정식을 수립하는 기법이다.⁴⁾⁵⁾

이와같은 종래의 기법들은 거의 필산에 의한 많은 수작업을 수반할 뿐만 아니라, 해법 자체가 단순한 회로에 국한되어 있어서 대형 회로망에 그대로 적용하기에는 무리가 있었다. 망로해석법에서의 단독 전류원처리는 다음에 소개하는 기하학적 도식화 작업에 의해 해결 가능하다.

2.1 문제의 제기

망로해석법에서의 기하학적 해석에 의한 단독 전류원 처리에는 다음 몇 가지 선결 문제가 있다. 첫째는 회로망 행렬의 차수를 결정하는 보목가지의 수에 단독 전류원이 있는 가지를 포함시킬 것인가의 문제이다. 둘째는 망로 전류(loop current)의 개념의 계속적인 사용 여부이다. 셋째는 회로망 행렬에서 전류원 전류값이 위치하는 개소의 결정이다.

2.1.1 가지 수의 참여 여부

전류원 포함 가지의 전체 기하학 도형의 참여 문제는 다음의 간단한 회로 해석을 통해 판별 가능하다.

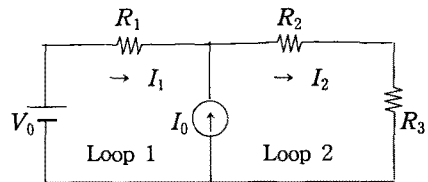


그림 2-1 전류원이 내재된 회로

위 회로에서 전류원 I_0 의 전압을 V_c 로 가정하고 두 개의 단독 망로에 키르히호프의 전압 법칙을 적용한다.

$$\text{Loop 1: } R_1 I_1 + V_c = V_0 \quad (2.1)$$

$$\text{Loop 2: } (R_2 + R_3) I_2 = V_c \quad (2.2)$$

위 두 식에서 V_c 를 제거한다.

$$R_1 I_1 + (R_2 + R_3) I_2 = V_0 \quad (2.3)$$

$I_2 = I_0 + I_1$ 이므로 이로써 식 (2.3)을 정리하면, 두 개의 망로는 하나의 수식이 되고 전류원 부분은 망로의 수에서 배제된다.

$$(R_1 + R_2 + R_3) I_1 = V_0 - (R_2 + R_3) I_0 \quad (2.4)$$

위 식 (2.4)만을 가지고 회로를 구성하면 다음 그림과 같다. 하나의 망로와 하나의 전류 I_1 으로 회로가 구성된다.

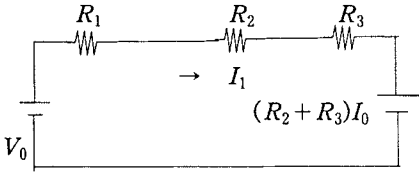


그림 2-2 간략화된 회로

2.1.2 망로대표전류

위 그림에서 전류원은 저항 R_2, R_3 를 포함한 전압원으로 변환되고, 전류 I_1 은 전류원이 제거된 망로를 대표하는 전류가 된다. 이와같이 단독 전류원을 포함하고 있는 가지를 제거하고 재구성된 망로의 전류를 망로대표전류로 정의한다.

2.1.3 회로망 행렬에서 전류원 값의 개소

앞의 식 (2.4)는 전류원 값의 수식적 위치를 보여주고 있다. 그 값들은 어떤 임피던스와 곱하여져 전압의 형태가 되고 수식의 우변에 일반 전압원과 함께 위치한다. 망로해석법에 의한 회로망 기하학적 도형에서의 행렬에서 전압원 행렬은 등식의 우변에 위치하였다. 전류원 값도 수식 전개상 전압원들과 함께 있으므로 마찬가지로 행렬 수식의 등식 우변에 전압원 값들과 함께 위치한다.

$$\begin{pmatrix} \text{임피던스} \\ \text{행렬} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{망로전류} \\ \text{행렬} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{전원} \\ \text{행렬} \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

이상의 사실을 정리하면 다음과 같다.

첫째, 전류원 단독 가지는 회로 해석을 결정하는 수식 수의 결정에서 제외된다.

둘째, 전류원이 포함된 가지가 제거된 망로의 망로 전류를 망로대표전류로 정의한다.

셋째, 전류원 전류값은 저항과 곱의 형태를 취하면서 회로망 수식 행렬의 등식 우변에 위치한다.

2.2 기하학적 도형화

대형회로망의 기하학적 도형은 기본적으로 마디와 가지로 구성된다. 단독 전류원을 갖고 있는 회로망은 두 개의 도형을 갖는다. 하나는 전류원을 포함하고 있던 가지가 제거된 도형이고, 다른 하나는 전류원 전류의 흐름 경로를 나타내는 도형이다.

2.2.1 전류원 포함 가지가 제거된 도형

앞 단원에서 살펴보았듯이 전류원을 포함하였던 가지는 회로 해석에서 제거되었고 해당 망로전류는 망로대표전류로 대체되었다. 그림 2-2와 식 (2.4)의 좌변에서 알 수 있듯이 새로 구성된 회로망은 망로대표전류에 의해 망로를 선회하면서 수식을 수립한다. 수식의 좌변은 전형적인 망로해석법의 임피던스 행렬을 형성한다.

2.2.1 전류원 흐름 경로 도형

앞의 그림 2-1에서의 전류원 전류는 간략화된 그림

2-2에서 저항 R_2 와 R_3 의 합과 곱해져서 하나의 전압원을 형성하였다. 이때 전류원 전류의 경로를 다음 그림 2-3처럼 선정한 경우, 그 전류가 선회하면서 걸쳤던 저항들의 곱들의 합인 전압강하로 대체할 수 있음을 보여준다.

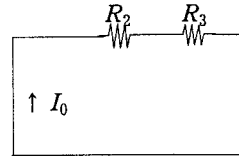


그림 2-3

이와같이 구한 전압강하는 식 (2.4)의 우변처럼 전압원과 함께 위치하고, 이 수식이 더할수록 전체 방정식의 우변들은 하나의 전원 행렬을 형성한다.

이러한 사실을 다음과 같은 과정을 통하여 등가 변환이 어려운 전류원이 내재된 회로망 해석의 도형적 접근을 시도할 수 있다.

- 단계 1) 본래의 회로망에서 전류원이 있는 가지를 제거한 회로망 도형을 작도한다.
- 단계 2) 전류원을 포함한 도형에서 각 전류원 전류가 지나가는 최단거리의 전류원 흐름 경로 도형을 작도한다.
- 단계 3) 단계 2에서 그 전류값과 저항을 곱하고 전압강하의 극성을 기록한다.
- 단계 4) 단계 2의 전류원 흐름 경로에 포함되지 않은 가지의 전류로 도형 망로대표전류로 선정한다. 이 전류들과 단독 망로 전류로 행렬 I 를 구성한다.
- 단계 5) 단계 1에서 작도한 도형에서 임피던스 행렬을 구한다.
- 단계 6) 단계 3에서 구한 값들과 전압원들로 행렬 V 를 작성한다.
- 단계 7) 이와같이 구한 행렬 Z, I, V 로 $ZI = V$ 형태의 회로망 방정식을 완성한다.

2.3 기하학적 망로해석법

이상에서 고찰한 기하학적 도형을 보다 일반화하여 단독 전류원이 내재된 기하학적 망로해석법을 도출한다.

2.3.1 망로 수의 결정

대형회로망을 풀기 위한 수식의 수는 기하학적 도형의 망로와 마디의 수에 의해 결정된다. 통상적으로 그 수는 보목가지의 수로서 마디의 수를 n , 가지의 수를 b 라고 할 때, $b - n + 1$ 이었다. 단독 전류원이 내재된 회로망에서는 전류원이 포함된 가지들이 제거되므로 전체의 수에서 그 가지의 수만큼 빼주어야 한다.

따라서 전류원을 갖고 있는 가지가 c 개인 경우, 회로망 해석을 위한 최소한의 미지수의 수와 독립 망로의 수는

$$b - n + 1 - c \quad (3.1)$$

이다. 이 경우 미지수는 망로전류들과 망로대표전류들이다.

2.3.2 단독전류원 처리를 통한 전원 행렬 결정

단독전류원의 전류값이 경로 루프를 통해 전압강하식을 형성함을 살펴보았다. 이 수식들은 망로 내의 다른 전압원과 함께 전원처리에 사용된다. 전압강하식이 극성을 갖고 있으므로 키르히호프의 전압법칙에 따라 망로 선회 방향에 (-)에서 (+)로 대응하는 것은 (+), (+)에서 (-)로 대응하는 것은 (-)로 처리한다. 각각의 망로가 전원처리 값을 갖고 있으므로 전류원을 포함하였던 가지가

제거된 회로망 도형의 각 망로에 이를 적용하여 전원치를 리를 수행하고 수식을 정립하고, 행렬을 완성한다.

[예 제] 다음과 같은 회로망을 해석하기 위한 회로망 방정식을 수립하라.

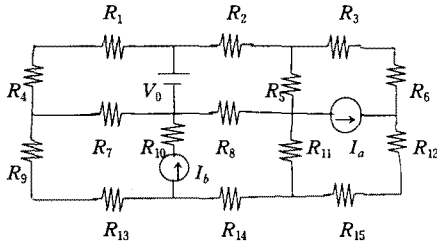


그림 3-1

[기하학적 망로해석법에 의한 풀이]

회로망 도형을 그리면 가지 $b=17$, 마디 $n=11$, 전류원 포함 가지의 수 $c=3$ 으로서 독립망로 내지는 미지수의 수가 $b-n+1-c=4$ 이다. 전류원을 갖는 가지를 제거한 도형을 그리면 그림 3-2와 같다. 여기서 망로대표전류를 구한다.

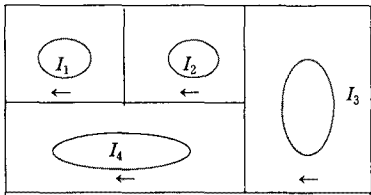


그림 3-2

그림 3-2에서 회로망 방정식의 행렬 Z 와 I, V 를 앞에서 제시한 방법에 의해 구한다.

$$Z = \begin{pmatrix} R_1 + R_4 + R_7 & 0 & 0 & -R_7 \\ 0 & R_2 + R_5 + R_8 & -R_5 & -R_8 \\ 0 & -R_5 & R_3 + R_5 + R_6 & -R_{11} \\ -R_7 & -R_8 & +R_{11} + R_{15} & R_7 + R_8 + R_9 \\ & & -R_{11} & +R_{11} + R_{13} + R_{14} \end{pmatrix}$$

$$I = (I_1 \quad I_2 \quad I_3 \quad I_4)^T$$

행렬 V 는 다음 그림 3-3에서 구한다.

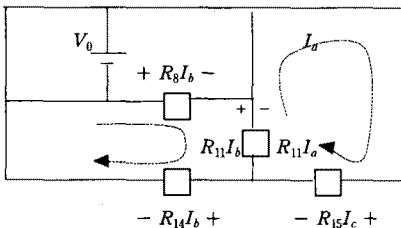


그림 3-3

그림 3-3에서 각 망로의 선회 방향과 전압의 극성을 고려하여 행렬 V 를 완성한다.

$$V = \begin{pmatrix} -V_0 \\ R_8 I_b + V_0 \\ R_{11} I_b - (R_{11} + R_{15}) I_a \\ (R_{11} - R_8 - R_{14}) I_b + R_{11} I_a \end{pmatrix}$$

3. 결 론

단독전류원이 내재된 대형회로망의 기하학적 도형과 수식화 기법을 고안하였다. 전류원 포함된 가지는 해석적 방법에 의해 전체 가지에서 제거되고 회로망 수식의 수도 그만큼 감소한다. 최종 행렬의 차수는 $b-n+1-c$ 이 된다. 이러한 도형을 근거로 하여 임피던스 행렬을 종래의 망로해석법으로 구하고, 망로대표전류와 망로전류로 구성된 미지수 행렬이 형성되며, 전류원 전류값의 망로 선회에 따른 전압강하 값을 전원 행렬에 포함시킨 새로운 형태의 회로망 방정식을 제시하였다.

(참 고 문 헌)

- 1) 황재호, 「회로망이론」, 양서각, 1999.
- 2) 김수중, 「신편회로망이론」, 반도출판사, 1995.
- 3) 김창석외1, 「회로망해석과 합성」, 문운당, 1993.
- 4) 진년강, 「최신회로이론」, 양서각, 1999.
- 5) 박송배, 「신회로이론」, 문운당, 1998.